PETROBRAS

Introdução à Análise de Investimento em **Projetos de Produção de Petróleo**

João Bosco Dias Marques



Introdução à Análise
de Investimento em

Projetos de Produção de Petróleo

João Bosco Dias Marques

PETROBRAS

Imagens de capa

Banco de Imagens da PETROBRAS

Revisão ortográfica e gramatical

Tatiana Dias Lutz - Firjan-Senai

Projeto Gráfico | Diagramação

María Julia Gouffier - Firjan-Senai

1ª edição | 2024

Anna Paula Tavares de Araujo / CRB-7: 5766

M357 Marques, João Bosco Dias

Introdução à análise de investimentos em projetos de produção de petróleo / João Bosco Dias Marques. -- Rio de Janeiro: Petrobras, 2024.
342 p.: Il.; [recurso eletrônico].

Inclui referências.

ISBN: 978-65-88763-12-4.

1. Análise de investimentos. 2. Produção de petróleo. 3. Projetos de produção. I. Título.

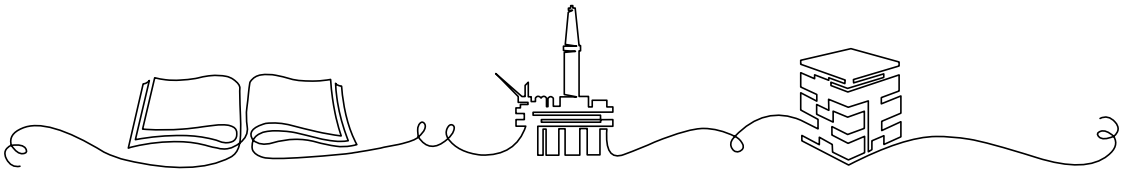
CDD: 332.6

Após anos de experiências e conquistas empresariais e tecnológicas, a Petrobras vem acumulando um conhecimento inestimável e singular. Parte desse conhecimento tem sido gerado, transformado e transmitido por nossos empregados que, ao longo da vida profissional, adquirem saberes técnicos específicos e valiosos.

Reconhecer o diferencial e a contribuição dos empregados é muito importante. Reter e disseminar o conhecimento adquirido também. É essa a inspiração do Programa de Editoração de Livros Didáticos (Peld), que gera valor para novos empregados, mercado e comunidade acadêmica. Temos diversos títulos publicados, entre livros físicos e e-books.

Por meio do Peld, a Universidade Petrobras patrocina todo o processo de editoração do livro, incluindo a impressão de alguns exemplares. Dessa forma, a obra produzida pode ter aplicação interna nos cursos de formação de novos empregados e na educação continuada, além de ser usada pelo autor no mercado editorial. Temos certeza de que esse movimento amplia o protagonismo dos empregados e fortalece a Petrobras como fonte geradora e propulsora de conhecimento.

Esperamos que a publicação que você tem em mãos, fruto do Peld, contribua para seu aprendizado e continue movendo a indústria de energia para entregar cada vez mais valor para a sociedade. Vem com a gente!



PREFÁCIO

Lá se foram quase duas décadas desde que iniciei esta obra, com longos períodos de interrupção e momentos de desistência mais do que eu esperava. As horas dedicadas ao curso de engenharia de petróleo, e outras rotinas na Petrobras, impediram-me de reservar tempo para uma escrita mais elegante, uma didática mais consistente e para as intermináveis revisões, que ainda se fazem necessárias. Uma empreitada árdua, mas também prazerosa, e aquela sensação ímpar de missão cumprida.

Esta primeira edição é uma tentativa de atender tanto o leitor com pouca familiaridade com equações matemáticas complexas, mas que deseja aprender algo sobre análise de investimento em projetos de produção de petróleo, como aqueles que se propõem a enfrentar uma pós-graduação sobre o assunto, pois encontrarão, aqui, alguns pontos de partida, creio eu. É um livro para aqueles que estão envolvidos nas atividades de investimentos em projetos de produção de petróleo, de quaisquer formações acadêmicas, desde economia, engenharias, geociências e administração, além de outras formações de nível técnico da indústria do petróleo. Hoje, mais do que nunca, com a demanda da sociedade por uma transição energética voltada para uma economia de baixo carbono, conhecer os processos de decisão que envolvem grandes valores monetários é quase uma obrigação, sob pena de perdas incalculáveis para as corporações que desenvolvem projetos de energia. Razão pela qual este livro é recomendado para alguns cursos de formação de profissionais de nível superior da Petrobras.

De cara o leitor irá concluir que o melhor seriam dois volumes e não um. O primeiro comporia os quatro primeiros capítulos, abordando o básico sobre avaliação econômica de projetos, e o segundo aglutinaria os três últimos capítulos, endereçado para análise de investimento em condições de incertezas. Era uma dúvida que me perseguiu durante algum tempo, se escreveria ou não um segundo livro mais avançado depois de publicar um volume básico. Resolvi não arriscar. Decidi, e creio ter valido a pena, abordar níveis distintos de dificuldades em um só volume, dividindo-o apenas em dois tomos. Com efeito, organizei o **Tomo I** englobando os **Capítulos 1, 2, 3** e **4**, com abordagem determinística sobre investimento em projetos de produção de petróleo, e o **Tomo II** contemplando os **Capítulos 5, 6** e **7**, com abordagem estocástica, considerando as incertezas e os riscos dos investimentos.

Nesta obra busquei agrupar diversos estudos que fiz nos últimos anos sobre o assunto, e a maior dificuldade foi dar uma feição didática para temas tão multidisciplinares, concatenando-os de forma lógica para um aprendizado eficaz. Penso que este agrupamento de assuntos seja a minha única contribuição genuína, além dos exemplos que elaborei para explorar a teoria. O recomendável, para um livro de introdução, seria incluir mais exemplos exploratórios, mas isso ficará para a próxima edição, na qual pretendo abordar um capítulo sobre avaliação econômica de projetos de energia renovável.

Ainda falta muito para o ideal, e já adianto que o leitor não encontrará aqui nenhum princípio teórico rebuscado de minha autoria, pois me vali dos autores clássicos, que emprestaram a esta obra um peso acadêmico muito acima do que eu seria capaz de fazê-lo. Busquei, com esmero, referenciá-los cuidadosamente. Se esqueci alguma referência, certamente não foi de propósito. As construções matemáticas de minha autoria, todas elementares, derivam de outras nas quais me inspirei.

Esta obra, de introdução à análise de investimento em projetos de produção de petróleo, aborda conceitos gerais de economia, teoria de avaliação econômica de projetos, custo de produção, avaliação econômica de projetos aplicada, teoria da decisão e da preferência, métricas de risco e precificação de ativos e, por último, a moderna teoria de investimento. São sete capítulos com conhecimentos que considero essenciais para quem atua em análise de investimento em projetos de produção de petróleo.

Fui resistente, durante algum tempo, em incluir tópicos gerais de economia, mas acabei por me convencer da sua importância, pois as empresas que investem em projetos de energia fóssil são intensivas em capital, com efeitos significativos sobre a economia do país. Nesse sentido, há sim a necessidade de conhecer temas elementares sobre esta ciência, ao menos para aqueles envolvidos em projetos de grande valor. Outro argumento que me valeu, sobretudo para profissionais de empresas estatais, é que conhecer os *tradeoffs* da economia, contas do governo, política monetária, mercado financeiro e inflação, dentre outros temas interessantes, certamente contribuirá para a evolução na carreira, podendo ajudá-los a se posicionarem quanto às influências políticas sobre a gestão financeira da empresa, nem sempre condizentes com a ciência econômica.

Entre os tópicos de economia, **Capítulo 1**, exploro a lei da oferta e da procura, excedentes do consumidor e do produtor, inflação, equação geral do emprego e renda de Keynes, contas nacionais, política monetária, mercado financeiro, taxa de juros do mercado, conceito de lastro da moeda e os papéis da empresa, Estado e sociedade civil na economia. Este último tópico tomei por empréstimo da dissertação de Pitombo (2007), um amigo de longa data com quem travei bons debates. Um resumo sobre a evolução do pensamento econômico, já no início do capítulo, é baseado em um relatório de pesquisa de história econômica do professor Nali de Jesus de Souza. Este primeiro capítulo, além do resumo sobre a evolução do pensamento econômico, traz uma miscelânea de temas da microeconomia e macroeconomia. Pretendo melhorá-lo para as próximas edições, tornando o texto mais conciso para quem tem pressa em aprender o básico sobre essa fascinante ciência.

Os **Capítulos 2** e **3** são dedicados à teoria de avaliação econômica de projetos e aos custos de produção, respectivamente. No **2** são definidos os critérios de projeto, tanto o de liquidez – o *payback* – como os de rentabilidade – valor presente líquido, taxa interna de retorno, média periódica equivalente, taxa global de rentabilidade e índice de lucratividade. Além dos critérios de projeto, o **Capítulo 2** retrata a estrutura de capital, os métodos de depreciação e o conceito de alavancagem financeira.

No **Capítulo 3** exploro as curvas dos custos de produção, a equação de maximização do lucro, problema de minimização dos custos, alavancagem operacional e curvas de isoquanta e isocusto. Embora os exemplos dos **Capítulos 2** e **3** remetam aos projetos de energia de origem fóssil, os conceitos podem ser aproveitados para avaliar os de fontes renováveis, além de projetos de outros setores da economia. É importante registrar que no **Capítulo 2** e parte do **3** têm adaptações de textos de autoria de José Alves dos Santos (vulgo Badega). O texto do Badega já havia sido revisado em 2002 pelo meu primeiro instrutor na Petrobras, o professor Clodoveu Verotti Filho. Agradeço aos dois por terem dado continuidade ao trabalho iniciado na década de 1970 por Mannarino (1991), um dos primeiros a escrever sobre o assunto na Petrobras.

No **Capítulo 4**, o último que compõe o **Tomo I** desta obra, trato da avaliação econômica de projetos aplicada. Esse capítulo nasceu do trabalho de integração de disciplinas que venho desenvolvendo no curso de formação de engenheiros de petróleo. Ao final do curso, o trabalho é apresentado perante uma banca de profissionais experientes, e os alunos têm a chance de integrar conhecimentos de diversas disciplinas técnicas por meio da análise econômica de um projeto de desenvolvimento da produção. Especificamente, no **Capítulo 4,** aproveitei as recomendações que o consultor Ozualdo Toyoda deixou na Petrobras, sobretudo o fluxo de caixa e os indicadores econômicos de projeto. Ao final do capítulo adicionei duas proposições para cálculos expeditos de VPL de projetos: uma para o desenvolvimento da produção e outra para projetos que consideram o esforço simultâneo da exploração com o desenvolvimento da produção.

Em teoria da decisão e da preferência, **Capítulo 5**, são exploradas a metodologia do valor da informação, função utilidade, equivalente certo e decisão envolvendo múltiplos objetivos. Para escrevê-lo, me foi útil o clássico de Raiffa e Keeney (1993). No **Capítulo 6** dedico um tópico sobre métricas de risco baseado na média-variância e na teoria dos valores extremos, como o AVaR, seguido de métodos de precificação de ativos derivados do modelo CAPM e da teoria de diversificação de Markowitz (1952). Ao final do texto reporto a solução clássica de Black e Scholes (1973) e o método de Cox, Ross e Rubinstein (1979) para precificação de opções financeiras.

O último texto, que compõe o **Capítulo 7**, trata da moderna teoria de investimento, em que apresento exemplos de Dixit e Pindyck (1994) explorando custos afundados, irreversibilidade e *timing* de projeto. Em seguida descrevo alguns exemplos de opções reais da tese de doutorado do professor Marco Antônio Guimarães Dias, que ministrou o tema na Petrobras e é autor de livros sobre opções reais inspirado em Dixit e Pindyck (1994), Trigeorgis (1995) e Copeland e Antikarov (2001). Ao final do capítulo apresento os modelos clássicos aplicados aos projetos de produção de petróleo de McDonald e Siegel (1986), Paddock, Siegel e Smith (1988) e uma análise de Dias (2005) apontando vantagens e desvantagens dos processos estocásticos MGB e MRM para a *commodity* petróleo, baseada nos modelos de Pindyck (1999) e Schwartz (1997).

Além dos sete capítulos, esta obra contempla cinco anexos. No **Anexo 1** é apresentado um resumo de matemática financeira com fórmulas para acompanhar os problemas e exemplos do livro. No **Anexo 2** constam tópicos de regressão linear univariável e multivariável e, no **Anexo 3,** transcrevo alguns processos estocásticos de Itô e a equação de Kolmogorov, seguindo Dixit e Pindyck (1994) e Hamilton (1994). O **Anexo 3** é indispensável para acompanhar a leitura do **Tomo II**, composto pelos **Capítulos 5**, **6** e **7**. Cabe ressaltar que o objetivo dos **Anexos 2** e **3** é introduzir o assunto para aqueles que desejam investigar correlações de variáveis econômicas e previsões de séries temporais da *commodity* petróleo, ou de outras variáveis da análise de investimento em projetos de produção de petróleo.

O **Anexo 4** versa sobre aquecimento global, incluindo parágrafos sobre transição energética, energia renovável, perspectivas e custos de projetos. Esse anexo, embora parte do conteúdo se desatualize em breve, servirá para que o leitor tenha em mente a ordem de grandeza da produção de energia no Brasil e no mundo, bem como as alternativas viáveis de projetos de energia renovável. Essa noção da ordem de grandeza é necessária para se avaliar o impacto de projetos de energia renovável veiculados na imprensa frente ao domínio das energias fósseis, que ainda perdurará por um longo tempo. O último anexo, o de número cinco, contém tabelas com fatores de conversão de variáveis de energia.

No mais, optei por notas de rodapé e alguns ensaios, permitindo melhor aproveitamento do texto principal. Vale registrar que todas as figuras, incluindo os gráficos, foram editadas no *software* Inkscape, e primei pela didática em detrimento à precisão matemática. Por fim, entre uma xícara de café e outra, um vício que me acompanha enquanto escrevo, aproveitei a leveza e tomei a liberdade de inserir frases de alguns pensadores no início de cada capítulo. Em certo sentido, estudar temas econômicos é adentrar num labirinto de dúvidas sobre nossas crenças e valores. Aproveite os estudos!

João Bosco Dias Marques

Abril/2024

AGRADECIMENTOS E DEDICATÓRIA

Em primeiro lugar agradeço à Petrobras por viabilizar a publicação deste livro, e aos meus ex-colegas de trabalho Clodoveu Verotti Filho, Fernando Antônio Lucena Aiube, José Alves dos Santos (Badega), Marco Antônio Guimarães Dias, Nilton Emanuel Santos Pitombo e Ozualdo Toyoda. Foram eles que me inspiraram para esta empreitada, na qual busquei emprestar um valor didático aos registros que deixaram na Petrobras. Em segundo lugar, desde já, agradeço por eventuais correções e sugestões que sejam enviadas a mim por colegas que se derem ao trabalho de ler esta obra.

Em especial agradeço à minha colega Flávia de Oliveira Lima Falcão, sempre solícita nas revisões de textos dos amigos, e ao engenheiro Marcos Vitor Barbosa Machado pelo parecer favorável à publicação. Agradeço à Sylvia Teresa Barbosa de Oliveira Cambra pelo compartilhamento de material didático e por me ajudar durante muitos anos na disciplina de avaliação econômica de projetos de produção. Um agradecimento especial ao professor Roberto Vinícius Barragan, pelo debate e sugestão de alguns problemas resolvidos, e ao meu grande amigo e professor Ronaldo Vicente, que já se encontra junto ao Altíssimo, por sempre ter apoiado as minhas iniciativas acadêmicas. Ao economista Gabriel Faria Guerra e Cunha, por suas correções e sugestões nas sistemáticas de avaliação econômica de projetos de produção de petróleo.

Ao professor Nereu Carlos Milani De Rossi e à minha colega Juliana Soares Lima, meu agradecimento por terem me incentivado como instrutor do tema de avaliação econômica de projetos na Petrobras. Agradeço ao meu atual gerente Bartolomeu Augusto Paiva Junior, pelo apoio a esta e outras iniciativas minhas na Universidade Petrobras. Um agradecimento à Anna Paula Tavares de Araujo, por todo o seu esforço de manter viva a prática de publicação de livros didáticos de profissionais da Companhia, à María Julia Gouffier pelo projeto gráfico e à Tatiana Dias Lütz pela revisão ortográfica.

Por último, agradeço à minha guerreira e companheira de todos os tempos, Aglais Zaranza Lopes Marques (Gê), pelo apoio incondicional em todas as minhas entregas na Petrobras.

Dedico esta obra ao meu filho Yuri Carvalho Marques, meu mestre cervejeiro.

SUMÁRIO

TOMO I

1. TÓPICOS GERAIS DE ECONOMIA 18

1.1. Evolução do Pensamento Econômico – Breve Histórico 19

1.1.1. Antiguidade 20

1.1.2. Idade Média 21

1.1.3. Mercantilismo 22

1.1.4. Capitalismo 22

1.1.5. Liberalismo 24

1.1.6. Economia clássica 25

1.1.7. Economia neoclássica ou marginalista 26

1.1.8. Socialismo 26

1.2. Pensamento Econômico Moderno 28

1.2.1. Economia keynesiana 28

1.2.2. Contrarrevolução keynesiana 29

1.3. Teoria do Valor 30

1.3.1. Teoria objetiva do valor–trabalho 31

1.3.2. Teoria subjetiva do valor–utilidade 31

1.3.3. Enfoque misto 31

1.4. Distribuição de Renda 31

1.4.1. Visão clássica e neoclássica 32

1.4.2. Visão marxista 32

1.4.3. Índice de Gini 33

1.4.4. Índice de Desenvolvimento Humano 33

1.5. Princípios Elementares da Economia 35

1.5.1. Lei da demanda – consumidor 38

1.5.2. Lei da oferta – produtor 39

1.5.3. O preço de equilíbrio 39

1.5.4. Deslocamento da curva da demanda 40

1.5.5. Deslocamento da curva da oferta 41

1.5.6. Elasticidade-preço da demanda 42

1.6. Equilíbrio de Mercado 43

1.6.1. Funções da demanda e oferta 44

1.6.2. Excedente do consumidor e do produtor 45

1.6.3. O comércio internacional 47
1.6.4. O custo da tributação 48
1.6.5. Taxa marginal de substituição e curvas de indiferença 49

1.7. Inflação 50
1.7.1. Inflação de demanda – teoria quantitativa da moeda 51
1.7.2. Inflação de custos 52
1.7.3. Outras pressões inflacionárias 53
1.7.4. Curva de Philips 54
1.7.5. Controle de preços 55

1.8. Teoria Geral do Emprego e Renda 56

1.9. Contas Nacionais 59

1.10. Política Monetária (Déficit Público) 62

1.11. Mercado Financeiro 65
1.11.1. Demanda e oferta de moeda 65
1.11.2. A demanda por moeda do BC 66
1.11.3. Lastro da moeda – resumo 68

1.12. O Papel das Empresas, Estado e Sociedade Civil 68
1.12.1. Empresas 69
1.12.2. Estado e sociedade civil 70

2. TEORIA DE AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS 72

2.1. Viabilidade Econômica de Projetos 72
2.1.1. Tempo de projeto 72
2.1.2. Premissas gerais 73
2.1.3. Taxa mínima de atratividade 73

2.2. Estrutura de Capital 74

2.3. Critérios de Avaliação Econômica 76
2.3.1. Critério de liquidez 76
2.3.2. Critérios de rentabilidade 77

2.4. Alternativas de Projetos 85
2.4.1. Investimentos dependentes e independentes 85
2.4.2. Investimentos mutuamente exclusivos 85
2.4.3. Classificação por inspeção 85
2.4.4. Análise incremental 87
2.4.5. VPL *versus* TIR 90

2.4.6. Projetos com durações diferentes 90

2.5. Influência do Imposto de Renda 92

2.6. Alavancagem Financeira 93

2.7. *Leasing* Financeiro e Operacional 95

2.7.1. *Leasing* financeiro 96

2.7.2. *Leasing* operacional 96

2.8. Limitação de Capital 98

2.9. Depreciação 100

2.9.1. Influência da depreciação no lucro operacional 101

2.9.2. Bens tangíveis 102

2.9.3. Bens intangíveis 102

2.9.4. Despesa e investimento 102

2.9.5. Métodos de depreciação 102

2.9.6. Depreciação e imposto de renda 105

2.10. Competência Hierárquica 105

2.11. Problemas Propostos 106

3. CUSTO DE PRODUÇÃO 110

3.1. Classificação dos Custos 110

3.2. Curvas de Custos 111

3.2.1. Taxa de Crescimento do Custo Variável 111

3.2.2. Custo total 112

3.2.3. Custo unitário e custo médio 113

3.2.4. Custo marginal 114

3.2.5. Custo de longo prazo *versus* custo de curto prazo 115

3.3. Equilíbrio da empresa 117

3.4. Maximização do Lucro 118

3.5. Alavancagem Operacional 124

3.6. Teoria da Firma – Preço e Produção 126

3.7. Economia de Escala e de Escopo 127

3.8. Isoquanta e Isocusto – Minimização de Custo 128

3.9. Problemas Propostos 132

4. AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS APLICADA 136

4.1. Premissas Gerais 136

4.2. Componentes do Fluxo de Caixa 137

4.2.1. Receitas 138

4.2.2. Dispêndios 139

4.3. Indicadores Econômicos de Projeto 141

4.4. Contrato de Concessão 142

4.5. Contrato de Partilha de Produção 144

4.6. Métrica de Projeto e Número Índice 146

4.6.1. Métrica de projeto 146

4.6.2. Número índice 147

4.7. VPL de Projetos – Desenvolvimento da Produção 147

4.7.1. Curva de produção de óleo 149

4.7.2. Curva de injeção de água 149

4.7.3. Curva de produção de água 149

4.7.4. Curva de produção de gás 150

4.7.5. CAPEX – Plataforma 150

4.8. VPL de Projetos – Esforço Simultâneo de Exploração e Produção 150

4.9. Problemas Propostos 154

TOMO II

5. TEORIA DA DECISÃO E DA PREFERÊNCIA 157

5.1. Risco e Incerteza 157

5.2. Fontes de Incertezas 158

5.3. Metodologias 159

5.4. Processo Decisório 160

5.5. Árvore de Decisão 160

5.6. Valor da Informação 164

5.6.1. Informação perfeita 165

5.6.2. Informação imperfeita 166

5.7. VDI Aplicada em Projeto de Produção 169
5.7.1. Distribuição a priori e a posteriori 171
5.7.2. Aplicação do VDI 172
5.7.3. Critérios para aplicação do VDI 172
5.7.4. Medida de aprendizagem 172

5.8. Função Utilidade 173
5.8.1. A teoria utilitarista 174
5.8.2. Determinação simplificada de curvas da função utilidade 175
5.8.3. Tipos de função utilidade 176
5.8.4. Axiomas da escolha 176

5.9. Equivalente Certo 178
5.9.1. Participação ótima em carteira de projetos 179
5.9.2. Coeficiente de aversão ao risco 183
5.9.3. Tolerância ao risco 185

5.10. Decisão Envolvendo Múltiplos Objetivos 189
5.10.1. Objetivo, atributo e resultado 189
5.10.2. Definição do problema 190
5.10.3. Conceito de dominância e de fronteira eficiente 191
5.10.4. Determinando a fronteira eficiente com média linear ponderada 192
5.10.5. Taxa marginal de substituição 194
5.10.6. Problema de decisão com três atributos 196

6. MÉTRICAS DE RISCO E PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS 199

6.1. Métricas de Risco 199
6.1.1. Retorno e métrica básica de risco 199
6.1.2. Fundamentos da dispersão como métrica de risco 205
6.1.3. Medidas coerentes de risco 207

6.2. Modelos de Precificação de Ativos 213
6.2.1. Modelo CAPM 214
6.2.2. Modelo I-CAPM 218
6.2.3. Modelo D-CAPM 220
6.2.4. APT – Arbitrage Pricing Theory 220
6.2.5. Modelo de três fatores de Fama e French 221

6.3. Modelos de Precificação de Opções Financeiras 223
6.3.1. Derivativos 223
6.3.2. Opções financeiras 223
6.3.3. Noção de *hedge* 225

6.3.4. Modelo de Black e Scholes 225
6.3.5. Modelo de Cox, Ross e Rubinstein 229

6.4. Limitações dos Métodos de Precificação 235

7. A MODERNA TEORIA DE INVESTIMENTO 236

7.1. Custo Afundado, Irreversibilidade e Timing 236
7.1.1. Custo afundado 236
7.1.2. Irreversibilidade 237
7.1.3. *Timing* 237

7.2. Irreversibilidade e Timing Aplicados em Projetos de Petróleo 237
7.2.1. Exemplo com dois períodos 237
7.2.2. Exemplo com três períodos 245
7.2.3. Escala e flexibilidade 249

7.3. Otimização Dinâmica sob Incerteza 251
7.3.1. Programação dinâmica 252
7.3.2. Análise de ativos contingentes 258

7.4. Opções Reais 261
7.4.1. Opções financeiras e opções reais – diferenças e semelhanças 262
7.4.2. A função VPL para projetos de produção de petróleo 263
7.4.3. Fase de exploração 265
7.4.4. Fase de desenvolvimento 268
7.4.5. Abordagem para a reserva desenvolvida ou preço da *commodity* 270

7.5. Modelos Clássicos de OR em Projetos de Produção 273
7.5.1. Modelo de McDonald e Siegel 273
7.5.2. Modelo de Paddock, Siegel e Smith. 275
7.5.3. Modelos de Pindyck e Schwartz – MGB *versus* MRM 280

1. ANEXO – TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA 285

1.1. O Valor do Dinheiro no Tempo 285
1.1.1. Conceito e definição de juros 285

1.2. Capitalização Simples e Composta 286
1.2.1. Juros simples 286
1.2.2. Capitais diferidos equivalentes 286
1.2.3. Juros compostos 286
1.2.4. Período de capitalização 286
1.2.5. Taxa proporcional (nominal) 287

1.2.6. Taxa equivalente (efetiva) 288
12.7. Taxa instantânea equivalente 289

1.3. Fluxo de Caixa 289
1.3.1. Série uniforme 290
1.3.2. Perpetuidade 292

1.4. Determinação da Taxa de Juros de Fluxo de Caixa 292
1.4.1. Taxa de juros de uma série uniforme 293
1.4.2. Taxa de juros de um fluxo de caixa genérico 293

1.5. Sistemas de Amortização 296
1.5.1. Sistema francês ou tabela PRICE 296
1.5.2. Sistema de amortização constante – SAC 298
1.5.3. Sistema americano de amortização 299

1.6. Correção Monetária, Taxa de Câmbio e Número Índice 300
1.6.1. Correção monetária 300
1.6.2. Taxa de câmbio 300
1.6.3. Número índice 302

2. ANEXO – ANÁLISE DE REGRESSÃO 304

2.1. Análise Discriminante 304

2.2. Regressão Linear Univariável 304

2.3. Regressão Linear Multivariável 306
2.3.1. Variável aleatória discreta de duas dimensões 306
2.3.2. Variável aleatória contínua de duas dimensões 307
2.3.3. Modelo de regressão linear com três variáveis 309
2.3.4. Modelo de regressão linear com mais de três variáveis 311

3. ANEXO – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS 316

3.1. Processos de Wiener 317

3.2. Movimento Browniano – Passeio Aleatório 318
3.2.1. Martingale 319

3.3. Movimento Browniano Generalizado – Processos de Itô 320
3.3.1. Movimento aritmético browniano, MAB 320
3.3.2. Movimento geométrico browniano, MGB 320
3.3.3. MGB com reversão à média, MRM 322

3.4. Lema de ITÔ 323

3.5. Processos com Saltos de Poisson 324

3.6. Barreira de Distribuição de Longo Termo 324

3.7. Equação de Kolmogorov 325

4. ANEXO – AQUECIMENTO GLOBAL 327

4.1. Aquecimento Global 327

4.1.1. Gases de efeito estufa 329

4.1.2. Net zero 2050 333

4.1.3. Matriz energética – Brasil (1970 a 2022) e Mundo (1990 a 2020) 334

4.2. Contraponto à Tese da Origem Antropogênica 337

4.3. Transição Energética 339

4.3.1. Transporte 339

4.3.2. Captura de CO2 direto do ar 339

4.3.3. Combustíveis sintéticos renováveis 341

4.3.4. Armazenamento geológico de CO2 341

4.3.5. Reflorestamento 342

4.4. Energia Renovável 342

4.4.1. Energia eólica 342

4.4.2. Energia solar 343

4.4.3. Hidrogênio 344

4.4.4. Biomassa 346

4.5. Perspectivas 348

4.5.1. Carvão, óleo e gás 348

4.5.2. Energia solar fotovoltaica 349

4.5.3. Demais fontes de energia 349

4.6. CAPEX e O&M de Projetos de Energia 350

5. ANEXO – FATORES DE CONVERSÃO 353

REFERÊNCIAS 355

TOMO I

1 Tópicos Gerais de Economia
2 Teoria de Avaliação Econômica de Projetos
3 Custos de Produção
4 Avaliação Econômica de Projetos Aplicada

1

TÓPICOS GERAIS DE ECONOMIA

A economia não trata de coisas ou de objetos materiais tangíveis; trata de homens, de suas apreciações e das ações que daí derivam.
Ludwig von Mises

As tomadas de decisões, tanto corporativas como pessoais – a exemplo do uso do tempo, de qual carreira seguir ou de como gastar ou economizar dinheiro – apoiam-se em princípios da economia. Considerada *a ciência da escassez*, a economia preocupa-se, essencialmente, com o uso eficiente dos recursos disponíveis para a produção de bens e serviços indispensáveis à satisfação das necessidades humanas.

São diversas as definições. Segundo Robbins (1945), por exemplo, a economia é a ciência que estuda o comportamento humano como uma relação entre fins ilimitados e usos alternativos dos meios escassos. Para Umbreit, Hunt e Kinter (1948), "a economia é o estudo da organização social através da qual os homens satisfazem suas necessidades de bens e serviços". Já para Samuelson (1992), a economia é a ciência que define o quê produzir, quanto, como e para quem produzir. Para esse economista, a ciência econômica opera no sentido de maximizar o bem-estar de uma sociedade minimizando o uso de seus recursos, os quais, em geral, são escassos.

Em um sentido matemático, pode-se afirmar que a economia é a ciência social que investiga as relações de equilíbrio entre as variáveis socioeconômicas, tendo como condição de contorno a escassez de recursos. Escassez significa que a sociedade dispõe de recursos limitados e, portanto, não produzirá todos os bens e serviços nas quantidades demandadas. Até mesmo nas sociedades com alto grau de desenvolvimento humano, os recursos são limitados para atender todas as demandas almejadas.

Ensaio 1.1

Amartya Sen[1], escritor e economista indiano, lembra duas origens muito diferentes para a economia: a primeira está relacionada à ética e à política, remontando à Ética a Nicômaco, de Aristóteles (384–322 a.C.), cuja tese central coloca a felicidade do homem como um bem supremo. Para Aristóteles, a verdadeira felicidade somente seria obtida pela prática da virtude, ou seja, pela capacidade humana de usar a razão para praticar o bem visando a felicidade individual e coletiva. A segunda origem da economia está relacionada à engenharia, na busca de associar o comportamento econômico com a racionalidade. É com base nesta origem, que se costuma dizer que entre as ciências humanas a economia é a mais exata.

Filósofos como Adam Smith[2] e Stuart Mill[3] também realizaram estudos econômicos considerando as questões éticas. Assim, tanto a ética como a racionalidade estiveram presentes ao longo dos séculos nos debates entre os economistas das mais diversas correntes, passando pelos precursores da escola austríaca, como Juan de Mariana, Richard Cantillon e Frédéric Bastiat, até Carl Menger, Ludwig von Mises, Murray Rothbard e Friedrich Hayek, tidos como fundadores daquela escola, como atesta Iório (2017).

[1] Nobel de economia de 1998. Advogou a tese de que o desenvolvimento de um país está ligado às oportunidades que este oferece à sua população.

[2] Adam Smith (1723 a 1790). Filósofo e economista britânico nascido na Escócia. Considerado o mais importante teórico do liberalismo econômico.

[3] Stuart Mill (1806 a 1873). Filósofo e economista britânico e um dos pensadores liberais mais influente do século XIX.

Na outra vertente, inspirada no marxismo, mas revisando-o para explicar o desenvolvimento das sociedades capitalistas do século XX, o debate, centrado mais na ética das questões sociais e menos nos racionalismos econômicos, foi travado por pensadores como Max Horkheimer, Theodor Adorno, Herbet Marcuse, Jürgen Habermas e Erich Fromm. Eles foram críticos tanto do capitalismo ocidental como do comunismo soviético, apontando uma alternativa econômica com releituras de Kant, Hegel, Marx, Freud, Weber e Lukács.

Entre os filósofos e economistas da escola austríaca e outras assemelhadas, a exemplo da escola monetarista, escola de Chicago e de Manchester, prevalece o discurso de valorizar mais o indivíduo do que o coletivo, daí suas críticas à intervenção do Estado e o apoio ao poder da organização espontânea, o livre mercado. Ao passo que nas escolas derivadas do marxismo, como a escola de Frankfurt, o *keynesianismo* e outras decorrentes do *fabianismo* britânico, embora com críticas ao marxismo, prevalece o discurso de valorizar mais o coletivo do que o indivíduo, com defesa da intervenção do Estado e apoio às organizações gregárias.

Possivelmente, entre os pensadores e economistas das duas correntes, haja mais concordância do que discordância. Apenas a título de exemplo, um evento interessante entre Keynes[4] e Hayek[5], dois economistas que protagonizaram o embate de temas econômicos do século XX, é revelado em Llosa (2018, p. 71), o qual transcrevo. Keynes havia lido O Caminho da Servidão em sua ida à conferência de Bretton Woods, em 1944. No dia 28 de junho desse ano, escreveu à Hayek cumprimentando-o por ter escrito um grande livro. Disse Keynes: "todos devemos estar agradecidos ao senhor por dizer aquilo que era necessário ser dito". E ainda acrescentava: "moral e filosoficamente estou de acordo com praticamente tudo o que o senhor diz, e não só de acordo, mas com uma concordância muito acentuada". A seguir, porém, Keynes formula suas críticas: "o senhor admite que o problema do planejamento do governo reside em onde se marca o limite, mas não nos dá uma guia para saber onde fixá-lo. É verdade que nós dois, sem dúvida, o fixaríamos em lugares diferentes. Segundo as minhas ideias, o senhor subestima a média". Quanto a isso não há dúvida de que Keynes tinha razão: Hayek detestava médias e água morna, era um homem de extremos, o que motivava que, entre seus grandes acertos, às vezes cometesse erros gigantes. Mas não há dúvida, apesar das suas diferenças, que Hayek sempre teve um grande respeito por Keynes. E o disse à sua viúva, Lydia Lopokova, quando ele faleceu em 1946: "seu marido é o único grande homem que conheci por quem sempre senti uma ilimitada admiração".

Se assim é entre os grandes oponentes da economia, uma posição sábia seria aquela que recomende observar os valores de cada corrente, reter aquilo que o faz sentir-se confortável conforme suas crenças sobre o indivíduo e a sociedade, e tecer críticas construtivas, valorizando menos os excessos e mais as convergências. Por fim, para estudos sobre o que pensam os filósofos e economistas, segue uma lista de nomes conforme seus enfoques:

- Foco no indivíduo – Thomas Hobbes, Edmund Burke, Adam Smith, David Ricardo, Michael Oakeshott, Alexis de Tocqueville, Friedrich Hayek, Eric Voegelin, Jean-François Revel, Ludwig von Mises, Karl Popper, C. S. Lewis, Thomas Sowell, Roger Scruton e Theodore Dalrymple.
- Foco no coletivo – Jean-Jacques Rousseau, Thomas Paine, Karl Marx, Friedrich Engels, György Lukács, Eric Hobsbawm, Max Horkheimer, Herbert Marcuse, Habermas, Erich Fromm, Theodor Adorno, Thomas Carlyle, Maynard Keynes, Antônio Gramsci e Thomas Piketty.

1.1. Evolução do Pensamento Econômico – Breve Histórico

Este tópico é um resumo adaptado de uma pesquisa de história econômica realizada pelo professor Nali de Jesus de Souza, além de algumas notas de Iório (2017) e Hunt e Lautzenheiser (2022).

[4] John Maynard Keynes (1883 a 1946). Economista britânico cujas ideias mudaram fundamentalmente a teoria e prática da macroeconomia.

[5] Friedrich Hayek (1899 a 1992). Economista e filósofo austríaco. Defensor do liberalismo clássico e Nobel em ciências econômicas de 1974 por seu trabalho pioneiro de teoria da moeda e flutuações econômicas.

1.1.1. Antiguidade

A economia nas sociedades primitivas garantia essencialmente a sobrevivência por meio da produção de alimentos, construção de abrigos, fabricação de vestuário e artefatos de defesa. Em geral, os homens produziam as ferramentas e utensílios para a agricultura, caça e pesca, ao passo que as mulheres se dedicavam à cocção dos alimentos, confecção de vestuários e à educação dos filhos. Havia casos de grupos que produziam excedentes utilizados para a troca. Com o tempo, alguns trabalhadores se especializaram e passaram a liderar aprendizes e ajudantes. Nasciam os primeiros gestores de negócios.

A escala de produção cresceu, reduzindo, consequentemente, os *custos unitários de produção*, intensificando o mercado por meio da troca de bens e serviços. Com efeito, o trabalho de alguns era suficiente para atender às necessidades de toda uma comunidade. Segundo o professor Nali de Souza, a economia ganhava complexidade à medida que as relações econômicas envolviam comunidades cada vez mais distantes.

Os hábitos de consumo e a forma de produzir de uma comunidade influenciavam a cultura de outras; era o princípio das relações comerciais entre os povos. Mais tarde, a divisão do trabalho e as especializações ficaram mais bem definidas com a formação das classes de trabalhadores e comerciantes, incluindo os soldados. Surgiram, a partir daí, os primeiros agentes econômicos: governo, consumidores, produtores, comerciantes e banqueiros. Estes últimos emergiram após a criação da moeda[6], que passou a circular como meio de troca. Para os que detinham excedentes de moeda, passaram a cobrar juros mediante empréstimos.

Um pensamento que se impôs ao sistema de empréstimos, defendido por filósofos gregos renomados como Platão (428 a 347 a.C.) e Aristóteles (384 a 322 a.C.), pregava que a possibilidade de riqueza fácil com a cobrança de juros corrompia os valores individuais, já que se priorizava a busca da riqueza em detrimento às práticas virtuosas. Eram, portanto, condenáveis a acumulação de moeda e cobrança de juros mediante empréstimos.

Na Roma antiga, a população de escravos realizava todo o trabalho em troca apenas do necessário para sobreviver, e os senhores destes apropriavam-se do excedente. A economia era essencialmente agrícola e a vida em sociedade se passava em fortificações e casas, onde residiam a nobreza e os chefes militares. Para os filósofos gregos, a economia era relegada ao segundo plano, e a política e a filosofia constituíam os verdadeiros valores do homem. A virtude em discutir a divisão da riqueza entre os homens contrastava com a mediocridade daqueles que se preocupavam em obtê-la. Segundo os gregos, o comércio envolvendo a moeda era pouco recomendável, ao passo que o escambo, não, pois este permitia atender às necessidades básicas do homem e resultava na especialização dos produtores. Um claro equívoco temporal dos filósofos gregos.

Para os gregos, o objetivo do homem era buscar a felicidade no seio da família e no convívio com o próximo, não se restringindo apenas ao prazer, pois seria voltar à condição de animal ou de escravo. Para Platão, o trabalho não era recomendável para aqueles que exerciam altos cargos públicos, pois estariam contaminando a própria alma. Para estes eram cobrados, ainda, desvencilhar-se de bens, da moeda e até mesmo da esposa e, à classe inferior de trabalhadores, permitia-se possuir bens e acumular riquezas até certa medida.

Platão condenava o empréstimo a juros, ao passo que para Aristóteles, embora seguidor da maioria das ideias de seu mestre, o indivíduo devia preocupar-se mais com aquilo que lhe pertence do que com a partilha dos bens excedentes. Nesse sentido, pode-se intuir que Aristóteles destoava da ideia dominante de que os cidadãos, para alcançar a honra e a felicidade, deviam desprezar a riqueza e o luxo e se dedicarem à meditação.

No livro A República, Platão faz referências às especializações do trabalho e da produção, mas foi Aristóteles quem ampliou o discurso de diferentes formas de Estado (monarquia, aristocracia, governo constitucional, tirania, oligarquia e democracia), como uma crítica à defesa de Platão de uma classe dominante de

[6] As primeiras moedas surgiram na Lídia (atual Turquia), no século VII a.C.

"reis filósofos''. Platão tinha em mente um modelo de sociedade com base na propriedade comum de recursos. Ao passo que para Aristóteles, esse modelo era um anátema, e argumentou que "é claramente melhor que a propriedade seja privada, e a finalidade do legislador é criar nos homens esta disposição benevolente de tornar o uso comum da propriedade». No livro I de "Política'', Aristóteles discute a natureza geral das famílias e das trocas de mercado.

Já na Roma imperial, o pensamento econômico estava ligado à expansão dos domínios territoriais. A riqueza internamente produzida era bem-vinda, incluindo aquela obtida pela dominação. Para tanto, visando um objetivo mais político do que econômico, os romanos construíram estradas e aquedutos em diversas regiões de foram a possibilitar o abastecimento das tropas. Com isso, conquistaram a atual Itália e, posteriormente, a Grécia, a Ásia Menor, Judéia, Síria, Espanha e Gália, formando o primeiro império, que começou a ruir com a transferência da corte romana em 330 d.C. para a cidade de Constantinopla, atual Istambul. Com a mudança, surgiram os Impérios Romanos do Ocidente e do Oriente.

Em decorrência dessa transferência, reduziu-se o gasto público em Roma, consequentemente, o comércio enfraqueceu nessa região, sem contar que uma parte substancial das atividades econômicas havia mudado para a nova capital política. Assim, conforme o professor Nali de Souza, o império do oriente se tornava uma potência industrial, ao passo que o império do ocidente, em termos econômicos, entrava em colapso. Tais condições propiciaram as invasões bárbaras que ajudaram a afundar de vez o império do ocidente.

1.1.2. Idade Média

A Idade Média propriamente dita vai do desaparecimento do império romano do ocidente (476 d.C.) até a queda de Constantinopla, tomada pelos turcos em 1453. Durante esse período, a sociedade agrícola era dividida em duas classes: os nobres e os servos. Nesse sistema de feudos, um servo ou mais prestavam serviços ao seu senhor; este a outro mais rico até chegar ao rei. Em troca de alimentos, abrigo e algum dinheiro, os senhores davam terras a seus vassalos para serem cultivadas. Estes, sem liberdade, dificilmente desenvolviam suas propriedades, e as trocas se restringiam ao nível local. As cidades eram protegidas de eventuais inimigos e lá se realizava o comércio de escambo, resultando em algumas especializações. Conforme o professor Nali de Souza, somente com as cruzadas, a partir de 1096, expandiu-se o comércio mediterrâneo, impulsionando cidades como Gênova, Pisa, Florença e Veneza.

A teologia católica, tolerando a desigualdade, permitia a propriedade privada desde que com moderação e praticando-se um preço justo e uma justa compensação do trabalho, conforme apregoava os escolásticos. Não obstante, ainda predominavam a filosofia platônica e aristotélica, segundo as quais o empréstimo a juros era rechaçado, uma vez que contrariava a ideia de justiça nas trocas: o capital reembolsado não poderia ser maior do que o capital emprestado. Algumas exceções a essa regra começaram a surgir com o fim da Idade Média, inaugurando a era mercantilista.

Antes mesmo do final da Idade Média, Tomás de Aquino (1225 a 1274), teólogo italiano, escreveu sobre questões econômicas, fazendo parte de um grupo de estudiosos católicos conhecidos como os escolásticos. Em Suma Teológica, Tomás de Aquino tratou do conceito de preço justo, que ele considerava necessário para a reprodução da ordem social (conceito moderno de equilíbrio de longo prazo). Um preço justo deveria ser o suficiente para cobrir os custos de produção, incluindo a manutenção de um trabalhador e sua família. Ele argumentou que é imoral os vendedores elevarem seus preços simplesmente porque os compradores estavam em necessidade premente de um produto. Já Duns Scot (1265 a 1308), crítico de Tomás de Aquino, afirmava que se as pessoas não se beneficiassem de uma transação, elas não trocariam. Scot defendeu os comerciantes por desempenharem um papel social necessário e útil, transportando mercadorias e tornando-as disponíveis ao público.

1.1.3. Mercantilismo

A Europa se expandiu a partir da queda de Constantinopla com o renascimento e o mercantilismo. A reforma protestante de João Calvino (1509 a 1564), exaltando o individualismo, impulsionou a economia europeia. Agora, enriquecer não necessariamente era pecado, desde que honestamente e pelo trabalho. A cobrança de juros e a obtenção de lucros passaram a ser permitidas.

Nesse período de novas ideias, a política europeia se transformou dando espaço a um estado forte, que se impôs como organismo vivo, criando universidades e realizando grandes empreendimentos de navegação marítima. As descobertas de "outros mundos" e a entrada de metais preciosos para a Europa deslocaram o eixo econômico do Mediterrâneo para novos centros como Londres, Amsterdã, Lisboa e Madri. No mercantilismo, a riqueza de um país era mensurada pelo montante de metais preciosos que circulava na economia. Na Espanha, por exemplo, onde excedia o metal, verificou-se um aumento generalizado dos preços de bens e serviços comercializados (inflação).

Na França, Jean Colbert (1619 a 1683), ministro das finanças de Luís XIV, incentivou as exportações e as manufaturas visando aumentar as disponibilidades de metais preciosos. De acordo com o professor Nali de Souza, Colbert trouxe para a França artesãos estrangeiros, criou fábricas estatais, reorganizou as finanças públicas e fundou a Academia de Ciências e o Observatório Nacional da França. Os salários e os juros passaram a ser controlados pelo Estado.

Richard Cantillon (1680 a 1734), referindo-se às forças de inércia e gravidade de Newton, as replicou sobre a razão humana e a competição de mercado. Em seu *Essay on the Nature of Commerce in General*, ele argumentou que o auto interesse racional em um sistema de mercados livres levaria à ordem e preços mutuamente compatíveis. Ao contrário dos pensadores mercantilistas, no entanto, a riqueza não era encontrada apenas no comércio, mas no trabalho humano. O primeiro pensador a utilizar essas ideias em uma estrutura política foi John Locke.

Já na Espanha, a preocupação consistia em aumentar o ingresso de metais preciosos com o comércio internacional e a exploração de minas nas colônias. Para maximizar o afluxo de metais preciosos, as metrópoles estabeleceram um pacto com suas colônias. Por meio desse pacto, as colônias importavam produtos oriundos tão somente de suas metrópoles, e estas exportavam exclusivamente para suas colônias. Para maximizar os ganhos, as metrópoles fixavam o preço de seus produtos em nível alto e, inversamente, o preço dos produtos importados era fixado no nível mais baixo possível. Constituía-se assim uma sangria permanente das colônias para as metrópoles, conforme Furtado (2000).

No mercantilismo, as trocas de produtos inovadores cresceram muito entre os países europeus e asiáticos. Com o aumento desses mercados, o comércio se intensificou e os proprietários de bens de produção (moeda e terra) enxergaram nessa atividade, uma forma de aumentar suas riquezas. Nascia o mercado-capital. No início a indústria capitalista fornecia ao artesão apenas a matéria-prima e, posteriormente, passou a fornecer as máquinas, as ferramentas e o prédio onde os bens seriam produzidos. Com efeito, em vez de comprar dos fornecedores os produtos, o mercado-capitalista passou a contratar trabalhadores para que produzissem em um local definido, originando a fábrica. Desse modo, a formação de grandes capitais e o surgimento do trabalho assalariado expandiram mais ainda os mercados entre os países, dando origem ao sistema capitalista.

1.1.4. Capitalismo

Adam Smith, com a publicação, em 1776, do clássico *A Riqueza das Nações*, passou a ser considerado o pai da economia moderna, talvez o mais importante teórico do liberalismo econômico. Até então, a economia era um ramo da filosofia social e o mercantilismo, caracterizado por uma forte intervenção do Estado, buscava atender um volume cada vez maior de bens e serviços comercializados na Europa. Desse modo, a

Europa, que agonizava com a escassez de ouro e prata, deixou de ser mercantilista e migrou aos poucos para um sistema capitalista.

a) Definição de capitalismo

O capitalismo como sistema econômico surgiu lentamente, em um período de vários séculos, iniciando na Europa Ocidental e se expandindo para a maior parte do mundo. Nos dizeres de Hunt e Lautzenheiser (2022): "o capitalismo é caracterizado por quatro conjuntos de arranjos institucionais e comportamentais: produção de mercadoria orientada para o mercado; propriedade privada dos meios de produção; um grande segmento da população que não pode existir, a não ser que venda sua força de trabalho no mercado; e comportamento individualista, aquisitivo, maximizador, da maioria dos indivíduos dentro do sistema econômico''.

Já segundo o professor Nali de Souza: "o capitalismo é um sistema econômico e social que sucedeu o mercantilismo e que se baseia na propriedade privada dos meios de produção e de troca. Esse sistema se caracteriza pela busca do lucro, pela livre iniciativa e pela concorrência entre os indivíduos e as empresas. O capitalista é aquele que possui capitais e que os empresta para a realização de empreendimentos por terceiros ou que os aplica diretamente na produção de bens e serviços''. Assim, citando um exemplo da atualidade, qualquer pessoa que tenha recursos extras para compra de ações em uma corretora ou que aplique no sistema bancário para receber juros, por exemplo, age como um capitalista.

b) Evolução do capitalismo

Com o empobrecimento dos nobres no fim da era mercantilista, houve uma migração significativa de artesãos e comerciantes para as cidades urbanas, originando os burgos[7]. Os burgueses, moradores dessas fortificações, dedicavam-se à produção de bens artesanais e ao comércio, gerando fortunas que os distinguiam dos nobres e dos agricultores em geral. Alguns fundaram bancos e investiram no comércio internacional. O lucro refletia o sucesso desses comerciantes e, a taxa de juros, razão entre o lucro e o volume de dinheiro empregado, servia de métrica para mensurar este sucesso. De início a taxa de lucro era exorbitante, e só reduziu com o ingresso de novos burgueses no mercado (concorrência). Com o surgimento do sistema bancário, o excedente de capital mercantilista em posse dos burgueses assumia a função de capital financeiro. Dessa forma os bancos passaram a emprestar dinheiro com juros aos reis e aos grandes empreendedores, financiando os gastos da realeza e grandes empreendimentos de exploração geográfica.

A reforma calvinista justificava teologicamente a cobrança de juros, pois constituía uma renúncia a um consumo imediato ou a um investimento lucrativo, enquanto o tomador do empréstimo poderia obter lucros com o capital emprestado. Enquanto a igreja católica via na renúncia ao consumo imediato, uma atitude nobre de quem a praticava sem a contrapartida dos juros, a reforma calvinista via, na remuneração ao consumo imediato, uma forma de compensação justa. O capitalismo, que tem por pilares a remuneração dessa renúncia e o direito à propriedade privada, tornou-se *natural* na medida em que o esforço humano era compensado de alguma forma.

O sistema capitalista propriamente dito emergiu na Europa no século XVI, com o desenvolvimento da produção manufatureira, fase intermediária entre o artesanato e as grandes corporações da revolução industrial. O capitalista manufatureiro limitava-se a alugar áreas ou prédios, comprar insumos, supervisionar os processos produtivos assim como os trabalhadores, e a vender os produtos no mercado. Daí surgiram as corporações de ofício, que eram associações de pessoas que exerciam uma mesma profissão. Algumas delas mantiveram, durante algum tempo, os *segredos de ofício*, que foram suprimidos a partir de 1789 com a revolução francesa, pois estes *segredos* impediam o desenvolvimento econômico.

[7] Conjunto de habitações fortificadas que servia de residência para os burgueses.

Na Inglaterra, a invenção da máquina a vapor[8] e a construção de ferrovias expandiram a atividade produtiva em nível mundial durante o período de 1730 a 1830, consolidando o capitalismo industrial e revolucionando a economia inglesa, tornando-a uma potência econômica antes do final do século XIX. Com a industrialização dos grandes centros e a absorção de muitos trabalhadores, os custos de produção das empresas se elevaram, reduzindo as taxas de lucro. Aos poucos, as empresas mais eficientes absorveram as menos eficientes, gerando assim os oligopólios (poucas empresas) e os monopólios (uma empresa), como acontece ainda hoje.

c) O capitalismo hoje

De acordo com o professor Nali de Souza, a concentração do capital é inerente ao modo de produção capitalista por dois motivos: toda pequena empresa quer crescer e tornar-se grande e, sem investimento em inovação tecnológica, uma empresa acaba fechando as portas ou é absorvida por outra, ainda que seja grande. A concorrência empresarial demanda do capitalista aumento de estoque de capital, a fim de elevar a produtividade com inovações tecnológicas. Desse modo, cada trabalhador tem, à sua disposição, uma quantidade de capital cada vez maior. Essa é a razão pela qual um trabalhador americano costuma ser bem mais equipado do que um trabalhador mexicano. Como consequência, a concentração do capital em grandes empresas gera uma concorrência desigual. Esta assimetria se verifica claramente entre as grandes empresas multinacionais de países desenvolvidos *versus* empresas de capital nacional de países em desenvolvimento. O resultado, como já se verifica há algum tempo, é que as grandes empresas absorvem as pequenas, dado que o custo unitário de produção é menor nas grandes empresas do que nas pequenas.

De certa forma, as grandes corporações multinacionais controlam o mercado de capitais em nível mundial. À exceção de poucos casos, a maioria não tem um dono, mas uma multidão de acionistas, incluindo fundos de pensão de trabalhadores e clubes de investidores. A propriedade dessas empresas é transacionada no mercado de capitais mediante a venda e a compra de ações, que são títulos emitidos pelas empresas, algumas com direito a dividendos e outras com direito à participação nas assembleias por meio de voto, influenciando o destino da empresa.

Os donos das ações são os verdadeiros capitalistas, representados por milhões de pessoas nos países desenvolvidos ou em desenvolvimento, podendo ser um estudante, uma viúva, uma empregada doméstica ou um multimilionário como o Bill Gates ou Elon Musk. É importante ressaltar que esses milhões de capitalistas assumem riscos de possíveis prejuízos, incluindo o fundador da Microsoft e o da SpaceX.

A globalização do comércio entre as grandes corporações derivou do desenvolvimento da informática e dos meios de comunicação, aumentando em muito os fluxos de capitais entre países. Aqueles que optaram indiscriminadamente por barreiras alfandegárias perderam parte expressiva desse fluxo. Por sua vez, quanto a estes últimos, principalmente os fluxos de longo prazo, ajudaram a desenvolver o setor industrial de alguns países. Outros, mais voláteis, respondem em parte pelas crises econômicas de alguns países em desenvolvimento. Atualmente, a fusão entre conglomerados econômicos de alcance internacional, aproveitando-se da era da transformação digital e da cooperação tecnológica decorrente do e-commerce e de redes sociais (incluindo Inteligência Artificial, IA), acaba resultando em processos produtivos cada vez mais eficientes e com menores custos unitários de produção, o que possibilita mais recursos a serem distribuídos, incluindo quem não produz nenhuma riqueza, uma realidade impossível de ser imaginada no início do século XIX.

1.1.5. Liberalismo

O mercantilismo, com excessiva regulamentação e intervencionismo, gerou distorções na economia de alguns países. Com a revolução cultural foram surgindo novas teorias de cunho liberal e individualista

[8] A máquina a vapor é uma das invenções mais impactantes da humanidade. Credita-se ao inventor inglês Thomas Savery a construção da primeira máquina a vapor funcional em 1698. Ao longo do século XVIII, os refinamentos subsequentes foram essenciais para o início da revolução industrial.

próximas ao comportamento humano, ou seja, o de desejar sempre mais. A expansão capitalista decorre desse comportamento. Como se sabe, o sistema capitalista, conforme demonstra a história, emergiu dos artesãos e comerciantes, que se tornaram financiadores das grandes navegações, do processo fabril e do tráfico de escravos. Estes recebiam a oposição da nobreza, detentora de grandes propriedades de terras e que não pagava impostos, gozando ainda de muitos privilégios estatais. À essa situação se opuseram alguns pensadores, como John Locke (1632 a 1704), Turgot (1727 a 1781) e outros.

A partir das ideias de John Locke, defensor da liberdade política e da propriedade privada, a sociedade civil e o governo estabeleceram contratos de convivência. As ideias de Locke tornaram-se uma arma contra o absolutismo monárquico, contribuindo para a Revolução Gloriosa na Inglaterra em 1688, que resultou na queda do absolutismo, e influenciando a constituição dos EUA de 1787. Algum tempo depois, os franceses Denis Diderot e Jean d'Alembert ratificaram o movimento iluminista[9] no século XVIII com a publicação de enciclopédias, difundindo a filosofia iluminista em muitos lugares. Turgot, por exemplo, formulou, antes mesmo de Smith, o princípio dos rendimentos decrescentes na agricultura, plantando os rudimentos da teoria do equilíbrio econômico.

Em paralelo ao movimento do enciclopedismo, François Quesnay liderou o pensamento econômico dos fisiocratas, para quem os fenômenos econômicos eram explicados por meio de leis naturais, como o sangue no organismo humano. Segundo os fisiocratas, os agentes econômicos se resumiam à classe de agricultores (a única que gerava valor), à classe dos proprietários de terras e à classe estéril, que se ocupava do comércio, da indústria e dos serviços. Assim, para os fisiocratas, os preços agrícolas deviam ser os mais altos possíveis e a moeda tinha apenas a função de troca e não de reserva de valor, encontrado tão somente na agricultura. A classe estéril não gerava valor, apenas transportava-o.

Os fisiocratas, visando aumentar a produtividade na agricultura, defendiam que o Estado não devia impor obstáculo ao livre funcionamento do mercado. Por exemplo, quando o Estado proibia as exportações de cereais em determinado ano, a oferta interna se elevava e os preços eram reduzidos, o que, por sua vez, acabava reduzindo os lucros e impediam novos investimentos, fazendo com que a produção na safra do ano seguinte caísse.

O pensamento econômico dos fisiocratas era traduzido pela famosa expressão "*laissez faire*, *laissez passer*, *le monde va de lui-même*" (deixai fazer, deixai passar, que o mundo anda por si mesmo). Para os fisiocratas, somente a terra gerava valor, enquanto Turgot pregava a ideia de que o valor se encontrava no trabalho, o que fez dele um dos precursores da economia clássica.

1.1.6. Economia clássica

De volta ao século XVI, a reforma protestante de João Calvino contribuiu para difundir o individualismo, apregoando o trabalho árduo como vocação. Assim, João Calvino advertia que se todos trabalhassem em busca de maiores salários e maiores lucros, aumentariam simultaneamente a riqueza nacional e a geração de novos empregos, elevando, consequentemente, a arrecadação de impostos e os investimentos (crescimento econômico).

O pensamento dos economistas clássicos fundamenta-se na liberdade individual e na racionalidade dos agentes econômicos. Ao Estado, por exemplo, cabe assegurar essa liberdade e proteger os direitos de propriedade. Para Adam Smith, uma espécie de "mão invisível" conduz o mercado ao equilíbrio econômico, desde que funcionando livremente por meio de um sistema de preços, este determinado pelas quantidades ofertadas e demandadas (lei da oferta e da procura).

[9] Movimento cultural da elite intelectual europeia que procurou mobilizar o poder da razão, a fim de reformar a sociedade e o conhecimento herdado da tradição medieval. Entre os precursores estão René Descartes, John Locke, Voltaire e Jean-Jacques Rousseau.

O pensamento de Smith foi aperfeiçoado por Ricardo[10]. Para ele, o grande problema da economia residia na agricultura, que na época respondia por dois terços do produto nacional. A lei de rendimentos decrescentes implicava aumento dos custos de produção na agricultura e, consequentemente, redução dos lucros das empresas, contaminando assim toda a economia e levando-a à estagnação. A solução indicada por Ricardo era o controle da natalidade e a livre importação de alimentos para consumo dos trabalhadores. A ele se juntou, ao final do século XVIII, Jean-Baptiste Say, fortemente influenciado pela obra de Adam Smith, divulgando-a pelo continente europeu com a tradução para o francês da obra *A Riqueza das Nações*, quando ainda tinha 12 anos de idade. Segundo Iório (2017), Jean-Baptiste Say criticou as doutrinas do mercantilismo (*colbertismo*, para os franceses) e procurou substituí-las pelo pensamento mais liberal.

Thomas Malthus alertou os teóricos clássicos afirmando que a população aumentava em proporções geométricas, ao passo que a produção de alimentos crescia a taxas aritméticas. Mill (1848), em sua obra *Princípios de Economia Política*, examinou o estado estacionário da economia à luz da teoria malthusiana. Segundo Stuart Mill, tanto a concorrência entre os capitalistas por melhores oportunidades como o crescimento demográfico contribuem para estacionar a economia em um determinado nível. Já a livre importação de alimentos e as inovações tecnológicas (recuperação de terras, uso de fertilizantes etc.) deslocam o estado estacionário da economia para épocas futuras. Hoje, com o cultivo de sementes geneticamente melhoradas, a produção de alimentos deu saltos significativos de crescimento.

1.1.7. Economia neoclássica ou marginalista

De acordo com professor Nali de Souza, a concentração de renda e a intensa migração rural-urbana motivaram alguns movimentos socialistas em meados do século XIX. Os neoclássicos (marginalistas) se opuseram a esses movimentos combatendo a teoria clássica baseada no valor-trabalho. Para os marginalistas, a economia é formada por muitos grupos de pequenos produtores e consumidores, incapazes de influenciar isoladamente os preços e as quantidades no mercado. Os consumidores, de posse de suas rendas, adquiriam bens e serviços de acordo com seus gostos, maximizando sua utilidade total. Uma concepção hedonista da economia, segundo a qual o homem procura o máximo de prazer com um mínimo de esforço.

O início da escola marginalista data de 1870 com Stanley Jevons, Hermann Gossen, Carl Menger e Léon Walras que, de forma simultânea e independente, publicaram obras sobre o princípio da utilidade marginal decrescente. Para os marginalistas, ao contrário dos clássicos, os agentes econômicos entravam em harmonia quando raciocinavam na margem, afirmando que a distribuição do produto se efetua segundo as produtividades marginais de cada fator de produção. Ou seja, a decisão de produzir ou consumir depende do custo ou benefício proporcionado por mais uma unidade produzida ou consumida. Com isso os salários passaram a ser flexíveis e não mais de subsistência (salário fixo), como no pensamento clássico.

Coube ao inglês Alfred Marshall pontuar a primeira síntese neoclássica, buscando conciliar os pensamentos clássico e marginalista. Ele defendia que a diferença fundamental entre as duas escolas (clássica e neoclássica) se restringia à teoria do valor. Enquanto na primeira escola o valor é determinado pela quantidade de trabalho incorporado, na segunda o valor depende da utilidade marginal.

1.1.8. Socialismo

Para os economistas clássicos e neoclássicos, os frutos do progresso técnico e do crescimento econômico são distribuídos de modo equitativo para todos os agentes econômicos, sem conflitos, segundo sua contribuição no processo de produção. No entanto, em determinados períodos, seja na economia de um país ou

[10] David Ricardo (1772 a 1823). Economista e político britânico. Um dos mais influentes economistas clássicos, ao lado de Thomas Malthus e Adam Smith.

no mundo, a distribuição da produção não é equitativa. Decorrem daí as crises econômicas, originada ora pela superprodução (demanda menor que a oferta) ora pelo subconsumo (oferta menor que a demanda).

Em função destes desequilíbrios, para vincular as decisões de demanda com as decisões de oferta, alguns economistas sugerem um planejamento central que coordene as ações entre os dois agentes econômicos: produtores e consumidores. Segundo Karl Marx, o subconsumo dos trabalhadores resulta da exploração dos capitalistas, que procuram estender a jornada de trabalho da classe operária pagando-lhe salários cada vez menores. De acordo com a teoria marxista, a distribuição de renda e as crises econômicas resultam do conflito entre as classes sociais.

Karl Marx afirmava que as contradições do capitalismo, que levam às crises econômicos periódicas, acabariam sucumbindo o sistema capitalista, emergindo daí o socialismo, naturalmente. Já para os economistas clássicos, o socialismo seria um estado estacionário, de crescimento zero. Para Stuart Mill, o sistematizador do pensamento clássico, a sociedade só chegaria ao estado estacionário se esgotasse todas as possibilidades de produção de novos bens e serviços. Para Schumpeter[11] (1971), com pensamento semelhante, o estado estacionário seria o esgotamento da função empresarial, que é o de inovar e de assumir riscos.

Não obstante, o marxismo apregoa um modo de produção superior ao do capitalismo, que emerge de um processo revolucionário entre classes. No socialismo, as forças produtivas seriam ditadas pela classe operária, tornando desnecessário o capitalista. Singer (1988) elege três razões que levam os marxistas a afirmarem que o socialismo é superior ao capitalismo:

- Uma economia planificada não estaria sujeita às crises econômicas, ao desemprego e ao desperdício de recursos.
- Sem a distinção das classes sociais, todos seriam proletários e desapareceria a propriedade privada dos meios de produção.
- O bem-estar dos mais pobres com a supressão dos ricos reduziria drasticamente as desigualdades econômicas entre as pessoas.

Contudo, a história tem vastos exemplos demonstrando a inviabilidade de um sistema de economia planificada. Ainda que algumas conquistas sociais sejam alcançadas no início, o crescimento econômico se prova insuficiente para elevar o bem-estar de toda a população (ver atrasos de países como Cuba, Albânia, Coreia do Norte, Venezuela, Laos e outros). O desmembramento da União Soviética, que decorreu da opção pelo modo de produção capitalista, assim como na China e outros países do leste europeu, contradiz claramente a suposição marxista de superioridade do comunismo.

Os eventos mais notórios da experiência malograda do marxismo de Marx e Lênin foram a queda do muro de Berlim (novembro de 1989) e o fim da União Soviética (dezembro de 1991). Outro evento notável se deu com a liderança de Tony Blair na Inglaterra em 1997, quando convenceu o partido trabalhista a abandonar a ideologia marxista, aproximando-o da economia de mercado. Essa mudança, que ficou conhecida como terceira via, fez a indústria crescer e reduzir drasticamente o desemprego na Inglaterra desde então. Por fim, para tentar resumir a evolução do pensamento econômico desde a antiguidade até Adam Smith e Karl Marx, segue a Tabela 1.1 com alguns pensadores mais influentes conforme o período.

[11] Joseph Schumpeter (1883 a 1950). Economista e cientista político austríaco. Um dos primeiros a considerar as inovações tecnológicas como motor do desenvolvimento capitalista.

Tabela 1.1 – Da antiguidade até Adam Smith e Karl Marx

Período	Precursores, pensadores e economistas influentes
Antiguidade	▪ Platão (428 a 347 a.C.) – Propriedade comum de recursos ▪ Aristóteles (384 a 322 a.C.) – Propriedade privada de recursos
Idade Média	▪ Tomás de Aquino (1225 a 1274) – Preço justo (Escolástico) ▪ Duns Scot (1266 a 1308) – Defesa dos comerciantes (Escolástico)
Mercantilismo e Fisiocratas	▪ Jean-Baptiste Colbert (1619 a 1683) – Fábricas estatais e finanças públicas ▪ John Locke (1632 a 1704) – Pai do liberalismo com a doutrina do *laissez faire*. Suas ideias contribuíram para a revolução gloriosa inglesa de 1688 e a constituição americana de 1787 ▪ Richard Cantillon (1680 a 1734) – Sistema de mercados livres ▪ François Quesnay (1694 a 1774) – Pouca interferência do Estado na economia ▪ Jacques Turgot (1727 a 1781) – Liberdade econômica e direito à propriedade privada
Capitalismo e Liberalismo	▪ Adam Smith (1723 a 1790) – Pai do capitalismo. Autor do clássico "A Riqueza das Nações'', o trabalho como fonte de riqueza. Influenciou Karl Marx, Ricardo, Malthus, Keynes e outros ▪ Jeremy Bentham (1748 a 1832) – Economia marginalista (utilitarismo) ▪ Jean-Baptiste Say (1767 a 1832) – Popularizou a obra de Smith na França ▪ Thomas Malthus (1766 a 1834) – Pai da demografia (controle da população) ▪ David Ricardo (1772 a 1823) – Lei dos rendimentos decrescentes ▪ Stuart Mill (1806 a 1873) – Maior liberdade do indivíduo, maior bem-estar geral da população ▪ Alfred Marshall (1842 a 1924) – Pontuou a primeira síntese neoclássica, buscando conciliar os pensamentos clássico e marginalista
Comunismo e Socialismo	▪ Karl Marx (1818 a 1883) – Economista proeminente. Manifesto Comunista. Teoria dialética da história. Teoria econômica da mais-valia e luta de classes. Marx se inspirou em Friedrich Hegel (1770 a 1831), pai do idealismo alemão. Karl Marx influenciou Lênin e a revolução russa de 1917, além de uma classe significativa de economistas de todas as partes do mundo

1.2. Pensamento Econômico Moderno

O liberalismo puro, defendido pelos economistas clássicos, apregoa que o Estado se restrinja às suas funções básicas: segurança nacional, educação, saúde, manutenção da ordem, da justiça e dos direitos de propriedade. Para um liberal, cabe ao setor privado a produção e o comércio de bens e serviços. Não obstante, dada a frequência das crises econômicas decorrentes do liberalismo econômico, o Estado tem sido chamado a participar da atividade privada com políticas econômicas, ao mesmo tempo em que exerce suas funções nas áreas sociais.

Com a grande depressão da década de 1930 e a crise financeira de 2008, ficou claro para os economistas que o bem-estar social não seria atingido sem eventuais intervenções do Estado, atuando fundamentalmente nas imperfeições do mercado e assegurando os direitos de propriedade. Ademais, onde e quando possível, o Estado pode e deve aumentar o nível de emprego, conforme defendia Keynes.

1.2.1. Economia keynesiana

Keynes (1936), com a teoria geral do emprego e renda, indicou algumas soluções para as crises cíclicas do capitalismo. Para ele, o valor dos bens e serviços produzidos pelas empresas tem como contrapartida os salários, os aluguéis e os lucros, que somados expressam a renda a ser aplicada na produção de novos bens e serviços. Esse é o fluxo circular do *produto* e *renda*, que apresenta alguns *vazamentos*. Por exemplo, quando a renda não é empregada em outro produto, ela flui para os bancos ou se acumula nas casas. Ademais, se parte da poupança não é emprestada, essa porção não participa dos gastos, fazendo com que a demanda fique aquém da oferta. Outros vazamentos identificados por Keynes são as importações e os impostos.

Em caso de recessão, demanda agregada[12] menor que a oferta agregada[13], a solução indicada por Keynes é a de que os bancos concedam mais empréstimos para o consumo e investimentos, que as exportações sejam estimuladas e que o governo aumente seus gastos. Assim, um fluxo maior de renda na economia estimula a demanda agregada, equilibrando o mercado. Para tanto, faz-se necessário que o investimento seja igual à poupança de cada período do fluxo. Não obstante, as oportunidades de projetos rentáveis nem sempre são suficientes para manter uma taxa de crescimento elevada de investimentos. Se o investimento for menor que a poupança, o governo precisa aumentar o gasto que corresponda a esse excesso de poupança[14]. Para Keynes, o desejável era que o gasto do governo se concentrasse em áreas sociais (escolas, estradas e hospitais), pois beneficiaria, em contrapartida, o setor privado.

1.2.2. Contrarrevolução keynesiana

Conforme o professor Nali de Souza, após a crise de 1930, os economistas liberais se dividiam entre neoclássicos conservadores e neoclássicos liberais. Para estes últimos, o mercado não é perfeito e a liberdade em excesso pode gerar instabilidades econômicas, concordando com a participação do Estado na economia. O economista Paul Samuelson é possivelmente o maior expoente da escola neoclássica liberal, cuja influência na academia se evidenciou após a II Guerra Mundial. É dele a integração do pensamento keynesiano com os princípios neoclássicos.

A contrarrevolução keynesiana foi comandada pelos neoclássicos conservadores, que têm como expoentes Ludwig von Mises[15], Friedrich Hayek e Milton Friedman[16], dentre outros. Esses teóricos discordam das críticas dos neoclássicos liberais com relação ao mau funcionamento da economia de mercado, do *laissez faire*. Segundo Friedman e Friedman (1979), a depressão de 1930 originou-se de falhas do governo e não do mercado. Mais precisamente, as políticas econômicas erradas do governo conduziram ainda mais a economia para o fundo do poço, desviando-a de sua trajetória natural de retorno do crescimento equilibrado. Em síntese, os liberais conservadores apregoam uma participação mínima do governo na economia, apenas aquela necessária para assegurar a ação eficaz da "mão invisível'' no funcionamento do mercado.

Para Friedman, políticas de aumento dos gastos públicos, em geral, causam mais inflação do que efeitos positivos sobre a demanda agregada, como querem os keynesianos. O monetarismo recomendado por Friedman restringe-se ao rígido controle do crescimento da oferta de moeda, evitando a inflação. Quase dois séculos antes de Friedman, Richard Cantillon já antecipava os efeitos da política monetária, apontando veementemente, segundo Iório (2017), que a oferta de moeda poderia até funcionar no curto prazo, mas falharia no longo prazo, resultando em inflação quando não acompanhada da contrapartida da produção. A Tabela 1.2 resume os princípios e alguns pensadores influentes das escolas econômicas contemporâneas.

[12]A soma consumo, investimento, gastos do governo e as exportações líquidas.

[13]Todos os bens e serviços que as empresas de um determinado país estão dispostas a oferecer para cada nível de preço.

[14] Mais adiante é mostrada a solução de Keynes por meio de equações macroeconômicas.

[15] Ludwig von Mises (1881 a 1973). Economista, filósofo e defensor da liberdade econômica baseada no princípio da liberdade individual.

[16] Milton Friedman (1912 a 2006). Nobel de ciências econômicas em 1976 por sua pesquisa sobre consumo e teoria monetária.

Tabela 1.2 – Princípios das escolas econômicas contemporâneas

Escola	Princípios	Influentes
Clássica (*Comunismo*)	▪ Relações de classe e papel na luta de classe ▪ Interpretação materialista do desenvolvimento histórico ▪ Crítica ao capitalismo e à propriedade privada ▪ Apropriação por parte do proletário do produto excedente na forma de mais-valia (lucro) ▪ Sistema baseado na propriedade cooperativa dos meios de produção	Pierre Loroux, Saint-Simon, Proudhon, Karl Marx, Friedrich Engels e Bakunin
Neoclássica (*Escola Walrasiana*)	▪ Léon Walras foi um dos três líderes da chamada "revolução marginalista'', ao lado do austríaco Carl Menger e do britânico Stanley Jevons. Walras defendia a livre iniciativa como instrumento para alcançar a justiça social e a justificava matematicamente, unindo as teorias de produção, troca, moeda e capital	Léon Walras, Stanley Jevons, Hermann Gossen, Carl Menger e Alfred Marshall
Neoclássica (*Escola Austríaca*)	▪ Organização espontânea do mecanismo de preços (modelização matemática extremamente difícil) ▪ Aplicação dos acordos contratuais voluntários ▪ Princípios básicos da ação humana (Praxeologia) ▪ Abordagem *laissez faire* (mínima regulamentação) ▪ Transações comerciais sujeitas à menor imposição de forças coercitivas	Frédéric Bastiat, Juan de Mariana, Richard Cantillon, Carl Menger, Ludwig von Mises, Israel Kirzner, Murray Rothbard e Friedrich Hayek
Neoclássica (*Escola de Chicago*)	▪ Livre mercado (rejeição do keynesianismo em favor do monetarismo) ▪ Teoria das expectativas racionais ▪ Rejeição da regulamentação dos negócios (*laissez faire*) ▪ Economia positiva ditada pelos estudos empíricos baseados no uso de estatísticas ▪ Menor ênfase à teoria econômica, e maior importância à análise estatística de dados ▪ Reflete as políticas do Banco Mundial e FMI	George Stigler, Milton Friedman, Robert Ezra Park, Ernest Watson Burgess, Roderick Duncan McKenzie, William Thomas e Frederic Thrasher
Socialismo (*Escola Keynesiana*)	▪ Maior presença do Estado na economia ▪ Relativização da propriedade privada (função social da propriedade) ▪ Defende uma sociedade livre de desigualdades ▪ Propriedade produtiva por meio de cooperativas de trabalhadores ▪ Maior gasto do governo na Economia ▪ Na versão mais moderna, opção pelo termo socialismo de mercado	Rosa Luxemburo, Erich Fromm, Keynes, Salvador Allende, Stiglitz, Norman Thomas, Piketty e Tommy Douglas

Ainda na contrarrevolução keynesiana, tem-se a Escola Austríaca, que enfatiza o poder das organizações espontâneas na formação dos preços e os acordos contratuais voluntários entre os agentes econômicos. Também conhecida como Escola de Viena, a Escola Austríaca entende que as escolhas humanas são complexas e subjetivas, o que impede uma modelização matemática consistente. Seus entusiastas apostam em transações comerciais menos sujeitas à interferência de forças coercitivas governamentais ou mesmo corporativistas. Nas últimas décadas do século XX, alguns institutos promoveram os princípios dessa escola em escala internacional, como o *Mises Institute*, *Cato Institute*, *Heritage Foundation*, *Atlas Network* e *Fraser Institute*. No Brasil se destaca o Instituto Mises Brasil.

1.3. Teoria do Valor

Em economia, um bem ou um serviço tem um valor que é definido pela quantidade de trabalho incorporado ou por sua utilidade. A primeira definição refere-se à teoria do *valor-trabalho* (clássicos e marxistas), e a segunda refere-se à teoria do *valor-utilidade* (neoclássicos, também conhecidos como marginalistas).

1.3.1. Teoria objetiva do valor–trabalho

Para os marxistas, o valor de um bem é expresso pelo trabalho necessário para produzi-lo. A teoria objetiva do valor-trabalho afirma, portanto, que o preço de um bem é função da quantidade de trabalho e dos meios de produção aplicados nas suas diversas etapas de produção.

Essa teoria afirma ser o trabalho aplicado em um bem o principal elemento determinante do seu valor. Num extremo dessa teoria se levou à ideia de que, se todo valor é gerado pelo trabalho e são os trabalhadores quem geravam toda a riqueza existente e os não trabalhadores, os patrões, que acabavam por ficar com grande parte da riqueza gerada, estavam na verdade usurpando da classe trabalhadora este valor, por meio de um processo conhecido como *mais-valia*.

Embora Karl Marx tenha sido o maior teórico do valor–trabalho, a teoria remonta a Adam Smith e David Ricardo. Carl Menger e Ludwig von Mises foram os que refutaram a teoria objetiva do valor-trabalho, afirmando que o valor seria atribuído conforme a utilidade do bem ou serviço, sugerindo assim uma abordagem subjetiva do valor. Como bem lembra Souza, se o valor dos bens depende apenas do grau de dificuldade para fabricá-lo, um barril de petróleo extraído a sete mil metros de profundidade, por exemplo, deveria valer mais do que um barril extraído em terra a poucos metros do solo.

1.3.2. Teoria subjetiva do valor–utilidade

A escola neoclássica marginalista, mais moderna, admite que o valor de um bem ou serviço é função de sua utilidade para o consumidor. O enfoque da teoria subjetiva do valor utilidade indica que o determinante do valor não está mais no campo da oferta ou do custo, mas da procura conforme a utilidade ou o valor subjetivo atribuído ao bem ou ao serviço desejado, que é função da preferência individual.

De acordo com essa teoria, o valor das mercadorias tem origem na satisfação que elas proporcionam aos consumidores, tornando sem sentido a distinção entre valor de uso e valor de troca, uma vez que os preços são determinados a partir de uma abordagem utilitarista do bem ou serviço.

1.3.3. Enfoque misto

As controvérsias entre concepções objetivas e subjetivas acabaram por conduzir a uma terceira abordagem, que é o enfoque misto entre o trabalho agregado e a utilidade de um bem ou serviço produzido. A teoria mista associa o valor de um bem não só à sua utilidade, como também ao custo do trabalho aplicado na sua produção. Nessa teoria, a procura (utilidade) e a oferta (custo de produção) são igualmente indispensáveis para a explicação do valor e, portanto, do preço de mercado de um bem. Isso significa que o caminho para se chegar aos determinantes do valor é constituído por duas trilhas, uma subjetiva da utilidade e outra objetiva do custo da produção do bem.

1.4. Distribuição de Renda

Uma questão fundamental na economia é saber como dividir o resultado do crescimento econômico entre as classes sociais sem reduzir a taxa de crescimento. A primeira parte da questão refere-se à distribuição da renda, e a segunda refere-se ao emprego crescente dos fatores de produção: capital, tecnologia, infraestrutura, disponibilidade, qualidade da mão de obra etc.

Questões que emergem do crescimento, como inflação e aumento da dívida pública (interna e externa), dificultam a manutenção do crescimento econômico durante um tempo mais longo. Por exemplo, se os salários dos trabalhadores crescem mais do que a produtividade deles, as taxas de retorno dos projetos reduzem, desestimulando novos empreendimentos. Por outro lado, se os salários são achatados haverá redução de consumo e queda dos investimentos em novos projetos no médio prazo.

O governo no Brasil, por exemplo, na intenção de distribuir equitativamente o bolo, vem aumentando os seus gastos indefinidamente desde a promulgação da constituição em 1988. Essa tendência, conforme o professor Nali de Souza, prejudica o investimento do setor privado e público. Ou seja, o governo retira dinheiro da economia mediante a emissão de títulos, que visam cobrir gastos sociais sempre em ascensão, o que reduz o montante que poderia ser destinado ao investimento em projetos do setor público e privado. Em outras palavras, os altos juros pagos pelo governo tornam mais rentável, para os investidores, comprarem títulos públicos do que investir em novos projetos.

1.4.1. Visão clássica e neoclássica

É fácil verificar que a renda não é distribuída equitativamente entre os agentes econômicos: o dono da terra (rentista), o capitalista (arrendatário) e o trabalhador. David Ricardo observou que, ao longo do tempo, a renda recebida pelos rentistas crescia mais do que os lucros dos capitalistas e os salários dos trabalhadores. Essa observação decorria fundamentalmente do crescimento demográfico e da proibição de importar alimentos. No limite, a produção agrícola era deslocada para terras mais distantes e de baixa qualidade. Com efeito, os preços dos alimentos subiam, assim como os salários, reduzindo a margem de lucro dos capitalistas. A solução indicada por Ricardo foi o controle demográfico e a livre importação de alimentos mais baratos do resto do mundo (pensamento liberal dos economistas clássicos).

Mais tarde, conforme o professor Nali de Souza, Stuart Mill demonstrou que as inovações tecnológicas aumentavam a produtividade, neutralizando em parte os rendimentos decrescentes da agricultura. Para os economistas clássicos, a situação econômica na margem do cultivo afetava o conjunto da economia. Esse raciocínio foi consolidado pelos economistas neoclássicos, ou marginalistas, para quem o valor é determinado pela utilidade dos bens e pelo grau de satisfação que eles proporcionam. Essa utilidade é também decrescente. Por exemplo, o primeiro gole de água, quando se está com sede, tem um valor maior que o último, momento em que a sede já foi saciada.

Para os neoclássicos, a produtividade de cada fator de produção (capital, trabalho, recursos naturais e tecnologia) diminui à proporção que o seu emprego aumenta no processo produtivo. Em uma situação de equilíbrio, a produtividade marginal de um fator de produção é igual ao seu preço. Para os marginalistas, um trabalhador receberá um salário igual à sua produtividade marginal. Este equilíbrio é transmitido para toda a economia, desde que em condições de concorrência perfeita. Quando a economia cresce, portanto, ocorre uma distribuição espontânea da renda extra para os proprietários dos fatores de produção: capital (juros), trabalho (salários), recursos naturais (aluguéis) e tecnologia (*royalties* ou direitos).

1.4.2. Visão marxista

Já no marxismo, a distribuição de renda se dá pelo conflito entre as diferentes classes sociais, fundamentalmente entre o capitalista e o trabalhador. Este último produz um excedente que corresponde, na visão de Karl Marx, a uma mais-valia que é apropriada pelo capitalista. A mais-valia era evidenciada pelo fato de que o trabalhador não conseguia comprar o produto confeccionado pelo salário que recebia. No marxismo, a participação de cada classe na divisão do bem ou serviço não depende das produtividades marginais.

Como se sabe, tanto os empresários como os trabalhadores se organizam em sindicatos. Por ocasião dos dissídios coletivos, cada associação (patronal e do trabalhador) joga com seu poder de barganha e, em caso de impasse, os trabalhadores recorrem a greves, em geral a última cartada desse jogo. Em caso de altas taxas de desemprego, os sindicatos dos trabalhadores se enfraquecem e os acordos são fechados em condições mais favoráveis para os empresários. Por outro lado, a baixa taxa de desemprego reduz o poder de barganha dos empresários. Em geral, os empresários dispõem de mais oportunidades para elevar o poder de barganha, seja com compra de máquinas modernas, *lobby* com o governo, aumento de capital etc. Com efeito, a tendência é o capital se acumular em um ritmo maior que a renda dos trabalhadores. Segundo Marx, essa tendência expli-

caria as crises periódicas do sistema capitalista, que acabaria por conduzir a sociedade ao socialismo, mas não sem os conflitos que emergem de uma revolução.

1.4.3. Índice de Gini

O desemprego e a distribuição de renda estão intimamente associados. A renda nacional se concentra, por exemplo, quando o país cresce com aumento da taxa de desemprego. Entre os fatores que geram desemprego estão:

- Redução do crescimento econômico provocado por crises econômicas ou humanitárias.
- Abertura econômica acelerada, que aumenta as importações de produtos agrícolas e manufaturados, reduzindo a produção interna e o emprego.
- Modernização tecnológica da indústria e do setor de serviços.
- Nível baixo de capacitação da mão de obra etc.

O grau de concentração da renda de uma economia é mensurado pelo coeficiente de Gini (1912). A curva que define esse coeficiente é denominada curva de Lorenz, onde o eixo horizontal representa a percentagem de pessoas e o eixo vertical a percentagem da renda (ver Figura 1.1).

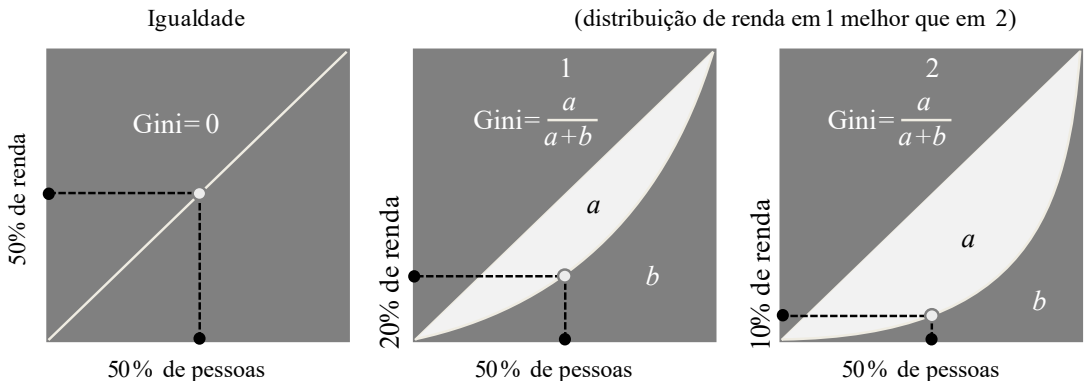


Figura 1.1 – Coeficiente de Gini (curva de Lorenz).

Esse coeficiente consiste em um número entre 0 e 1, onde 0 corresponde à completa igualdade (toda a população recebe a mesma renda) e 1 corresponde à completa desigualdade (uma pessoa recebe todo o rendimento e as demais nada recebem).

1.4.4. Índice de Desenvolvimento Humano

Talvez o melhor indicador para avaliar se as escolhas dos agentes econômicos de um país foram acertadas ao longo do tempo seja o IDH (Índice de Desenvolvimento Humano). Esse índice foi criado em 1990 pelo economista paquistanês Mahbub em parceria com Amartya Sen. Ambos se conheceram em Cambridge, e desde 1993, a ONU, por meio do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), divulga esse indicador anualmente englobando praticamente todos os países do mundo, usando-o como medida comparativa ao analisar os países-membros. É por meio desse indicador que a ONU estabelece estratégias de intervenção em países que carecem de ajuda humanitária. Os três critérios considerados no IDH são saúde, educação e renda:

- Saúde (IDH_S) – avalia a expectativa média de vida dos cidadãos. Esse critério é impactado pela taxa de natalidade, índice de violência, mortalidade infantil, parcela da população que tem acesso a vacinas, medicamentos etc.

- Educação (IDH_E) – avalia a média de anos escolares que uma pessoa tem. É um critério impactado pela taxa de alfabetização, evasão escolar, taxa de matrícula e de repetência.
- Renda (IDH_R) – nesse indicador, a qualidade de vida é avaliada pelo PIB per capita.

Os critérios têm pesos iguais na composição do índice. Assim, cada critério é medido em separado, e depois é computado o IDH final. Por exemplo, o IDH_S é calculado com a seguinte expressão:

$$\mathrm{IDH_S} = \frac{\mathrm{EV} - 25}{85 - 25} \tag{1.1}$$

onde EV é a expectativa de vida em anos, sendo 25 e 85 as idades mínima e máxima, respectivamente. O IDH_E é determinado pela seguinte equação:

$$\mathrm{IDH_E} = \frac{2}{3}\mathrm{A} + \frac{1}{3}\mathrm{M} \tag{1.2}$$

onde A é a taxa de alfabetização (percentagem de pessoas com 15 anos ou mais alfabetizadas) e M é a taxa de matrícula (percentagem de pessoas entre 7 e 24 anos que estão matriculadas nas escolas, independentemente do nível de ensino). Já o IDH_R é estimado com a seguinte relação:

$$\mathrm{IDH_R} = \frac{\log \mathrm{PIB_{PC}} - \log 100}{\log 40.000 - \log 100} \tag{1.3}$$

onde PIB_{PC} é o PIB per capita em dólares, sendo que o mínimo e o máximo hoje, definidos pelo PNUD, são 100 e 40mil dólares/habitante, respectivamente.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 1.1 – Em 2020, o IDH do Brasil e dos EUA era de 0,754 e 0,926, respectivamente. Considerando que o PIB brasileiro cresça a uma taxa de 5% *a.a.*, e que os demais indicadores do IDH de ambos os países se mantenham congelados, quantos anos seriam necessários para um brasileiro exibir o mesmo IDH de um americano?

Solução

Considere que a nova renda per capita para alcançar uma diferença no IDH de 0,172 pontos (0,926 – 0,754) seja multiplicada por um fator a. Logo,

$$\mathrm{IDH}_{novo} = \frac{1}{3}\mathrm{IDH_S} + \frac{1}{3}\mathrm{IDH_E} + \frac{1}{3}\left(\frac{\log a\mathrm{PIB_{PC}} - \log 100}{\log 40.000 - \log 100}\right) \tag{1.4}$$

ou

$$\mathrm{IDH}_{novo} = \frac{1}{3}\mathrm{IDH_S} + \frac{1}{3}\mathrm{IDH_E} + \frac{1}{3}\left(\frac{\log \mathrm{PIB_{PC}} - \log 100}{\log 40.000 - \log 100} + \frac{\log a}{\log 40.000 - \log 100}\right) \tag{1.5}$$

onde PIB_{PC} é o PIB perca capita de 2020. Assim, o incremento IDH_{novo} - IDH_{2020} resulta

$$\left(\frac{\log a}{\log 40.000 - \log 100}\right) = 3{\times}0{,}172 \tag{1.6}$$

ou

$$a = \left(\frac{40.000}{100}\right)^{3\times 0{,}172} \approx 22 \tag{1.7}$$

Se o crescimento é de 5% ao ano, logo

$$1{,}05^n = 22 \rightarrow n \log 1{,}05 = \log 22 \rightarrow n \approx 63 \text{ anos} \tag{1.8}$$

▪▪▪▪▪▪

1.5. Princípios Elementares da Economia

São dez os princípios elementares da economia que norteiam tanto o comportamento das pessoas frente às decisões como a interação entre elas, e juntos moldam os pilares da economia moderna na vida real. De acordo com Mankiw (2020), os dez princípios são:

1. *As pessoas enfrentam tradeoffs*.

   Em uma sociedade, as pessoas se deparam com escolhas conflitantes a todo instante. Um dos *tradeoffs* clássicos da economia está entre a *eficiência* e a *igualdade*[17]. Enquanto eficiente, a sociedade obtém o máximo que seus recursos naturais podem oferecer, e age com igualdade quando os benefícios obtidos são distribuídos de forma igualitária entre seus membros. Quando o governo atua em uma política social, em geral, esses dois objetivos entram em conflito.

2. *O custo de algo é aquilo de que você desiste para obtê-lo*.

   É o que se denomina de *custo de oportunidade*. O economista austríaco Friedrich von Wieser foi o primeiro a falar sobre o conceito de custo de oportunidade, o qual aplicado a um fator de produção representa a renda líquida gerada em seu melhor uso alternativo. Em outras palavras, o custo de oportunidade é o custo de algo em termos de uma oportunidade renunciada. Por exemplo, no caso de uma operadora de petróleo optar por aplicar uma parcela dos seus investimentos em energia renovável, há de se avaliar o custo de oportunidade, sobretudo se a operadora for detentora de grandes reservas de hidrocarbonetos, que em parte será renunciada em prol da energia renovável.

3. *As pessoas racionais pensam na margem*.

   As pessoas racionais, de um modo geral, fazem o melhor para alcançar seus objetivos. Até mesmo um jovem que se dedica ao monastério procura desempenhar suas habilidades de modo ímpar para alcançar o que deseja. As pessoas racionais executam uma ação, se e somente se, o benefício marginal desta ação for maior que o custo marginal. Um vinicultor, por exemplo, só investe em mais uma parreira se o benefício oriundo da colheita da nova parreira superar o custo de investimento.

4. *As pessoas reagem a incentivos*.

   Um incentivo induz uma ação. Por exemplo, quando o preço da carne bovina se eleva, as pessoas tendem a consumir menos carne bovina ou substituí-la por frango ou carne suína, em geral de menor custo. Os governos utilizam esse princípio quando, por exemplo, reduzem o imposto de carros populares, induzindo as pessoas a comprarem mais carros ou, quando aumentam o imposto sobre a gasolina, induzindo as pessoas a usarem mais o transporte coletivo.

5. *O comércio pode ser bom para todos*.

   De modo geral os países se beneficiam da possibilidade de exercer o comércio entre si. Embora seja verdade que o Japão desbancou em parte a indústria automobilística americana nas décadas de 1980 e 1990, é fato também que os americanos não estariam em melhores condições se optassem pelo simples isolamento, não comercializando suas tecnologias com os japoneses.

6. *Os mercados são, geralmente, uma boa maneira de organizar a atividade econômica*.

   O colapso do comunismo pode ter sido o que de mais importante aconteceu nos últimos 50 anos em matéria de economia. Esta, quando ditada por um planejador central, que decide quais bens e serviços produzir, quem e quanto cada um deve consumir, não logrou êxito. A maioria dos países que op-

[17] Hoje fala-se muito o termo *equidade* em vez de *igualdade*. Enquanto a igualdade é baseada no princípio de que todos devem ser regidos pelas mesmas regras e devem ter os mesmos direitos e deveres, a equidade reconhece que não somos todos iguais e que é preciso ajustar esse desequilíbrio.

tou por economias planejadas abandonou o dogma de que só o governo pode organizar a economia e está hoje tentando estabelecer uma economia de mercado. Nesse modelo, as decisões do governo são substituídas pelas decisões de milhões de empresas e famílias.

7. *Os governos podem melhorar os resultados do mercado*.

   A economia de mercado precisa das instituições para garantir o direito de propriedade, de tal modo que as pessoas possam decidir e controlar os recursos escassos. Só há dois motivos para a intervenção do governo na economia: promover a eficiência e a igualdade. As políticas públicas de imposto de renda e de seguridade social são exemplos de intervenções do governo que têm por objetivo uma distribuição mais igualitária do bolo econômico. Ademais, nem sempre a "mão invisível" aloca os recursos de forma eficiente de modo a aumentar o bolo econômico, pois não há mercado perfeito. As externalidades[18] são exemplos claros de imperfeição do mercado. Outro exemplo é o poder de carteis, como a OPEP, de influenciar decisivamente os preços das *commodities* de petróleo.

8. *O padrão de vida de um país depende da sua capacidade de produzir bens e serviços*.

   É a taxa de crescimento da produtividade de um país que determina a taxa de crescimento de sua renda média. Em geral, as variações do padrão de vida entre os países se devem às diferenças de produtividade entre eles, ou seja, o quanto de bens e serviços produzidos por unidade de insumo, seja de mão de obra, aluguel ou outro fator de produção.

9. *Os preços sobem quando o governo emite moeda em excesso*.

   Entre as várias causas de uma taxa alta de inflação de um país, a emissão de moeda por parte do governo é a mais comum. Quando um governo emite grandes quantidades de moeda, o valor dela diminui.

10. *A sociedade enfrenta um tradeoff de curto prazo entre inflação e desemprego*.

    Em períodos de um ou dois anos, muitas políticas públicas empurram a inflação e o desemprego em direções opostas. Esse é outro *tradeoff* clássico da economia. Se o governo aumenta a quantidade de moeda na economia, estimula o nível geral de consumo e, portanto, eleva a taxa de inflação. Por outro lado, as empresas contratam mais empregados para atender esse aumento de consumo, reduzindo assim a taxa de desemprego.

Cabe aqui detalhar o princípio 5, que afirma que *o comércio pode ser bom para todos*. Para compreender esse princípio, parafraseando Mankiw (2020), admita que uma pecuarista e um agricultor de uma cidade da Argentina produzam carne e batata, afinal nenhum deles dispensa um churrasco acompanhado de *papas fritas*.

Em função da especialização de cada um, é esperado que a produtividade deles seja diferente para cada produto. A Tabela 1.3 a seguir indica uma possibilidade de produção para o exemplo em questão.

Tabela 1.3 – Produção de carne e batata – pecuarista e agricultor (vantagem absoluta)

Produtor	Minutos necessários para produzir 1 kg		Quantidades produzidas em 8 horas	
	Carne	Batata	Carne	Batata
Pecuarista	20 min/kg	10 min/kg	24 kg	48 kg
Agricultor	60 min/kg	15 min/kg	8 kg	32 kg

Note que a pecuarista é mais eficiente do que o agricultor tanto para produzir carne como batata. Mais precisamente, o tempo da pecuarista para produzir 1 kg de carne ou um 1 kg de batata é menor do que o tem-

[18] Impacto de ações de uma pessoa, de empresas ou de instituição sobre o bem-estar de outros, em geral próximos. A poluição é um exemplo clássico.

po que o agricultor leva para produzir 1 kg de quaisquer um deles. Ou seja, a pecuarista tem uma *vantagem absoluta* sobre o agricultor, que é aquela habilidade para produzir um bem empregando menor quantidade de insumos que outro produtor, no caso em questão o tempo. Pode-se imaginar, em uma primeira impressão, que não haveria motivo para a pecuarista comercializar com o agricultor, afinal ela é mais eficiente na produção de qualquer um dos produtos.

Para provar que essa primeira impressão é equivocada, suponha que 1 kg de carne tenha o mesmo valor que 3 kg de batata, e que cada produtor dedique quatro horas de trabalho para cada produto. Assim, durante as oito horas do dia, caso não haja comércio, a produção e o consumo de cada um seriam os indicados na Figura 1.2 a seguir:

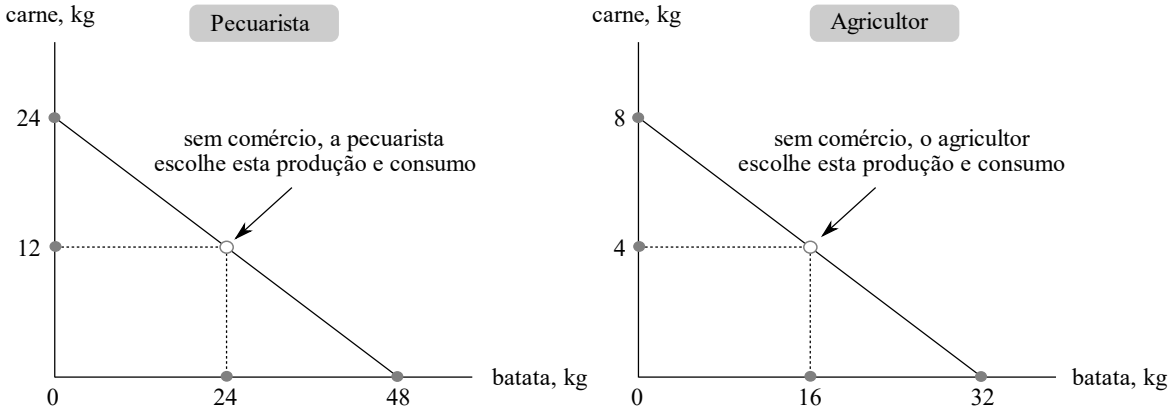


Figura 1.2 – Produção e consumo da pecuarista e do agricultor sem exercer o comércio.

Agora, considere que a pecuarista faça a seguinte proposta para o agricultor: "de acordo com os meus cálculos, se você se dedicar somente ao cultivo de batatas produzirá 32 kg delas. Se me der 15 kg de batatas, darei em troca 5 kg de carne''. Caberia então a pergunta: é uma boa proposta para o agricultou?

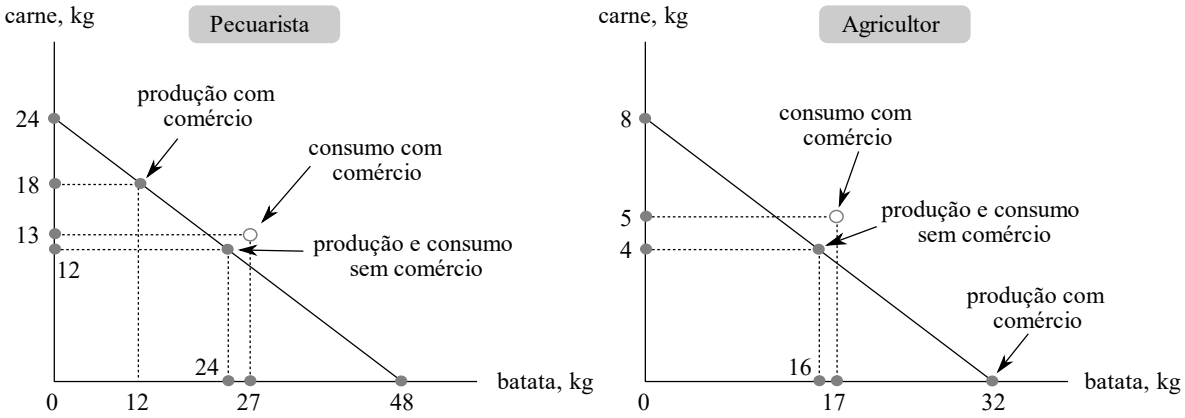


Figura 1.3 – Produção e consumo da pecuarista e do agricultor com e sem comércio.

Note que se o agricultor dedicar oito horas do dia para produzir apenas batatas, o resultado seria 32 kg ao final do dia. Ao trocar 15 kg de batatas por 5 kg de carne, ficará com 17 kg de batatas e 5 kg de carne. Por outro lado, a pecuarista poderá dedicar seis horas na produção de carne, resultando 18 kg, e nas duas horas restantes do dia se dedicar à produção de batatas, produzindo 12 kg. Ao trocar 5 kg de carne por 15 kg de batata, ficará com 13 kg de carne e 27 kg de batatas. Veja, na Figura 1.3, que a comercialização fez o consumo de ambos aumentar.

Como se vê, os dois obtiveram vantagens com a comercialização. E isso se dá pelo fato de que há *vantagens comparativas*, tanto para o agricultor como para a pecuarista, que é aquela habilidade para produzir um bem com menor custo de oportunidade que outro produtor. Veja, na Tabela 1.4, que o custo de oportunidade para a pecuarista produzir batata é maior que o do agricultor, e o custo de oportunidade para o agricultor produzir carne é maior que o da pecuarista.

Tabela 1.4 – Custo de oportunidade – pecuarista e agricultor (vantagem comparativa)

Produtor	Custo de oportunidade	
	1 kg de carne	1 kg de batata
Pecuarista	2 kg de batatas	½ kg de carne
Agricultor	4 kg de batatas	¼ kg de carne

Pode-se afirmar que um ato de comércio não é apenas a troca do bem em si, mas também a troca de eficiências, o que faz com que cada parte tenha um "ganho extra" ao comercializar. Esse ganho é decorrente da especialização, uma vez que ninguém é capaz de produzir tudo com a mesma eficiência, daí a afirmação de que o comércio pode ser bom para todos.

1.5.1. Lei da demanda – consumidor

Pode-se afirmar que a procura ou a demanda Q_D por um produto ou serviço é função do seu nível de preço p, de tal modo que quanto mais baixos os preços, mais altas as quantidades demandadas e vice-versa. Ou ainda, se uma quantidade maior de um produto é ofertada no mercado, esse tende a ser vendido a preço mais baixo. O preço é, portanto, função da quantidade demandada, que pode ser representado pela expressão

$$p = f(Q_D) \tag{1.9}$$

e pela curva de demanda indicada na Figura 1.4 a seguir.

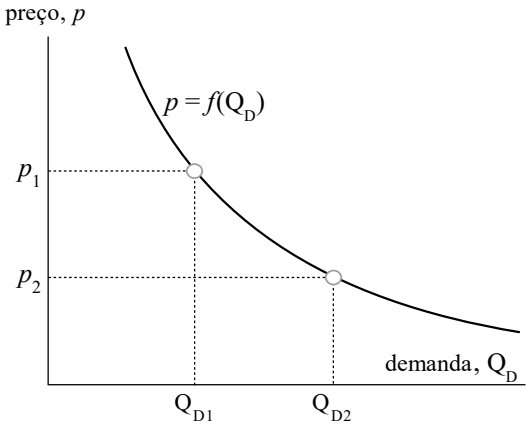


Figura 1.4 – Curva de demanda.

Quando os preços aumentam, isso significa que a renda dos consumidores é reduzida em termos relativos, ou seja, perde seu poder aquisitivo, o que força a redução do consumo, ou ainda, quando o preço de um produto sobe, a procura por outro similar de menor preço aumenta.

1.5.2. Lei da oferta – produtor

A oferta de determinado produto pode ser definida como as várias quantidades que os produtores estarão dispostos e aptos a oferecer no mercado em determinado período e em função dos vários níveis de preços possíveis. De modo similar ao caso anterior, o preço é função das quantidades ofertadas e pode ser representado pela expressão

$$p = f(\mathrm{Q_O}) \tag{1.10}$$

e pela curva da oferta indicada na Figura 1.5 a seguir:

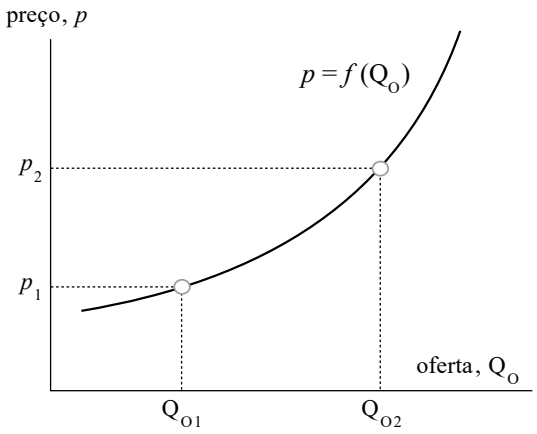


Figura 1.5 – Curva de oferta.

1.5.3. O preço de equilíbrio

Admitindo-se a hipótese de que o mercado esteja submetido a uma situação de concorrência perfeita, o preço de equilíbrio E é determinado pela livre manifestação das forças da oferta e da procura (ver Figura 1.6)

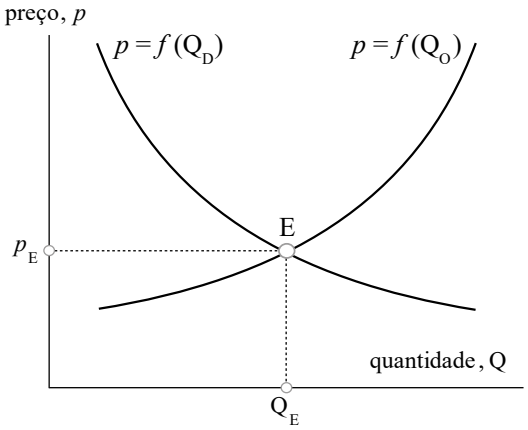


Figura 1.6 – Ponto de equilíbrio entre oferta e procura.

Existe um único preço que harmoniza os interesses conflitantes dos produtores e dos consumidores. Em outras palavras, para qualquer preço acima do preço de equilíbrio, as quantidades ofertadas serão maiores que as quantidades procuradas $\mathrm{Q_O} > \mathrm{Q_D}$, pressionando a queda do preço. Nessa situação observa-se um *crescimento nos estoques* de produtos.

Para qualquer preço abaixo do ponto de equilíbrio, as quantidades procuradas são maiores que as quantidades ofertadas $\mathrm{Q_O} < \mathrm{Q_D}$, observando-se então uma tendência de elevação do preço. Nesta situação existe

uma *demanda reprimida*, o que pode motivar a cobrança de ágio ou a espera indesejável para aquisição de mercadorias controladas (ver Figura 1.7).

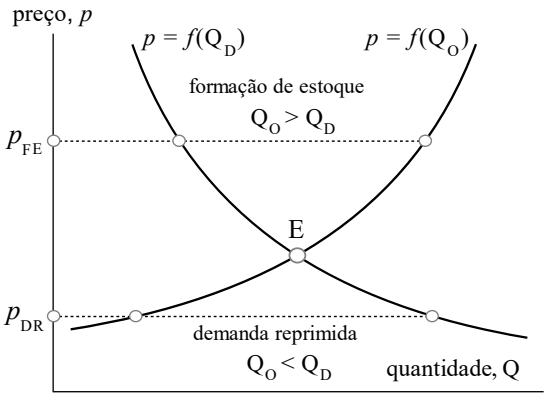


Figura 1.7 – Demanda reprimida e formação de estoque.

O consumidor sempre otimizará os seus recursos de forma a obter o máximo de satisfação. As empresas, por sua vez, procurarão maximizar os seus lucros, considerando os fatores de produção. Já os proprietários dos fatores de produção procurarão maximizar suas rendas.

1.5.4. Deslocamento da curva da demanda

É importante distinguir o termo *variação da procura* de *variação das quantidades procuradas*. Uma variação da procura corresponde a um deslocamento de toda a curva da procura para a direita ou para a esquerda. Isso significa que diante de um preço alternativo, os consumidores desejarão adquirir maior ou menor número de unidades do que anteriormente, motivando, então, o deslocamento da curva. Uma variação de quantidades procuradas corresponde a um deslocamento de um ponto ao longo da curva da demanda devido a uma correspondente variação no preço do produto. Os fatores determinantes da procura são constituídos por um conjunto de elementos que podem alterar para mais ou para menos a posição da curva, deslocando-a positivamente para a direita ou negativamente para a esquerda, conforme mostra a Figura 1.8 a seguir.

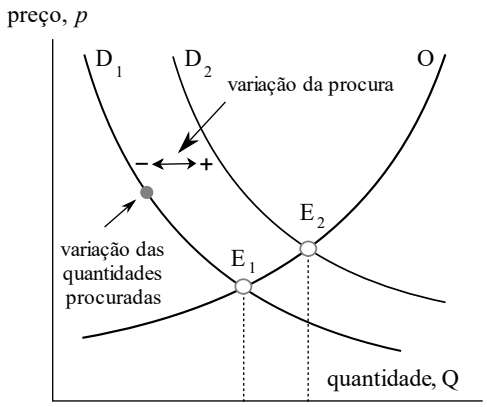


Figura 1.8 – Variação das quantidades procuradas e variação da procura.

Os principais fatores para o deslocamento da curva da demanda são:

- Variação do poder aquisitivo (aumento ou diminuição na renda).
- Atitudes preferenciais dos consumidores (campanhas publicitárias).
- Variação dos preços dos similares (substitutos).

- Variação do mercado consumidor (aumento ou diminuição da população).
- Expectativa sobre a evolução da oferta (escassez ou abundância).

Estes fatores definem novas curvas de procura, diferenciando claramente variação da procura (deslocamento da curva) de variação de quantidades procuradas, que é o deslocamento de um ponto sobre uma determinada curva.

1.5.5. Deslocamento da curva da oferta

Da mesma forma, deve-se distinguir *variação da oferta* de *variação das quantidades ofertadas*. Uma variação de oferta corresponde a um deslocamento de toda a curva de oferta para a direita ou para a esquerda. Uma variação das quantidades ofertadas corresponde a um deslocamento de um ponto ao longo da curva de oferta devido a uma variação correspondente no preço (ver Figura 1.9).

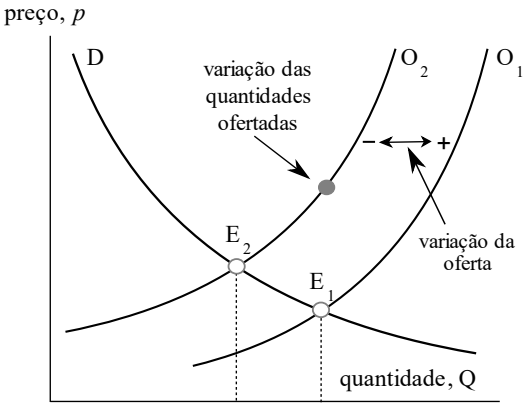


Figura 1.9 – Variação das quantidades ofertadas e variação da oferta.

Os principais fatores para o deslocamento da curva de oferta são:

- Variação do número de empresas produtoras (concorrentes).
- Disponibilidade de recursos de produção.
- Desenvolvimento tecnológico (produtividade).
- Expectativa sobre a evolução da procura.

A entrada no mercado de novos produtores, por exemplo, desloca para a direita a curva de oferta, reduzindo o preço de equilíbrio. Já a quebra da safra faz com que a curva de oferta se desloque para a esquerda, provocando uma elevação do preço de equilíbrio devido a menor quantidade ofertada.

Existem dois tipos de bens que são exceções à lei da demanda e oferta: bens de baixo valor ou "bens de Giffen'', e os bens de consumo que conferem prestígio social, ou "bens de Veblen''. O aumento de preço desses bens pode causar, também, aumento em seu consumo. No primeiro caso, antes do aumento do preço dos bens de Giffen, os consumidores de baixa renda ainda dispõem de recursos para compra de outros bens mais caros. Com o aumento destes, a disposição para comprá-los é reduzida e os consumidores, com efeito, priorizarão ainda mais a compra de bens de Giffen. No segundo caso, os consumidores de produtos de luxo julgam que a aquisição daqueles bens lhes confere prestígio social. Com o aumento dos bens de Veblen, tais consumidores tenderão a consumir mais ainda, julgando que o prestígio conferido é ainda maior.

1.5.6. Elasticidade-preço da demanda

De acordo a com a lei da demanda, um aumento de preço pode resultar em redução de vendas. Quando a queda da procura é pequena, a empresa pode não perceber a diferença no faturamento, pois é recompensada pelo preço mais elevado de seus produtos ou serviços. No entanto, a queda na procura pode ser representativa, causando redução do faturamento.

O efeito sobre a venda de um determinado bem ou serviço depende de como se comporta a curva da demanda diante de uma alteração no preço. A Figura 1.10 ilustra dois comportamentos da demanda diante de mudanças no preço de venda.

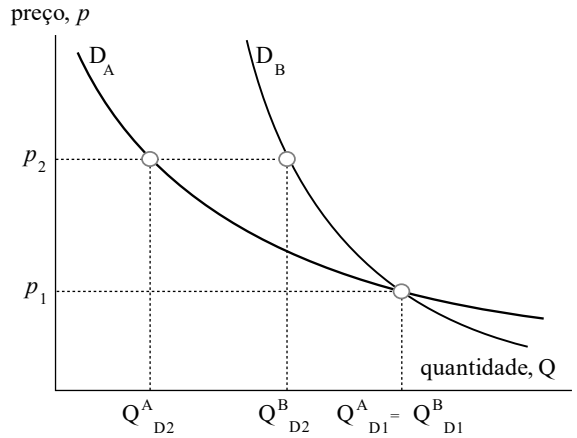


Figura 1.10 – Elasticidade-preço da demanda.

Suponha que o preço praticado atual seja p_1 e que a empresa reajuste o preço de venda para um valor p_2, seja em função de aumento nos custos de produção ou por estratégia. Se o comportamento da demanda for do tipo representado pela curva D_B, a queda no volume de vendas não é tão significativa, podendo até o lucro aumentar devido à baixa sensibilidade da demanda em relação às alterações do preço. No entanto, se a demanda for do tipo D_A, a queda no volume de vendas devido ao aumento do preço de p_1 para p_2 é mais significativa, podendo afetar o lucro operacional, ou até mesmo resultar em prejuízo.

O indicador para avaliar essa sensibilidade é chamado de elasticidade-preço da demanda, denotado por η e é definido como a relação entre a variação percentual do volume de venda devido à variação percentual do preço, ou seja:

$$\eta = -\frac{\Delta Q_D/Q_D}{\Delta p/p} = -\frac{(Q_{D2} - Q_{D1})/Q_{D1}}{(p_2 - p_1)/p_1} \tag{1.11}$$

A elasticidade-preço η pode ser maior que 1, igual ou menor que 1. Assim,

- Se $\eta < 1$,diz-se que a demanda é inelástica em relação ao preço.
- Se $\eta > 1$, a demanda é elástica.
- Se $\eta = 1$, a demanda é indiferente ao preço.

A Eq. (1.11) pode vir acompanhada ou não do sinal negativo. Para o caso da elasticidade-preço da demanda, o sinal negativo se faz necessário para reportar um valor positivo para o coeficiente. Observe que quando o preço aumenta, a demanda diminui. Esse comportamento pode ser diferente para outros fatores determinantes da demanda, como a renda, por exemplo.

O coeficiente da elasticidade-preço pode ser também em relação à oferta. A Figura 1.11 a seguir resume as curvas características para a elasticidade-preço da demanda e da oferta.

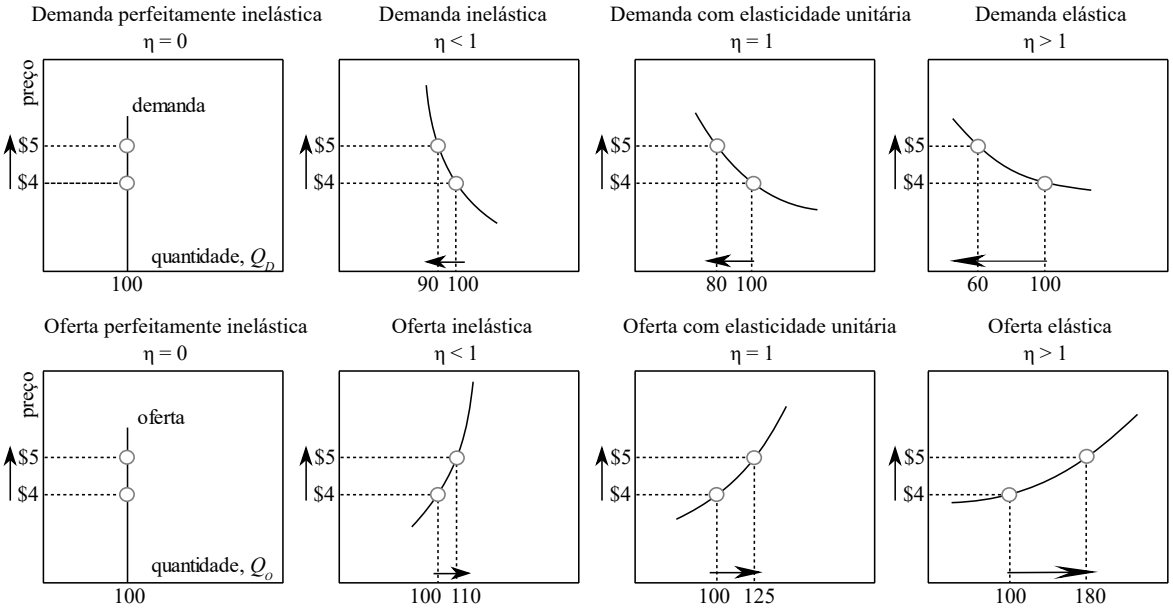


Figura 1.11 – Tipos de curvas de elasticidade-preço da demanda e da oferta.

1.6. Equilíbrio de Mercado

A condição de equilíbrio de mercado se dá quando o mercado é ditado por uma condição de concorrência perfeita. Em um mercado de concorrência perfeita existe um número suficiente de consumidores e produtores de tal modo que nenhum deles é capaz de afetar o preço de mercado. Essa e outras condições definem o que se denomina na economia de *mercado perfeito*. Dentre elas as mais importantes são:

- Disponibilidade de informação sobre o mercado para todos os participantes.
- Nenhum participante tem poder suficiente para determinar o preço.
- Nenhuma barreira para entrada ou saída dos participantes.
- Igual acesso aos fatores de produção: pessoas, infraestrutura, tecnologias etc.

A teoria matemática do mercado perfeito é chamada de *teoria geral de equilíbrio*. Sob as condições de competição perfeita é possível demonstrar que o mercado alcança um equilíbrio no qual a oferta de cada produto ou serviço, incluindo o trabalho, atende suas demandas em um determinado nível de preço, incluindo os salários.

O economista Adam Smith cunhou um termo apropriado para descrever a tendência do mercado em garantir alocações eficientes dos recursos escassos, chamando-o de "mão invisível" do mercado, uma vez que, em uma economia de mercado sob condições ideais os interesses dos produtores e consumidores, mesmo que contraditórios, tendem a um ponto de equilibro satisfatório para ambos. No setor agrícola, por exemplo, existem milhares de fazendeiros produtores e milhares de compradores, de tal modo que nenhum deles tem o poder para afetar o preço estabelecido pelo mercado. Trata-se, portanto, de um mercado quase perfeito. Por outro lado, as empresas de petróleo atuam em mercados de baixa competitividade, uma vez que são poucas as empresas em uma determinada região e existem cartéis, como a OPEP, que influenciam o preço da *commodity*.

De modo preciso, pode-se dizer que o mercado perfeito conforme definido pela teoria geral de equilíbrio é inexistente, o que implica que a presença do Estado é necessária para corrigir desvios ou imperfeições quanto

às condições mínimas para que o equilíbrio entre produtores e consumidores seja estabelecido. Uma máxima do economista Joseph Stiglitz ajuda a compreender este princípio: "certas intervenções governamentais podem melhorar uma determinada situação, como por exemplo: tratar de uma reconhecida imperfeição grave de mercado ou serem desenhadas de forma eficiente para que seus benefícios superem seus custos". Cabe notar que, se o objetivo é apenas estabelecer o equilíbrio de mercado, o Estado pode fazê-lo a um custo mínimo, utilizando-se do poder que lhe é conferido pela sociedade. Em alguns países, por exemplo, o governo opta por uma intervenção mínima ou o faz por meio de agências reguladoras com baixo custo para a sociedade.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 1.2 – Considere que o consumo de gasolina de um estudante de engenharia de petróleo seja de 100 litros por mês ao custo de $280. Caso o preço do litro do combustível suba 8%, esse estudante é incentivado a reduzir seu consumo para 80 litros. Qual a elasticidade-preço da demanda deste estudante?

Solução

Assumindo os valores na Eq. (1.11) resulta:

$$\eta = -\frac{(80-100)/100}{(1{,}08\times 280-280)/280} = 2{,}5 \tag{1.12}$$

Nesse caso, para cada 1% de aumento do preço do combustível, o estudante é incentivado a reduzir em 2,5% o seu consumo. Esse é o sentido prático da elasticidade-preço da demanda.

▪▪▪▪▪▪

É fácil perceber que este coeficiente depende do ponto onde é avaliado. Para contornar este problema, adota-se o ponto médio para o cálculo. Assim, a Eq. (1.11) é reescrita como:

$$\eta = -\frac{(\mathrm{Q_{D2}}-\mathrm{Q_{D1}})/0{,}5(\mathrm{Q_{D2}}+\mathrm{Q_{D1}})}{(p_2-p_1)/0{,}5(p_2-p_1)} \tag{1.13}$$

1.6.1. Funções da demanda e oferta

Além do preço, outros fatores podem influenciar a demanda de um produto ou serviço. A Eq. (1.14) a seguir, por exemplo, indica uma função mais completa para a demanda:

$$\mathrm{Q_D} = a_1 p + a_2 p_c + a_3 p_s + a_4 \mathrm{Y} + a_5 \mathrm{EPF} + a_6 \mathrm{POP} + a_7 \mathrm{PUB} + a_8 \mathrm{FE} \tag{1.14}$$

onde os índices a_i são ponderadores dos seguintes fatores determinantes: p (preço do produto), p_c (preço dos produtos complementares), p_s (preço dos produtos substitutos), Y (renda dos consumidores), EPF (expectativa sobre o preço futuro), POP (dimensão do mercado, população), PUB (gastos com publicidade), FE (fatores específicos de cada produto, como a venda de combustíveis em países do hemisfério norte em época de baixas temperaturas).

Já a função da oferta também depende, além do preço, de outros fatores. A Eq. (1.15) a seguir pode ser útil para determinar a quantidade ofertada de um produto:

$$\mathrm{Q_O} = b_1 p + b_2 p_c + b_3 p_s + b_4 p_i + b_5 \mathrm{T} \tag{1.15}$$

onde os índices b_i são os ponderadores, e os fatores determinantes, além dos já definidos na Eq. (1.14), são: p_i (preço dos insumos utilizados na produção) e T (inovações tecnológicas).

1.6.2. Excedente do consumidor e do produtor

Define-se excedente do consumidor a quantia que um consumidor está disposto a pagar por um produto menos o que realmente paga por ele. Já o excedente do produtor é a quantia que o produtor recebe por um produto menos o seu custo de produção. Para entender o primeiro conceito, parafraseando Mankiw (2020), imagine que você seja proprietário de uma camisa da seleção brasileira da Copa de 1970 e queira vendê-la em um leilão. Suponha que seus colegas Flávia, Rinaldo, Lívia e Bartô tenham disposição para comprar, mas não a qualquer preço, e sim a um preço conforme indicado na Tabela 1.5 a seguir.

Tabela 1.5 – Disposição de quatro compradores por uma camisa da seleção brasileira da Copa de 1970.

Comprador	Disposição para pagar
Flávia	$20 mil
Rinaldo	$15 mil
Lívia	$10 mil
Bartô	$5 mil

Imagine que o leilão comece com lances de $1 mil. Como todos estão dispostos a pagar mais do que isso, o preço sobe rapidamente. Os lances terminam quando Flávia oferece um delta acima de $15 mil. Nesse ponto, Rinaldo, Lívia e Bartô se retiram do leilão. Como Flávia tinha disposição para pagar $20 mil, mas venceu o leilão com $15 mil, diz-se que Flávia tem um excedente de $5 mil. Ou seja, o excedente do consumidor mede o benefício que o comprador obtém por sua participação no mercado (ver lado esquerdo da Figura 1.12).

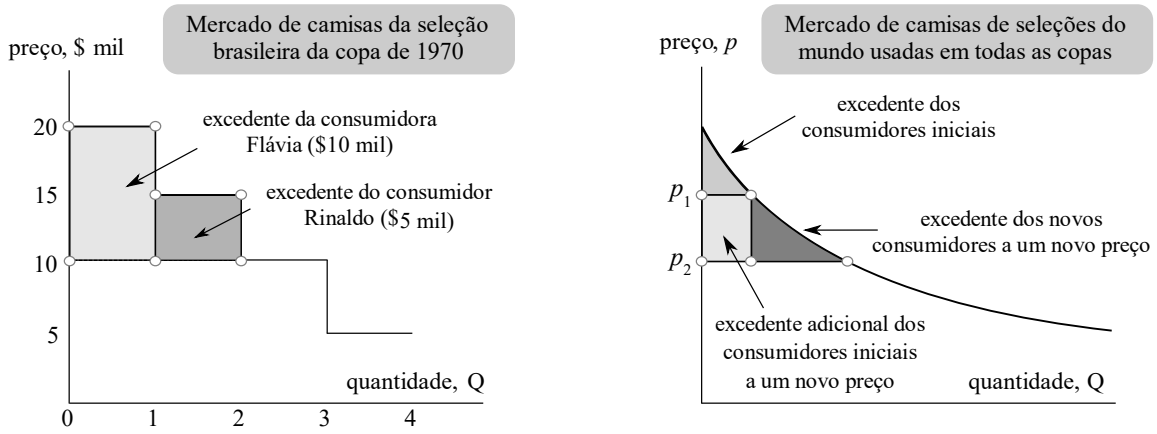


Figura 1.12 – Excedente do consumidor (mercado restrito e amplo).

Agora suponha um novo leilão um pouco diferente. Você dispõe de duas camisas da seleção brasileira da Copa de 1970 e deseja leiloar as duas pelo mesmo preço cada, e nenhum de seus colegas está interessado em adquirir mais do que uma camisa nesse leilão. Nesse caso, os lances param quando Flávia e Rinaldo oferecem um delta acima de $10 mil. A esse preço, o excedente total de Flávia é de $10 mil e o de Rinaldo é de $5 mil (ver lado esquerdo da Figura 1.12). Se o mesmo raciocínio é ampliado para um mercado de camisas de seleções do mundo usadas em todas as Copas, resulta o gráfico do lado direito da Figura 1.12.

Imagine agora que você seja proprietário de uma Lamborghini de 1964 e quer pintá-la. Você consulta no Google e encontra quatro profissionais de pintura de carros antigos: Raja, Miguel, Júlio e Rita. Ao consultar a

tabela de serviços dos profissionais, o preço de pintura de uma Lamborghini, que é igual ao custo do material mais a remuneração de cada pintor, difere conforme indicado na Tabela 1.6 a seguir.

Tabela 1.6 – Custo dos quatro possíveis vendedores

Vendedor	Custo
Raja	$10 mil
Rita	$8 mil
Júlio	$6 mil
Miguel	$4 mil

Naturalmente, cada pintor gostaria de vender o serviço por um preço superior ao custo, e se recusaria a vender por um preço menor. Quando você pede um orçamento aos pintores, o preço começa a cair, uma vez que eles competem entre si para vender o serviço. Suponha que Miguel informe que o seu orçamento fica um delta abaixo de $6 mil. Os demais não aceitariam esse valor, mas Miguel ficaria satisfeito em fazer o serviço, já que o benefício seria de $2 mil.

Agora, imagine um exemplo um pouco diferente. Você é proprietário de duas Lamborghini e pretende pintá-las. Admita que nenhum dos pintores é capaz realizar o serviço em mais de uma Lamborghini por vez. Nesse caso as propostas se encerram quando Miguel e Júlio se disponibilizam para prestar o serviço por um delta abaixo de $8 mil. Por esse valor, Rita e Raja não topariam fazer o serviço. Observe o excedente dos produtores Miguel e Júlio no lado esquerdo da Figura 1.13 a seguir.

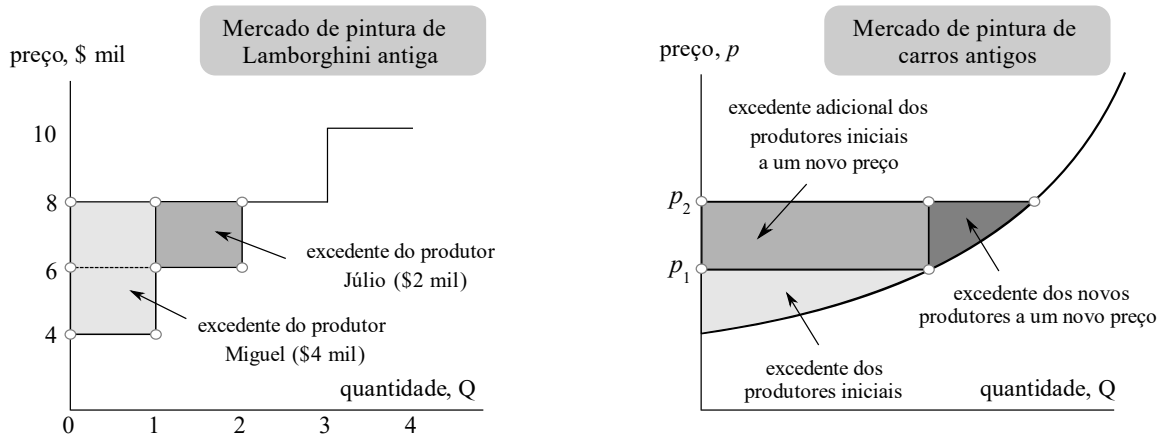


Figura 1.13 – Excedente do produtor (mercado restrito e amplo).

Ou seja, o excedente de quem produz o serviço é o montante recebido na venda menos o custo de produção, e esse é o benefício pela participação do profissional no mercado. Como no exemplo anterior, ampliando o raciocínio para um mercado de carros antigos de diversas marcas, resulta o gráfico direito da Figura 1.13. É fácil perceber que, em um mercado amplo, o benefício total é maior quando os bens estão sendo comercializados no preço de equilíbrio, conforme ilustra a Figura 1.14 a seguir. Fora do preço de equilíbrio, tanto o excedente do consumidor como do produtor é menor (ver gráfico direito da Figura 1.14).

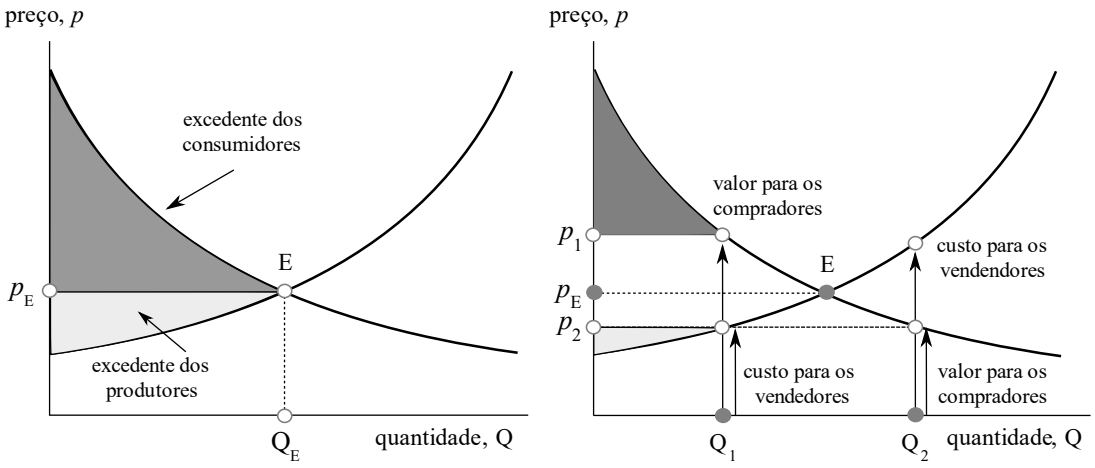
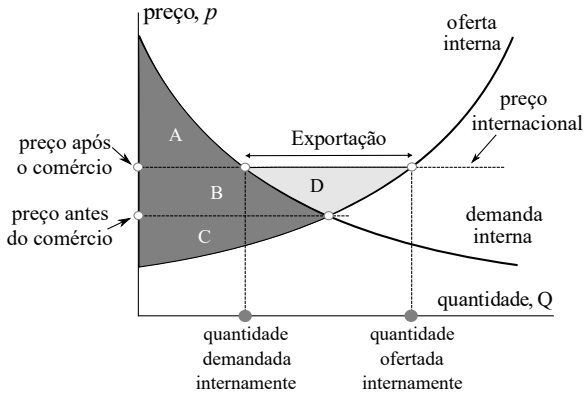


Figura 1.14 – Excedente do consumidor e do produtor.

Se os preços praticados estão abaixo ou acima do preço de equilíbrio p_E, o benefício, tanto dos consumidores como dos produtores, é afetado. Se for praticado acima do preço de equilíbrio p_1, os consumidores obtêm um benefício menor do que poderiam obter num mercado em equilíbrio. Isso estimularia o consumidor a buscar um benefício maior, pressionando o preço cair para o preço de equilíbrio. Por outro lado, se o preço for abaixo do preço de equilíbrio p_2, os produtores obtêm um benefício abaixo do que gostariam. Da parte do produtor seria uma situação indesejável, o que o levaria a trabalhar para que o preço suba até o ponto de equilíbrio p_E.

1.6.3. O comércio internacional

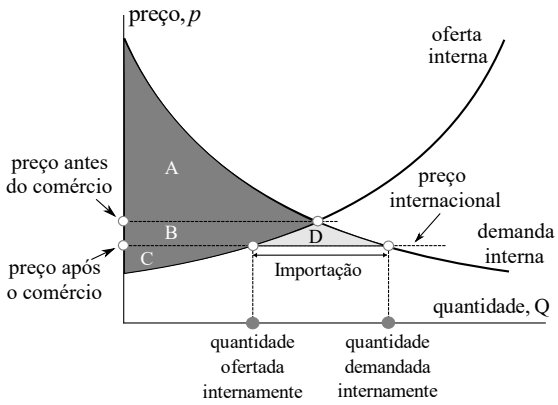
Em um país que não negocia com os mercados internacionais, os preços dos produtos e serviços se ajustam para equilibrar a oferta e demanda internas, como já demonstrado. No caso de exportação, por exemplo, é evidente que nem todos são beneficiados igualmente. Note que a exportação de um bem só é vantajosa se o preço interno for menor que o preço internacional, e a abertura do comércio forçaria o preço interno alcançar o preço internacional. Nesse caso, os produtores seriam beneficiados e os consumidores perderiam parte do excedente, que, por sua vez, seria maior (Figura 1.15).



	Antes	Depois	Mudança
Excedente do consumidor	A + B	A	– B
Excedente do produtor	C	B + C + D	+ B + D
Excedente total	A + B +C	A + B + C + D	+ D

Figura 1.15 – Comércio internacional (exportação).

O mesmo ocorre quando um país se torna importador, ou seja, nem todos são beneficiados igualmente. O comércio de importação força os preços internos para baixo. Os consumidores seriam beneficiados, mas os produtores internos não. No entanto, conforme indica a Figura 1.16 a seguir, o excedente total seria maior.



	Antes	Depois	Mudança
Excedente do consumidor	A	A + B + D	+ B + D
Excedente do produtor	B + C	C	− B
Excedente total	A + B + C	A + B + C + D	+ D

Figura 1.16 – Comércio internacional (importação).

Como se vê, não só o comércio interno pode ser bom para todos, mas também o comércio internacional, sendo que este afeta, de forma diferente, os consumidores e produtores. Nas palavras de Mankiw (2020), "sempre que uma política de comércio internacional cria ganhadores e perdedores, há a possibilidade de uma batalha política. Os países deixam de gozar dos benefícios do comércio simplesmente porque os perdedores têm mais força política que os ganhadores. E aqueles fazem *lobby* por restrições comerciais, como tarifas e cotas de importação".

1.6.4. O custo da tributação

Os impostos têm impacto sobre a economia moderna, e em geral o tema suscita discussões acaloradas. Quando um imposto recai sobre os compradores, a quantidade demandada é reduzida; e quando recai sobre o produtor, a quantidade ofertada é reduzida. Em outras palavras, quando o governo impõe um imposto sobre um bem, ele reduz o excedente total, pois faz com que a quantidade vendida antes do imposto, que se encontrava em equilíbrio, caia de Q_E para Q, conforme indica a Figura 1.17.

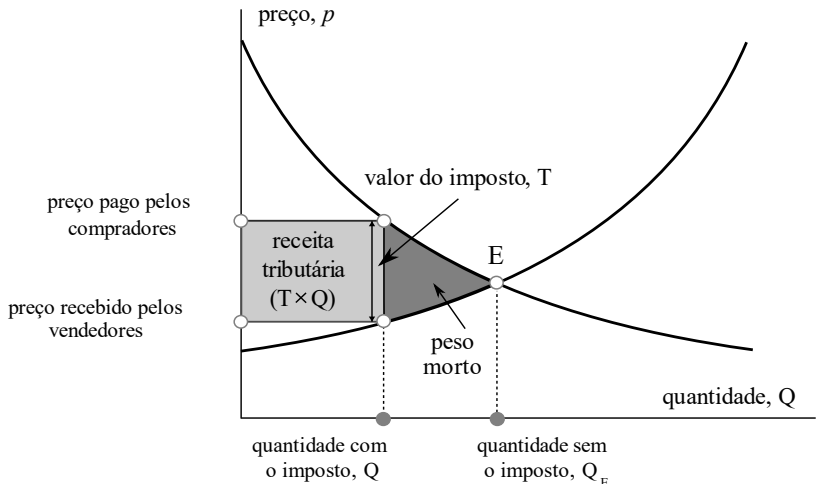


Figura 1.17 – Redução da quantidade comercializada em função dos impostos.

O peso morto indicado na Figura 1.17 é o montante subtraído dos excedentes dos consumidores e dos produtores. O peso morto pode ser maior ou menor, que depende da elasticidade-preço da demanda e do tamanho do imposto. Quando a oferta ou a demanda é relativamente inelástica, o peso morto é pequeno; e quando a oferta ou a demanda é relativamente elástica, o peso morto é maior.

Embora batizado aqui de peso morto, o montante dos impostos tem impacto importante em outras ofertas de bens e serviços, onde mais um agente econômico participa do mercado: o governo, seja na saúde, educação ou segurança, por exemplo. É nesse ponto que o tema suscita debates, e não há uma receita de bolo que indique o tamanho ideal dos impostos.

Uma tarefa difícil de uma política de impostos é encontrar a relação ótima entre o valor arrecadado com um imposto a diferentes alíquotas (ver Figura 1.18). Sabe-se que quando a alíquota é zero, não há receita tributária, e o mesmo ocorre se a alíquota for 100%, pois não haverá incentivo para quem empreende pagar 100% de tudo que produz. Laffer (1979) foi quem se debruçou, com base em outros economistas, sobre o conceito da *elasticidade da receita tributável*, concluindo que a alíquota ideal tem um máximo entre 0% e 100%. O gráfico proposto por Laffer tem a forma de uma parábola, que começa em 0% e eleva-se a um valor máximo em determinada alíquota intermediária, para depois cair novamente a 0 com uma alíquota de 100%.

Conforme Figura 1.18 a seguir, o peso morto é a redução do excedente total, e a receita tributária é o valor do imposto multiplicado pela quantidade vendida do bem. Um imposto pequeno gera uma receita pequena (a); um imposto maior tem um peso morto maior, e gera uma receita maior (b); já um imposto muito elevado tem um peso morto muito elevado, e isso reduz o tamanho do mercado, gerando uma arrecadação pequena (c).

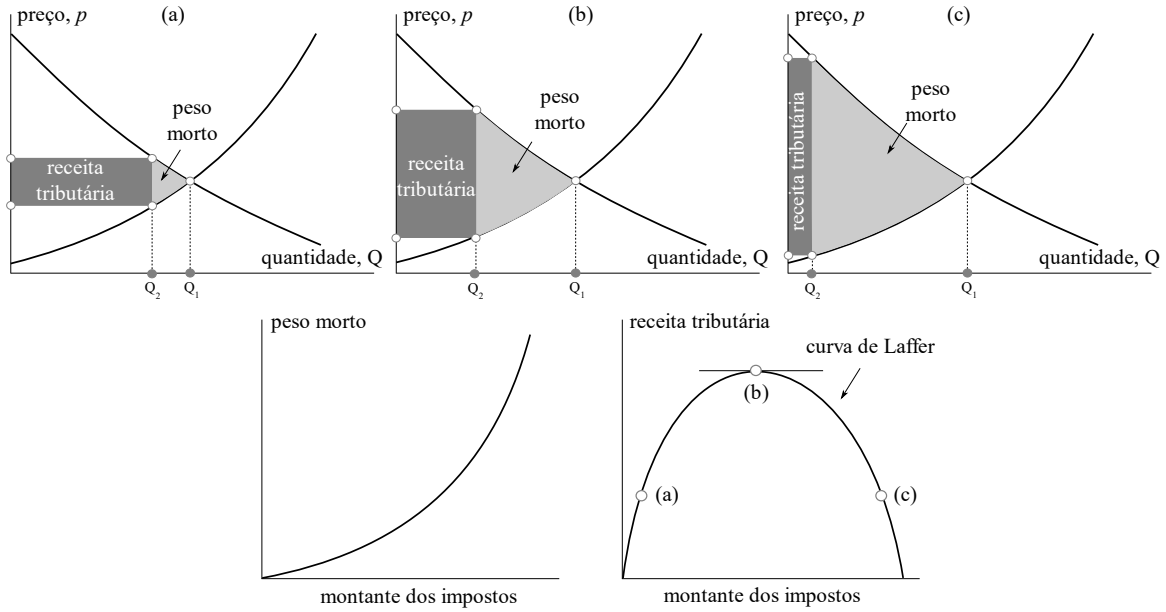


Figura 1.18 – Como o peso morto e a receita tributária variam com o tamanho do imposto (Mankiw, 2020).

1.6.5. Taxa marginal de substituição e curvas de indiferença

É importante conhecer algumas premissas de comportamento do consumidor que refletem como ele aloca sua renda entre diferentes bens e serviços, procurando sempre maximizar o seu bem-estar, mesmo subordinado a uma restrição orçamentária. A preferência do consumidor pode ser resumida nos seguintes pontos:

- Os consumidores têm a capacidade de ordenar suas preferências.
- Há lógica e consistência na ordem de preferência.
- O consumidor prefere maior quantidade a menor quantidade.
- Há, na maioria das vezes, restrições orçamentárias para o consumo.
- A escolha do consumidor é sempre aquela que maximiza sua satisfação.

a) Taxa marginal de substituição

Considere, por exemplo, a ida ao supermercado por um consumidor para compra de itens que lhe dão prazer, como por exemplo, cerveja e vinho. Caberia então a pergunta: qual quantidade de cerveja ele estaria disposto a abrir mão para levar uma garrafa de vinho que o deixaria igualmente satisfeito? A resposta a essa pergunta é definida como *taxa marginal de substituição* TMS, e é utilizada para medir a quantidade de mercadoria que um consumidor está disposto a abrir mão para obter uma unidade de outro produto substituto, mantendo o nível de satisfação.

b) Curva de indiferença

A *curva de indiferença* está associada à TMS. Ela é construída com todas as combinações possíveis de dois ou mais produtos, de tal modo que forneça o mesmo nível de satisfação para o consumidor. A Figura 1.19 a seguir exemplifica, por meio de gráficos, algumas curvas de preferências de um consumidor hipotético.

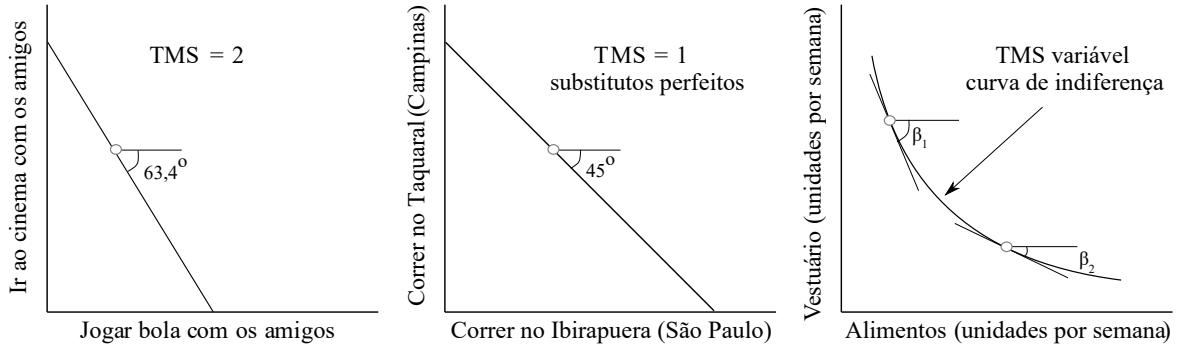


Figura 1.19 – Linhas e curva de indiferença (conceito de taxa marginal de substituição).

Qualquer ponto em uma curva de indiferença indica quantidades de duas opções disponíveis para escolha do consumidor. As opções podem se referir a um produto ou a uma cesta de produtos, e as quantidades indicadas por qualquer ponto na linha deixam o consumidor igualmente satisfeito. Uma curva (ou linha) de indiferença é *convencionalmente* construída no sentido decrescente. Observe que, frente às duas opções de escolhas, o consumidor que segue o comportamento indicado no primeiro gráfico da Figura 1.19 se dispõe a trocar maiores quantidades da opção do eixo vertical por uma unidade do eixo horizontal.

1.7. Inflação

Um dos mais controvertidos e complexos fenômenos da economia é o da inflação. As teorias sobre inflação são numerosas e nem todas são conclusivas quanto às verdadeiras causas. Não existe uma teoria única capaz de explicar satisfatoriamente as diferentes inflações verificadas em diversos países ao redor do mundo. Algumas delas explicam determinadas situações e deixam outras sem respostas, visto que as causas podem variar com o grau de desenvolvimento socioeconômico e político de cada país. Existem, entretanto, causas comuns observadas na maioria dos processos inflacionários, que se caracterizam pelo aumento generalizado e persistente do nível de preços.

Para definir inflação, surgem dificuldades quando se leva em consideração não só sua intensidade, como também seu tempo de duração. Muitos autores têm utilizado as expressões – apreciável, considerável, persistente e prolongada – para melhor conceituar o fenômeno. A inflação pode ser definida, mesmo que de forma incompleta, como uma elevação considerável e persistente do nível geral de preços. A elevação de preços deve

ser não só apreciável, como também prolongada para se enquadrar como tendência inflacionária. De acordo com a intensidade dos processos inflacionários, duas designações são comuns:

- Inflação rastejante – leve ou suave expansão dos preços.
- Inflação galopante – elevada expansão dos preços.

Além dessas designações, são comuns os termos hiperinflação e espiral inflacionária. Existem muitas teorias, não mutuamente exclusivas, mas complementares, para explicar o fenômeno. Aqui são comentadas as principais teorias clássicas: *inflação de demanda* ou de procura e *inflação de custos* ou de oferta.

1.7.1. Inflação de demanda – teoria quantitativa da moeda

Essa teoria procura relacionar a origem do fenômeno da inflação com o excesso de moeda circulando em um sistema econômico. Segundo os monetaristas, o nível geral de preços se eleva porque a demanda de bens e serviços excede a oferta disponível a preços correntes. O aumento da quantidade de moeda circulante, geralmente, não é acompanhado de correspondente aumento do volume de produção de bens e serviços, o que provoca a inflação. Isso significa que o aumento do poder de compra, devido à expansão da moeda, conduz o sistema a um nível de demanda geral superior ao da oferta geral.

Nas economias em desenvolvimento, a causa principal da expansão dos meios de pagamento tem sido o déficit orçamentário do governo. O aumento dos meios de pagamentos decorre da decisão governamental de novas emissões de papel-moeda ou títulos da dívida pública. Os dispêndios governamentais, principalmente os gastos sociais, obrigam o governo a emitir títulos da dívida pública junto aos bancos comerciais como forma de arrecadação de recursos monetários.

Essa rota, aceita pela maioria dos economistas, levou o economista Milton Friedman a pontuar a seguinte máxima: "nenhum governo aceita que é o responsável por uma inflação. Sempre arranjam alguma desculpa – comerciantes gananciosos, sindicatos turrões, consumidores compulsivos, árabes, a chuva. Sem dúvida que comerciantes são gananciosos, consumidores são compulsivos, árabes aumentam o preço do petróleo e, de vez em quando, chove mesmo. Todos esses agentes têm como produzir preços altos para certos itens; mas são incapazes de fazer isso com tudo que existe. Eles até podem causar subidas e descidas temporárias na taxa de inflação, mas não têm como dar início a uma inflação contínua. Por um motivo simples: nenhum desses supostos culpados pela inflação tem as impressoras que produzem aquilo que a gente carrega na carteira".

A concepção da teoria quantitativa da moeda é bastante simples. Fisher (1930) baseou-se na existência de uma identidade entre o fluxo monetário ($M \times v$) e o valor global dos bens e serviços disponíveis ($p \times Q$). O fluxo monetário é expresso pelos meios de pagamento M multiplicados pela sua velocidade de circulação v. O valor global dos bens e serviços produzidos é determinado pela produção Q multiplicada pelo valor do preço corrente p. A equação fundamental de Fisher é

$$Mv = pQ \tag{1.16}$$

O volume total dos meios de pagamento M é sempre inferior ao volume global dos bens e serviços disponíveis pQ. No entanto, tanto o papel-moeda como as moedas escriturais giram várias vezes, realizando diversas transações. A esses giros Fischer chamou de velocidade de circulação da moeda v. Torna-se evidente, pela expressão de Fisher, que se um dos componentes monetários da equação crescer, seja a quantidade de moeda ou a sua velocidade de circulação, mantendo-se constante o volume global da produção, os preços subirão, pois

$$p = \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{Q}} \tag{1.17}$$

Quanto maior for a quantidade e a velocidade de circulação da moeda, tanto maior será o nível geral de preços para uma mesma produção. Por exemplo, imagine uma economia simples que produza apenas pizza. Suponha que essa economia produza 100 pizzas em um ano, que cada pizza seja vendida por \$10 e que a quantidade de moeda na economia seja de \$50 em notas de \$1. Assim, a velocidade da moeda é

$$v = \frac{10\times100}{50} = 20 \tag{1.18}$$

Nessa economia, as pessoas gastam um total de \$1000 por ano com pizza. Para que esse gasto aconteça com apenas \$50 em moeda, cada nota de \$1 deve mudar de mãos em média 20 vezes. Evidentemente que o fenômeno, em um sistema econômico real, não ocorre com esta simplicidade e exatidão. Sabe-se que vários fatores interferem no sistema econômico, não permitindo a verificação pura e simples da variação de um componente isolado da equação de Fisher. Vale lembrar que a economia não é uma ciência exata, e essa equação evidencia um incontestável aspecto da realidade econômica: a expansão monetária, quando não acompanhada por uma correspondente expansão real da oferta global, provoca uma generalizada e persistente elevação dos preços. É um dos dez princípios da economia. Esse fenômeno pode ser explicado pelo gráfico da Figura 1.20, onde se observa uma família de curvas de demanda D se deslocando positivamente para a direita.

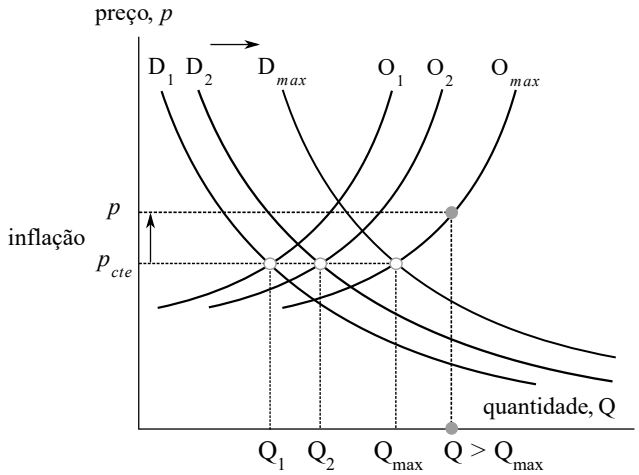


Figura 1.20 – Expansão da demanda devido à expansão da moeda – inflação de demanda.

Em síntese, para os monetaristas, a expansão da moeda sem correspondente expansão das quantidades de bens produzidos constitui um dos principais fatores geradores da inflação. Os preços se elevam porque a demanda excede a oferta. Quando a expansão da demanda é acompanhada por uma expansão na produção (oferta), não se verifica aumento dos preços (p_{cte}) até que se atinja o que se chama de pleno emprego dos recursos de produção, ou seja, o sistema de produção atinge uma oferta máxima, O_{max}, para uma quantidade de demanda também máxima, Q_{max}. A partir desse ponto de produção máxima, o aumento na demanda originado da emissão de moeda não produzirá aumento de produção, mas refletirá aumento no nível de preço.

1.7.2. Inflação de custos

Além da clássica teoria da demanda há outra teoria conhecida como inflação de oferta ou de custos. A ideia geral da inflação de custos é ilustrada no gráfico da Figura 1.21 a seguir:

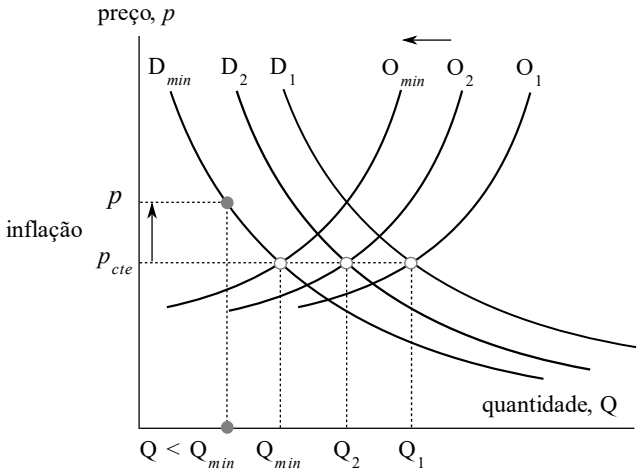


Figura 1.21 – Retração da oferta devido à expansão dos custos – inflação de custos.

Admita que os preços atuais sejam representados por p_{cte}. A curva de oferta pode se deslocar para a esquerda de O_1 para O_2 até uma condição de oferta mínima, função da expansão dos custos. Em caso de a curva de demanda global retrair na mesma proporção, de D_1 para D_2 até uma demanda mínima D_{min}, não há reflexos no nível de preços, estes se manterão constantes. Em caso da curva de demanda não se alterar, mantendo constante em D_{min}, por exemplo, e em havendo redução da curva de oferta em função dos custos ascendentes, os preços subirão.

A inflação de custos pode ser provocada, por exemplo, pelo poder de negociação dos sindicatos trabalhistas. Por sua vez, tais sindicatos exigem elevados salários, que são repassados pelos empresários aos preços dos produtos. Da mesma forma, os preços, em situação de oligopólio ou monopólio, podem ser impulsionados pelos produtores, que, por sua vez, desejam elevar excessivamente os seus lucros.

A inflação de custos é também motivada quando há aumento nas taxas salariais superior ao aumento da produtividade. A *inflação de lucros* é uma variante da inflação de oferta. Os grupos oligopolistas ou monopolistas, da mesma forma que os sindicatos, forçam a elevação dos preços para obterem maiores lucros, resultando em redução da produção ou do consumo.

1.7.3. Outras pressões inflacionárias

Devido ao caráter dinâmico dos movimentos inflacionários, além das já mencionadas causas predominantes como a demanda e o custo, outros fatores podem ser citados: fatores exógenos, psicológicos e estruturais. É difícil desassociar esses fatores sobre os preços, visto que os processos inflacionários contêm geralmente múltiplos elementos causais, entre eles:

- Inflação importada – gerada por fatores exógenos, tais como as taxas externas de juros e o preço das matérias-primas ou insumos importados, que provocam a chamada inflação importada, sem que os países importadores exerçam influência nos preços.
- Inflação psicológica – provocada por cada indivíduo ou segmento da sociedade que, procurando se defender da desvalorização da moeda, passa a especular ou pressionar a demanda, causando a inflação.
- Inflação inercial – refere-se à ideia de memória inflacionária, em que o índice atual é a inflação passada mais a expectativa futura. A inflação inercial emerge de uma economia com mecanismos de indexação. No Brasil (décadas de 1970 e 1980), por exemplo, vigorava um ambiente de contratos de diversos tipos, com cláusulas de correção monetária autoaplicáveis. Isso gerou, na sociedade, um comportamento inflacionário inercial, transferia-se para o mês seguinte a taxa de inflação do mês anterior.
- Inflação reprimida – processo inflacionário gerado pelo congelamento dos preços por parte do governo.

Os instrumentos da política econômica mais utilizados para controle da inflação são: instrumentos monetários, fiscais e intervenção direta, como controle de preços, salários etc. Sabe-se que medidas monetárias e fiscais restritivas são armas empregadas para reprimir a inflação de demanda. Uma política monetária que evite a expansão da moeda age no sentido de conter a demanda agregada e, por conseguinte, a alta de preços.

Para a inflação de custos, contudo, tais políticas restritivas não são adequadas, visto que nesse tipo de inflação a demanda pode se comportar como estacionária. Na inflação de oferta, em que os preços se mantêm elevados mesmo com baixa produção e demanda, se houver maior redução na procura devido à restrição monetária, pode ocorrer maior pressão inflacionária devido ao desaquecimento da economia. Para a inflação de custos e salários, o arrocho salarial e o congelamento de preços podem surtir algum efeito temporário, porém provocam tensões sociais e inflação reprimida.

Uma política monetária restritiva pode refrear o processo inflacionário, reduzindo as disponibilidades dos meios de pagamento. As autoridades monetárias do governo agem sobre a moeda e o crédito por meio da emissão de papel-moeda ou títulos da dívida pública, que atuam como reguladores do sistema financeiro. Geralmente, uma política monetária restritiva é acompanhada de uma política fiscal rígida, buscando-se uma melhor arrecadação tributária a fim de reduzir o déficit orçamentário. As medidas monetárias para combater a inflação de demanda devem ser cautelosas e graduais, desaquecendo a economia sem provocar forte depressão com altos índices de desemprego. Essas duas importantes variáveis econômicas, preço e emprego, são pontos vitais da estabilidade econômica. A política econômica ideal é aquela que consegue conciliar uma elevada taxa de emprego com um baixo índice de inflação.

Os objetivos da estabilidade do emprego e de preços constituem conflitos cruciais da política econômica, um *tradeoff*. O dilema recessão *versus* inflação decorre desse conflito, visto que os objetivos da estabilidade do emprego pressupõem medidas de caráter expansionista, enquanto os de estabilidade de preços pressupõem medidas de restrição, que desaceleram os processos de crescimento e geração de empregos. A fórmula de consenso mais adotada é atingir em primeiro lugar a estabilidade econômica (mesmo com queda no nível de emprego), e somente depois atuar com medidas expansionistas para o retorno do nível de emprego. Essas duas etapas foram vivenciadas no Brasil durante a década de 1990 e de 2000, respectivamente.

1.7.4. Curva de Philips

A promoção do pleno emprego e do controle das tensões inflacionárias nunca foram facilmente conciliáveis. Coube a Phillips (1958) a investigação dessa relação. A seguir se verifica, de forma gráfica, o que ficou conhecido como *curva de Phillips* (ver Figura 1.22).

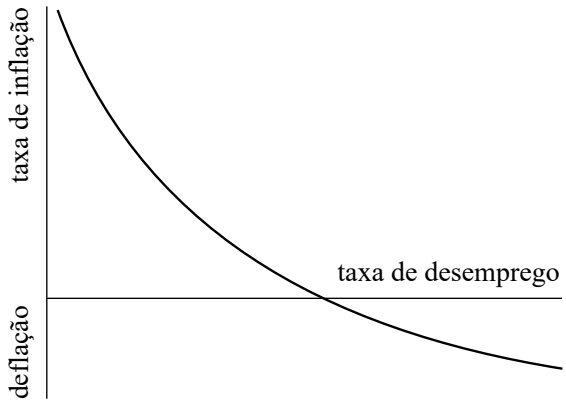


Figura 1.22 – Curva Phillips – Pleno emprego e inflação.

Conforme mostra o gráfico da Figura 1.22, as políticas de redução do desemprego têm correspondência com a elevação da taxa de inflação. Já as políticas de estabilização de preços tendem a ampliar a taxa de desemprego ou recessão. Alguns economistas alegam que é preferível a convivência com taxas de inflação não muito baixas do que com o desemprego com medidas recessivas.

Ensaio 1.2

A adequação dos diferentes instrumentos de controle da economia é tarefa das mais difíceis enfrentada pelos formuladores de políticas econômicas. A história constata que quedas significativas na inflação só ocorrem com marcante retrocesso na produção e no emprego. No caso do Brasil não foi diferente. A inflação foi debelada em 1994 a partir de um patamar elevado (estado de hiperinflação), o que impossibilitou conter os efeitos indesejáveis sobre a taxa de desemprego em função das medidas de restrição. Somente uma década depois, já com a estabilidade da moeda em pleno vigor, o nível de emprego voltou a subir impulsionado pelo ambiente de crescimento econômico mundial favorável, sobretudo a valorização das *commodities*. Já a partir da década de 2010, com a contínua expansão de créditos iniciada na década anterior e o aumento dos gastos sociais, a inflação voltou a subir e o nível de emprego chegou a patamares quase de pleno emprego. Não obstante, a partir de meados daquela década, as contas públicas se deterioram e a credibilidade da economia brasileira foi drasticamente reduzida, tendo também contribuído negativamente o ambiente de corrupção nas estatais brasileiras. Com efeito, a economia retrocedeu tendo como consequência o aumento do desemprego. O processo de condução de política econômica é bastante complexo e de difícil formulação. Nenhum instrumento de política econômica está isento de pressões e influências de fatores externos. A adoção de qualquer política implica constrangimentos devido às ações que contrariam interesses de grupos institucionais como sindicatos, partidos políticos, empresários e a opinião pública. No estágio atual do conhecimento da ciência econômica, nenhum grupo de economistas chegou a um acordo com relação à fórmula de uma política econômica ótima, que conduza um país ao desejado nível de pleno emprego e estabilidade de preços.

1.7.5. Controle de preços

Embora seja o governo o ente capaz de impor medidas que buscam equilibrar o mercado, nem sempre o sucesso é garantido, resultando em alguns casos o inverso do que se espera. O controle de preço por meio de políticas de imposição de valores máximos ou mínimos é um caso clássico de como não fazer. O governo pratica uma política de valor máximo para um determinado bem quando o preço deste (preço efetivamente de equilíbrio) está em um nível elevado, tentando assim proteger o consumidor. O novo preço é abaixo do valor de equilíbrio. Ao se reduzir o preço de equilíbrio, o resultado será o aumento da demanda. Os efeitos colaterais causados pelo aumento da demanda nesse caso, embora não desejáveis, são: aumento de filas, cobrança de ágio, surgimento de mercados informais com violação das leis estabelecidas, racionamento por parte do governo etc. A ocorrência de efeitos indesejáveis é esperada, pois em geral a interferência do governo é também imperfeita e, na maioria dos casos, tais ações miram apenas uma variável.

Já a política de preço mínimo tem por objetivo proteger o produtor por meio de uma imposição de valor, em geral, superior ao preço de equilíbrio. Com efeito, ocorrerá neste caso um excesso de oferta. No caso de um preço mínimo igual ao de equilíbrio, nada muda no comportamento dos preços e quantidades já praticadas. O mercado de produtos agrícolas é um caso clássico para as políticas de preço mínimo com valor acima do preço de equilíbrio, em que o governo se compromete a comprar a oferta excedente visando proteger o produtor para as futuras safras ou instituir um programa de subsídios.

1.8. Teoria Geral do Emprego e Renda

Foi com a experiência vivida na década de 1930, após a depressão, que os economistas se preocuparam, de forma mais intensa, com a análise de variáveis agregadas. Keynes, por exemplo, induziu no pensamento econômico a existência de elementos de nível macro e suas relações com o sistema econômico. Seguindo a didática de Blanchard (2017), em uma economia fechada, a demanda total por bens Z segue a seguinte expressão:

$$\overbrace{Z}^{produção\ bruta} \cong \overbrace{C + I + G}^{despesa\ bruta} \tag{1.19}$$

onde a renda bruta Z, ou produção bruta, é a quantidade de todos os bens e serviços produzidos, composta de bens de consumo das famílias C e do governo G (consumo final) e bens de investimento I (ou bens de capital). Segundo Keynes (1936), se o nível de renda de um país está abaixo do seu potencial, é porque existem fatores de produção que não estão sendo empregados (por exemplo, a força de trabalho).

Na avaliação de Keynes, é o investimento a variável mais incerta, pois depende de outras sujeitas às incertezas em relação ao futuro, seja devido à preferência das famílias pela liquidez ou pela expectativa em relação aos resultados esperados dos bens de capital empregados na economia. A base da determinação da taxa de juros de uma economia está na preferência das famílias pela liquidez e, para Keynes, a variável I explica, em boa medida, porque em certos momentos uma economia opera em um nível de renda abaixo da capacidade do emprego dos fatores de produção.

Como se sabe, as famílias destinam parte da renda disponível para o consumo e poupam outra parcela. Essa segunda parcela é mais elevada para as famílias de alta renda, ao passo que as de baixa renda tendem a consumir uma parcela mais representativa da renda, ou toda a renda. Não obstante, na média há uma propensão de todos a consumir, denominada por Keynes de c_1 ($0 < c_1 < 1$), além de uma parcela de consumo mínimo de sobrevivência que não depende da renda, chamado de consumo autônomo e indicado por c_0. Assim, o consumo das famílias é

$$C = c_0 + c_1 Y_D \tag{1.20}$$

onde Y_D é a renda disponível das famílias, igual à renda bruta Y menos os impostos líquidos das transferências do governo para as famílias, T. Ou seja, $Y_D = Y - T$. O parâmetro c_0 é o que as pessoas consumiriam se suas rendas disponíveis no ano corrente fossem zero, seja vendendo ativos, contraindo empréstimos com os familiares e bancos ou recebendo donativos.

Na contabilidade nacional, a variação do estoque é considerada investimento, uma vez que tal variação ocorre quando a produção não é totalmente consumida no período e estará disponível para consumo futuro. Assim, o investimento total I é o investimento bruto mais a variação do estoque. Se a variação no estoque for zero, isso implica um equilíbrio no mercado de bens, resultando Z = Y. Desse modo, a Eq. (1.19) é reescrita como:

$$Y \cong c_0 + c_1(Y - T) + \tilde{I} + G \tag{1.21}$$

onde I é o investimento quando o estoque é zero. Rearranjando, resulta

$$Y \cong \frac{1}{(1 - c_1)} \overbrace{[c_0 + \tilde{I} + G - c_1 T]}^{gasto\ autônomo} \tag{1.22}$$

onde $1/(1 - c_1)$ representa um multiplicador de escala da renda, denominado *multiplicador keynesiano*. O termo $[c_0 + \tilde{I} + G - c_1 T]$ é aquela parte da demanda por bens que não depende do produto, por isso é chamado de gasto autônomo. Note que, quanto maior a propensão ao consumo c_1, maior é o efeito multiplicador, conforme indicado na Figura 1.23 a seguir.

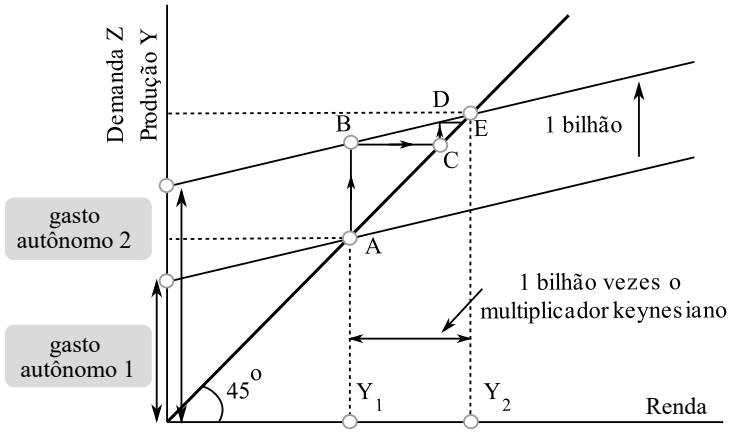


Figura 1.23 – Efeito do multiplicador keynesiano.

O efeito multiplicador keynesiano sobre a renda decorre do aumento do gasto autônomo. Seguindo Blanchard (2017), note que o aumento do gasto autônomo na primeira rodada é igual a \$1 bilhão, e esse aumento, indicado no trecho AB, leva a um aumento da produção também de \$1 bilhão. Esse aumento da produção leva um aumento da renda mostrado pelo trecho BC, que é igual a \$1 bilhão. Na segunda rodada, o aumento mostrado no trecho CD é igual a \$1 bilhão multiplicado pela propensão ao consumo c_1. Esse aumento da segunda rodada leva um aumento da produção e, dessa maneira, a um aumento igual de renda DE. Na terceira rodada, o aumento é igual a $\$c_1 \times c_1 = \$c_1^2$ bilhão, e assim por diante. Seguindo esse raciocínio, o aumento total após $n + 1$ rodadas é igual a

$$1 + c_1 + c_1^2 + c_1^3 + \cdots + c_1^n \tag{1.23}$$

Se a economia é aberta, o consumo virá das famílias, do governo e mais uma parcela se somará à renda que resulta das exportações X já descontadas das importações M. Desse modo, pode-se reescrever a Eq. (1.19), caso o investimento em estoque seja zero, como:

$$\mathrm{Y} \cong \mathrm{C} + \tilde{\mathrm{I}} + \mathrm{G} + (\mathrm{X} - \mathrm{M}) \tag{1.24}$$

Agora o nível de produção de um país dependerá não somente do consumo das famílias e do investimento, mas também dos gastos do governo e das exportações líquidas, o que confere maior complexidade na análise desses agregados. A renda bruta pode então ser representada pela seguinte expressão:

$$\mathrm{Y} \cong \frac{1}{1 - c_1}(c_0 + \tilde{\mathrm{I}} + \mathrm{G} - c_1\mathrm{T} + \mathrm{X} - \mathrm{M}) \tag{1.25}$$

Com efeito, tanto com um aumento nos investimentos como no gasto do governo ou nas exportações, há um efeito multiplicador na renda, ao passo que o aumento nas importações tem efeito contrário. Para Keynes, conforme indica a Eq. (1.25), cabe ao governo um papel fundamental na elevação da renda por meio do aumento dos seus gastos, tornando-se assim o *controlador da demanda efetiva*.

A Eq. (1.25), por ser agregada, esconde movimentos econômicos fundamentais. Por exemplo, qualquer aumento nos gastos do governo tem o mesmo efeito na renda que um aumento nos investimentos[19]. Como se sabe, no longo prazo, a qualidade do gasto do governo determina diferentes níveis de renda de um país, e os investimentos nos setores da economia são distintos em seus retornos.

[19] De acordo com a Eq. (1.25), se o governo contrata um trabalhador para cavar buracos e depois contrata outro para tapá-los, o efeito sobre a renda é o mesmo se esses gastos forem convertidos em investimento de capital.

Pode-se, a título de exemplo, desagregar o gasto do governo G e o investimento I. O gasto total do governo englobaria o custeio da administração pública e demais gastos. A primeira parcela representaria o custo da administração pública e a segunda parcela subdividida em educação e outros gastos (saúde, segurança, previdência etc.). Já o investimento, por sua vez, poderia ser desagregado por setores da economia. Assim, a Eq. (1.25) seria ampliada para

$$\mathrm{Y} \cong \frac{1}{1-c_1}\left(c_0 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathrm{I}}_i + \overbrace{\mathrm{G}_{custeio} + [\mathrm{G}_e + \mathrm{G}_{outros}]}^{\mathrm{G}} + c_1\mathrm{T} + \mathrm{X} - \mathrm{M}\right) \tag{1.26}$$

onde $\tilde{\mathrm{I}}_i$ é o investimento dos *n* setores da economia (com estoque nulo), $\mathrm{G}_{custeio}$ é o gasto do governo com a administração pública, G_e os gastos em educação e G_{outros} as demais despesas governamentais. Por exemplo, sabe-se que o investimento em educação, transporte público, infraestrutura (portos, aeroportos, rodovias, ferrovias etc.) tem efeito multiplicador na renda, diferente de outros setores da economia. Ademais, o custeio do funcionalismo público também difere dos demais gastos em termos de efeito sobre a renda.

Até aqui, o equilíbrio macroeconômico se deu entre a produção (renda) e a demanda. Outro equilíbrio envolve o investimento e a poupança, e foi assim que Keynes desenvolveu a teoria geral do emprego e renda, dos juros e da moeda em 1936. Por definição, a poupança privada é igual à renda disponível menos o consumo:

$$\mathrm{S} \cong \mathrm{Y_D} - \mathrm{C} \tag{1.27}$$

ou

$$\mathrm{S} \cong \mathrm{Y} - \mathrm{T} - \mathrm{C} \tag{1.28}$$

Já a poupança pública é definida como (T - G), ou seja, é igual aos impostos líquidos de transferências menos o gasto do governo. Se os impostos excedem o gasto do governo, tem-se um superávit primário, e se são inferiores ao gasto, tem-se o déficit orçamentário. Subtraindo de ambos os lados da Eq. (1.19) resulta

$$\overbrace{\mathrm{Y} - \mathrm{T}}^{\mathrm{Y_D}} - \mathrm{C} = \mathrm{I} + \mathrm{G} - \mathrm{T} \tag{1.29}$$

Note que o lado esquerdo da equação é simplesmente a poupança privada, logo

$$\mathrm{S} = \mathrm{I} + \mathrm{G} - \mathrm{T} \tag{1.30}$$

ou

$$\mathrm{I} = \overbrace{\mathrm{S}}^{privado} + \overbrace{(\mathrm{T} - \mathrm{G})}^{governo} \tag{1.31}$$

No lado esquerdo tem-se o investimento, e do lado direito a soma da poupança privada e poupança pública. Em outras palavras, o equilíbrio de mercado de bens e serviços requer que o investimento seja igual à poupança. O que as empresas desejam investir deve ser igual ao que as pessoas e o governo se dispõem a poupar.

Ensaio 1.3

O consenso keynesiano se manteve por um período de mais de quatro décadas após 1930, quando os governos exerceram um papel fundamental na economia mundial, sobretudo nas chamadas economias centralizadas. Após a década de 1970, com o surgimento de níveis de inflação e desemprego altos em alguns países, o consenso de Keynes quanto ao papel do Estado no controle da demanda foi posto em dúvida. Com efeito, as políticas associadas ao liberalismo, sobretudo após o choque do petróleo, ganharam espaço no mundo acadêmico e em vários governos, resultando em efeitos positivos em muitos países que adotaram tais políticas.

Não se deve concluir com as recomendações de Keynes, a despeito da necessidade da presença do Estado na economia, que este ente deva intervir continuamente no papel de empreendedor. Essa seria, sem dúvida, uma leitura equivocada da proposta *keynesiana*. Na crise dos derivativos de 2008, os governos foram

ativos na solução, sobretudo nos EUA, onde o tesouro americano injetou recursos para tranquilizar o mercado. Ora, dado que o custo do governo em arrecadar de quem produz é ínfimo, em crises econômicas não cabe elogiar o governo por ajudar a solucioná-las. No entanto, a eficiência do governo como empreendedor é duvidosa, razão pela qual a maior parcela do PIB na maioria dos países é garantida pelo setor privado, incluindo o Brasil, com histórico da presença do Estado como empreendedor. Isso não invalida que o governo não possa eventualmente empreender, vide exemplos em muitos países com empresas estatais de sucesso.

George Stigler, economista estadunidense que desenvolveu o princípio da otimização econômica, laureado com o Nobel em 1982, dizia: "Um famoso teorema afirma que uma economia com empresas privadas competitivas produzirá a maior renda possível a partir de um determinado estoque de recursos. Nenhuma economia real atende exatamente às condições do teorema, e todas as economias reais ficam aquém da economia ideal – uma diferença chamada falha de mercado. Entretanto, em minha opinião, o grau de falha de mercado da economia norte-americana é muito menor que o da falha política decorrente das imperfeições de políticas econômicas encontradas nos sistemas políticos reais".

1.9. Contas Nacionais

A exemplo do que ocorre em uma empresa de petróleo, o governo também precisa controlar seu fluxo de caixa. Este controle é feito por meio de uma contabilidade que reflete as variáveis agregadas de um país: produto, renda e despesa. Tal acompanhamento era da responsabilidade da FGV desde 1947 e passou para os técnicos do IBGE a partir de 1986, que entre outras informações reproduz os fluxos nacionais da produção, geração de renda, consumo, financiamento, acumulação (poupança) e suas relações com o resto do mundo.

De acordo com Paulani e Braga (2013), a contabilidade nacional é parte das ciências sociais que trata as variáveis em uma dimensão macro, considerando-as de modo agregado. Como em vários países no mundo, as contas nacionais seguem orientações metodológicas da ONU. A última adaptação do IBGE foi realizada conforme recomendação da SNA[20] em 1993. Esse sistema permite avaliar, além das contas econômicas integradas (CEI), outras que possibilitam refletir a economia nacional como um todo e sua relação com o resto do mundo.

Uma das principais inovações em relação às recomendações anteriores da ONU é a *tabela de recursos e usos de bens e serviços* (TRU), cuja equação contábil segue a seguinte igualdade:

$$\overbrace{V + M}^{recursos} = \overbrace{C_I + D_F}^{usos} \tag{1.32}$$

onde V é a produção total, M são as importações, C_I é o consumo intermediário e D_F é a demanda final. O termo do lado esquerdo representa a totalidade dos *recursos* para o consumo da sociedade (demanda total), e o lado direito indica o destino dado a esses recursos, *usos*. A demanda final é composta do consumo das famílias (C), do consumo do governo (G), dos investimentos (I), das exportações (X) e das variações dos estoques. A matriz C_I representa o consumo de insumos intermediários demandados pelos diversos setores da economia. Se não houver variação dos estoques, o PIB (Produto Interno Bruto) é tão somente a demanda final D_F subtraída das importações M, ou seja:

$$PIB = D_F - M = C + G + \tilde{I} + X - M \tag{1.33}$$

igual à Eq. (1.24). O Produto Nacional Bruto (PNB) é o PIB adicionado da renda líquida dos fatores externos (RLFE), ou seja:

[20] *System of National Accounts* 1993 – Elaboração conjunta da ONU, FMI, OCDE, comissão das comunidades europeias e banco mundial.

$$\text{PNB} = \text{PIB} + \text{RLFE} \tag{1.34}$$

em que

$$\text{RLFE} = \text{RR} - \text{RE} \tag{1.35}$$

onde RR é a renda recebida do exterior e RE é a renda enviada ao exterior. Define-se produção nacional bruta os bens e serviços produzidos exclusivamente com uso de fatores de produção de propriedade de residentes no país. Assim, uma parcela do PNB é produzida no exterior com uso de fatores cuja propriedade pertence aos residentes do país. Já o produto interno bruto, PIB, corresponde aos bens e serviços produzidos dentro das fronteiras geográficas do país, incluindo as exportações subtraídas das importações, ver Eq. (1.33) e (1.24).

Ambos, PIB e PNB, quando subtraídos das depreciações, são ditos PIL e PNL (produto interno líquido e produto nacional líquido, respectivamente). Mais ainda, tanto o PIB como o PNB podem ser reportados a preço de mercado (preço de consumidor) ou a preço de fatores de produção (preço básico). O preço de consumidor é o preço básico adicionado da margem de comércio, transporte e dos impostos líquidos de subsídios.

A carga tributária bruta, CTB, indica o quanto da produção gerada internamente é destinada a financiar uma parcela do dispêndio do governo (investimento e gasto). A receita tributária, portanto, é composta de todos os tributos (impostos, taxas e contribuições de melhorias) nas três esferas de governo, incluindo os valores das contribuições sociais gerais e as destinadas ao financiamento da seguridade social. Todos os tributos e as contribuições sociais são classificados em duas categorias: tributos *diretos* e *indiretos*. Os tributos indiretos são aqueles que incidem sobre a produção, venda, circulação e consumo de bens e serviços, enquanto os tributos diretos são aqueles que incidem sobre a renda e o patrimônio das pessoas ou entidades. Como parte da receita tributária é revertida sob a forma de subsídios para a produção e em transferências diretas para as famílias, a carga tributária líquida, CTL, é expressa como:

$$\text{CTL} = \frac{\text{CTB} - (\text{subsídios} + \text{transferências})}{\text{PIB}} \tag{1.36}$$

Quando a imprensa informa a carga tributária em termos de percentual do PIB, ela está se referindo ao CTB. No caso do Brasil, a título de exemplo, em 2019 a carga tributária bruta foi de 32,5% do PIB e a CTL foi de 13,8%. No mais, em uma economia aberta, é fundamental que se acompanhe as transações que o país realiza com o resto do mundo. O registro desse acompanhamento é denominado de *balanço de pagamentos.* Nesse balanço pode-se avaliar as transações entre residentes e não residentes do país.

Como se trata de transação com o exterior, os registros são efetuados em dólar americano e divididos em cinco contas básicas: balança comercial (BC), balança de serviços (BS), transferência unilateral (TU), movimento de capital (MC) e variação das reservas (R). O saldo das três primeiras contas representa o balanço de pagamentos em transações correntes (TC). A conta de movimento de capital, necessária para fazer face aos compromissos das transações correntes, é aquela que registra todos os esforços por capital e determina se o país aumentará ou reduzirá suas reservas cambiais.

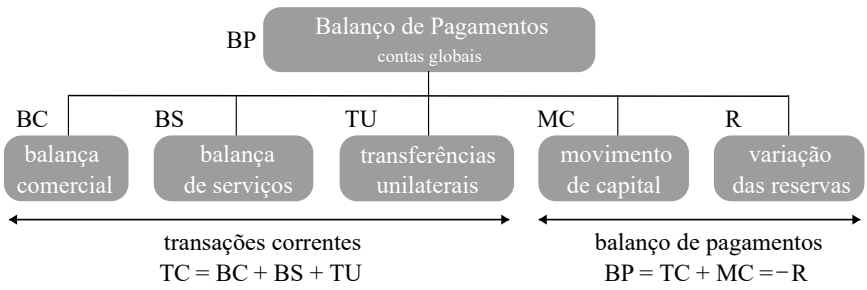


Figura 1.24 – Contas globais do balanço de pagamentos.

- A *balança comercial* é ditada pelas exportações (crédito) e pelas importações (débito). Se as exportações superam as importações resulta um superávit comercial; do contrário, resulta um déficit na balança comercial. No Brasil, tanto as exportações como as importações são lançadas por seu valor FOB[21].
- Na *balança de serviços* são registrados os custos de transportes, fretes, seguros, remessas de lucros, serviços diplomáticos, turismo, viagens internacionais e outros. Um dos itens mais importante dessa conta é o turismo e as viagens internacionais. Na balança de serviços, para cada transação em que o país recebe divisas (dólares ou outra moeda internacional), efetua-se um lançamento a crédito e a cada operação em que o país envia divisas para o exterior, lança-se a débito. No Brasil, por exemplo, um déficit na balança de serviços indicará, muito provavelmente, que o gasto dos brasileiros no exterior superou o gasto dos turistas internacionais realizado no país.
- As *transferências unilaterais* são aquelas transações realizadas sem nenhuma contrapartida, como por exemplo, as rendas recebidas pelas famílias de pessoas que trabalham no exterior, as doações humanitárias etc.
- A *conta movimento de capitais* registra as transações que envolvem investimentos, empréstimos e financiamentos entre países. O Brasil, a exemplo de outros países em desenvolvimento, é importador líquido de capital, o que implica que os investimentos realizados no país por empresas estrangeiras constituem uma fonte de obtenção de divisas que podem ser utilizadas nos compromissos externos registrados nas transações correntes.
- Por último, o resultado na *conta variação das reservas* representa o saldo do balanço de pagamentos.

Por exemplo, quando o saldo do balanço de pagamentos é de $100, significa que a reserva do país acresceu do mesmo montante. O saldo do balanço de pagamentos (BP) é determinado pela soma do saldo das transações correntes com o saldo da conta movimento de capitais. Como se trata de um balanço (partidas dobradas), as contas são equilibradas pela seguinte relação:

$$\mathrm{BP} = \overbrace{\mathrm{TC} + \mathrm{MC}}^{saldo} = -\mathrm{R} \tag{1.37}$$

onde TC são as transações correntes ou *conta corrente* (balança comercial, balança de serviços e transferências unilaterais); MC é a conta de movimento de capital e R as reservas. O sinal negativo em R é apenas uma convenção contábil. Um saldo positivo no balanço de pagamentos representa um saldo negativo na conta *variação* das reservas, significando que houve aumento das reservas. No caso do Brasil, por exemplo, a conta que mais contribuiu na década de 2000 para o aumento das reservas cambiais foi a balança comercial. Esta, basicamente, devido às exportações de *commodities* do setor agropecuário e mineral, sobretudo em uma década em que os preços de tais *commodities* foram muito valorizados em função da demanda elevada de países como China e Índia.

A Eq. (1.37) informa que, em caso de déficit no balanço de pagamentos em conta corrente, o governo tentará suprir com empréstimos de curto prazo ou usar parte das reservas, ou, ainda, recorrer à ajuda de instituições internacionais, como o FMI e o Banco Mundial. A última instância é não honrar os compromissos e decretar o que se denomina de *moratória da dívida.* É claro que há consequências a serem gerenciadas em caso de não pagamento de dívidas assumidas com o exterior, o custo de empréstimos em caso de necessidade futura será inevitavelmente maior. O mercado de capitais, evidentemente, interpreta a moratória como um risco a ser assumido e que deve ser remunerado com taxas de juros maiores.

Note que todas as movimentações são transações com o exterior e geram reservas oriundas de contas que têm contrapartida, excetuando as transferências unilaterais. Desse modo, as reservas não podem ser movimenta-

[21] FOB (*free on board*) – neste caso o comprador assume todos os riscos e custos com o transporte da mercadoria assim que colocada a bordo do navio. Já o valor CIF (*cost, insurance and freight*), o fornecedor é responsável por todos os custos da entrega da mercadoria, incluindo o seguro marítimo e o frete.

das sem esse mesmo princípio, embora possam ser utilizadas para ajudar outros países em dificuldade por meio de operações de compra de títulos do país socorrido (contrapartida em divisas). Os gastos do governo, incluindo os investimentos, têm sua contrapartida gerada pelos impostos arrecadados ou outras receitas oriundas de empresas estatais ou do patrimônio público, que por sua vez estão associados a alguma fonte geradora de renda.

Por fim, é importante ressaltar que o movimento de capitais entre dois países é determinado, entre outras variáveis, pela diferença das taxas de juros e do risco relacionado às valorizações ou desvalorizações cambiais entre as moedas desses países.

1.10. Política Monetária (Déficit Público)

Um dos motivos apontados por economistas para as altas taxas de inflação no Brasil, na década de 1980, era o aumento constante do déficit público. Hoje, como se sabe, é possível ter um déficit público elevado e taxas favoráveis de inflação, o que não se pode esperar quanto às taxas de crescimento do PIB. Embora seja possível o controle da inflação com déficit elevado, é forçoso reconhecer que é sempre recomendável adotar medidas de ajustes fiscais que reduzam o nível do déficit público para percentuais aceitáveis em relação ao PIB.

De modo simplificado e a exemplo do que ocorre com as dívidas do cartão de crédito de uma pessoa, há aumento do déficit público (estouro do cartão) sempre que o governo desejar investir em algo novo sem uma poupança necessária para suportar o investimento. A poupança anual do governo é formada pela diferença entre o que o governo recebe (descontado das transferências diretas) e o que gasta (T - G). A entrada de recursos vem dos tributos e de outras receitas líquidas[22]. A saída é determinada pelo consumo da administração, subsídios, programas assistenciais, previdência e juros da dívida interna.

Como se sabe, além das despesas citadas, o governo assume dispêndios para ampliar a infraestrutura existente no país (algo novo). Esses dispêndios são os investimentos em rodovias, portos, aeroportos, saúde e educação. Assim, o déficit público (DP) se resume a:

$$\mathrm{DP} = \mathrm{I}_{público} - (\mathrm{T} - \mathrm{G}) \tag{1.38}$$

Ou seja, sem poupança não há como investir sem que aumente o déficit público[23]. Formulando de outra maneira, quando as obrigações do governo superam as entradas, surge uma necessidade de financiamento do setor público, aumentando, desse modo, a sua dívida pública. A necessidade de financiamento do setor público pode ser suprida por duas rotas distintas: emitindo títulos da dívida pública ou simplesmente emitindo papel-moeda via banco central[24], que é a instituição responsável pela política monetária do país (ver Figura 1.25).

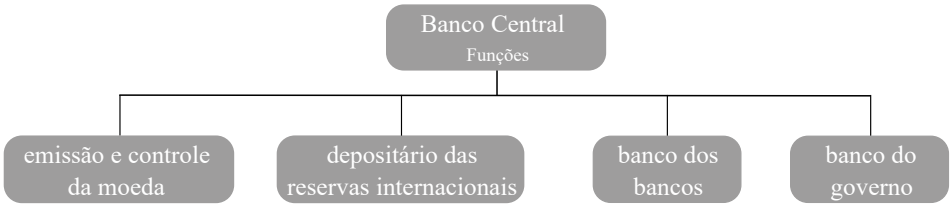


Figura 1.25 – Funções do Banco Central.

[22] É o resultado líquido da receita patrimonial (bens móveis e imóveis do governo), da receita industrial, da receita da agropecuária, serviços, das transferências correntes (as recebidas de outras pessoas de direito público) e de outras receitas correntes (multas, juros de mora, restituições, cobrança da dívida ativa etc.).

[23] É importante diferenciar déficit público de déficit primário. Este último é calculado excluindo os juros da dívida interna.

[24] As funções do BC são: emitir papel-moeda, depositar reservas internacionais, atuar como banco dos bancos e como banco do governo. Como banco dos bancos faz as compensações bancárias, cobra os depósitos compulsórios e empresta dinheiro para os bancos. Como banco do governo atua como depositário dos recursos arrecadados pelo tesouro nacional, e ao mesmo tempo concede empréstimos ao tesouro nacional.

Das duas opções, emitir título ou papel-moeda, a que resulta aumento do déficit público é a primeira opção. A segunda opção resulta (quase sempre) em um desequilíbrio da base monetária. Como se sabe, a emissão de papel-moeda sem a contrapartida de geração de renda do setor produtivo resulta (mas nem sempre) em aumento da inflação. Não obstante, conforme se viu na equação de Keynes, se a economia estiver abaixo do seu potencial de fatores de produção, o aumento dos gastos do governo pode resultar em aumento da renda devido ao efeito multiplicador. Outra situação em que a emissão de papel-moeda pode ajudar a economia, defendida por alguns economistas, é quando a liquidez dela está abaixo do desejável (quando a oferta da moeda está congelada).

É importante registrar que a emissão de papel-moeda sem a contrapartida da renda é questionada por alguns economistas, que enxergam nessas medidas o motivo da desordem da base monetária e, portanto, sustentam que o aumento da inflação é inevitável. Um ponto fundamental é que a expansão da base monetária pode vir de outras fontes que não do governo, como por exemplo a expansão do crédito bancário do setor privado. O BC é que tem o poder de controle da base monetária do país, que utiliza o depósito compulsório, dentre outros mecanismos, para reduzir ou ampliar o chamado *multiplicador bancário*, que em última instância é o que multiplica os meios de pagamentos de uma economia.

De forma simplificada, para que se possa entender o mecanismo, o multiplicador bancário ou multiplicador de meios de pagamentos é a capacidade que os bancos comerciais têm de ampliar a base monetária por meio de empréstimos a juros. Mais exatamente, trata-se de uma variável de multiplicação da base monetária de um banco comercial que resulta, em última instância, na criação de moeda[25].

O multiplicador bancário calcula a quantidade máxima dos meios de pagamentos que um depósito inicial pode se expandir, e é função de dois parâmetros fundamentais: a propensão dos clientes por recursos líquidos em seu poder (papel-moeda) e dos critérios que regulamentam os depósitos compulsórios. Se é definido como o multiplicador bancário da base monetária (H) para a geração dos meios de pagamentos dos bancos comerciais (M), então segue que

$$m \times \mathrm{H} = \mathrm{M} \tag{1.39}$$

Os meios de pagamentos são os volumes de papel-moeda em poder do público e os depósitos à vista[26] dos bancos comerciais. Portanto,

$$\mathrm{M} = c\mathrm{M} + d\mathrm{M} \Rightarrow c + d = 1 \tag{1.40}$$

onde c é o percentual dos meios de pagamentos em poder do público (papel-moeda) e d é o percentual dos meios de pagamentos em depósitos à vista em poder dos bancos comerciais. Já a base monetária H pode ser determinada com a seguinte expressão:

$$\mathrm{H} = c\mathrm{M} + \beta(d\mathrm{M}) \tag{1.41}$$

onde β (*taxa de reserva*) representa o percentual de todos os *encaixes* em relação aos depósitos à vista. Os encaixes são as somas de três componentes:

- Encaixes em moeda corrente guardadas nos cofres e nos caixas dos bancos comerciais.
- Encaixes voluntários que os bancos comerciais fazem perante o BC para uso em caso de desequilíbrio nas operações de compensações.
- Encaixes compulsórios exigidos pelo BC[27].

[25] Como se pode observar, não cabe somente ao BC a função de criar *moeda*, excetuando o papel-moeda. Os bancos comerciais também têm essa função, e a exercem por meio da criação de moeda fiduciária (fidúcia = confiança). É constituída por cheques, títulos de crédito, ordens de pagamentos etc.

[26] São os depósitos bancários pelos quais você pode emitir cheques ou utilizá-los via cartão de crédito (ver detalhes mais adiante).

[27] Em algumas situações o BC permite que uma parcela dos encaixes compulsórios seja mantida sob a forma de títulos da dívida pública no lugar de

A quantidade de papel-moeda em poder do público em uma determinada data é o saldo do que é emitido pelo BC via casa da moeda (creditam-se cédulas novas e debitam-se as antigas) deduzido do que existe em caixa no BC e nos bancos comerciais.

Substituindo as Eqs. (1.41) e (1.40) na Eq. (1.39), resulta a seguinte fórmula para o multiplicador bancário:

$$m = \frac{1}{1 - d(1 - \beta)} \tag{1.42}$$

onde o valor de *d* é próximo de 1. Uma simplificação para o multiplicador *m* é fazer *d* = 1 na Eq. (1.42), resultando *m* = 1/β. Ou seja, o multiplicado bancário é o inverso da taxa de reserva. Por exemplo, se β é igual a 25%, segue que *m* = 1/0,25 = 4. Desse modo, a quantidade máxima que o dinheiro depositado em um banco pode se expandir é de quatro vezes. Como a taxa de reserva é ditada em boa parte pelos depósitos compulsórios, resulta que quanto maior for o depósito compulsório, menor é o multiplicador bancário. Esse é um dos artifícios usado pelo BC para reduzir ou aumentar os meios de pagamentos disponíveis na economia.

Na função de banco dos bancos, o BC pode vir a emprestar dinheiro para que um determinado banco comercial equilibre suas contas em caso de déficit nas suas compensações bancárias. É evidente que o BC opera desse modo com cobrança de juros, são as chamadas *taxas de redesconto*. Outro mecanismo importante para o controle da oferta de moeda é por meio das operações de mercado aberto. Nessas operações, o BC compra títulos da dívida pública para expandir os meios de pagamentos do setor financeiro e vende títulos da dívida para reduzi-los.

Como o controle da emissão de papel-moeda é de exclusividade do BC, ele poderia emitir ordem para que a casa da moeda imprima dinheiro para empréstimo ao governo. Essa operação, embora controversa, costuma gerar problemas no controle dos meios de pagamento, que é da responsabilidade do BC. Em princípio, o governo deseja que essas operações sejam realizadas e o BC, também em princípio, se posicionará contra esses procedimentos. É daí que surgem as questões relacionadas à independência do BC em relação ao governo. Há defensores dessa independência e outros que se opõem. Desde 2021, o BC do Brasil é autônomo, independente.

Ensaio 1.4

Com base em Nóbrega (2005) e Leitão (2011), apesar do BC já existir desde abril de 1965, o governo começou a investigar o equilíbrio das contas nacionais com rigor acadêmico somente a partir da década de 1980, resultando anos depois na lei de responsabilidade fiscal, a qual impôs um controle dos gastos nas três esferas de governo. Até 1984, as demandas monetárias do orçamento eram atendidas por meio de uma operação de partidas dobradas em uma *conta de movimento* criada pela lei 4.595 de 1964. Essa conta, mantida pelo BC e operada pelo Banco do Brasil, transformou-se em uma conta de empréstimo sem a devida contrapartida em depósitos correspondentes. Os governadores de estados, ao descobrirem tal mecanismo "miraculoso" na primeira metade da década de 1980, passaram a sacar recursos monetários a descoberto no BB, sem que o BC pudesse ao menos acompanhar a expansão da base monetária por meio de algum mecanismo de controle. A casa da moeda, subordinada ao BC, simplesmente cumpria as determinações demandadas e imprimia o papel-moeda necessário. De fato, na época, nem mesmo o BC tinha uma gestão eficaz da base monetária vigente no país. Essa situação, de *conjunto confuso e incontrolável*[28] entre BC e o tesouro nacional, foi desnudada em um acordo firmado com o FMI naquela década.

Com esse desarranjo institucional e os saques incontroláveis dos governadores (irresponsabilidade fiscal), a inflação no Brasil encontrava um ambiente ideal para se *alimentar e crescer*. Como se sabe, somente

dinheiro. Nesses casos os bancos comerciais podem auferir lucros dessa parcela de encaixes.

[28] Termo emprestado do livro de Maílson da Nóbrega intitulado *O Futuro Chegou – Instituições e Desenvolvimento no Brasil*. Editora Globo, 2005.

em 1994 com o plano real, a inflação foi debelada, depois de vários planos de tentativas de contê-la ao longo da segunda metade da década de 1980 e início de 1990. Os planos anteriores ao real não atuavam nas causas básicas da desordem monetária, eram essencialmente congelamento de preços, salários e redução dos meios de pagamentos via confisco dos depósitos à vista (poupança e conta corrente).

O sucesso do plano real, em 1994, só foi obtido e mantido ao longo dos anos seguintes com mudanças realizadas anteriores e posteriores àquela data, que contribuíram para a estabilidade institucional e econômica via controle monetário da moeda. As ações mais significativas, dentre outras, foram: revisão das funções do BC e BB (agosto/1984), extinção da *conta de movimento* (novembro/1984), incumbência dada ao Congresso Nacional para expandir a dívida pública (agosto/1984), redução do tamanho do Estado e do déficit público com a privatização de mais de uma centena de empresas estatais (década de 1990), flexibilização do monopólio da União quanto à exploração e produção de petróleo, criação de agências reguladoras das atividades econômicas (década de 90), renegociação da dívida pública dos estados, aprovação da lei de responsabilidade fiscal (2000) e outras medidas relacionadas à reforma do Estado.

A estabilidade da moeda e das instituições são frutos de experiências de vários governos e obras de vários homens públicos. Não obstante, não se pode negar a atuação ímpar na preparação e implementação do plano real de economistas oriundos da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Artigos relacionados à inflação inercial e ao controle da moeda publicados por André Lara Resende, Pérsio Arida, Edmar Bacha, Bresser Pereira, Francisco Lopes, José Marcio Rego e Mário Henrique Simonsen, dentre outros economistas, foram fundamentais. Tais artigos, de valores incontestes, foram apresentados com maestria por Simonsen ao economista Franco Modigliani em academias americanas.

1.11. Mercado Financeiro

Antes de expor o princípio para determinação da taxa de juros por parte do BC, é importante definir alguns termos, entre eles:

- Moeda – é o que se usa para transações na economia, e que não paga juros. No mundo há dois tipos de moeda: *papel-moeda*, que são as moedas e notas em espécie e os *depósitos à vista*, que são os depósitos bancários pelos quais você pode emitir cheques ou utilizar via cartão de crédito.
- Títulos – pagam uma taxa de juros positiva, i. Os títulos não são usados para transações comuns.
- Investimento – é um termo utilizado para designar a compra de novos bens de capital, de máquinas, edifícios, fábricas etc. Quando você compra ativos financeiros, deve ser usado o termo investimento financeiro.

1.11.1. Demanda e oferta de moeda

Segundo Blanchard (2017), a demanda por moeda (papel-moeda e depósitos à vista) depende do volume de transação na economia e da taxa de juros. Embora o volume total de transações seja difícil de mensurar, é muito provável que seja proporcional à renda nominal, Y. Um modelo simples, seria definir a demanda por moeda, conforme expressão a seguir:

$$\mathrm{M}_d = \$\mathrm{YL}(i)^{(-)} \tag{1.43}$$

onde \$Y é a renda nominal e $\mathrm{L}(i)^{(-)}$ uma função da taxa de juros. O sinal negativo serve apenas para indicar que a taxa de juros tem um efeito negativo sobre a demanda, ou seja, se a taxa de juros sobe, as pessoas tenderão a diminuir a demanda por moeda, ao passo que se os juros caem, a demanda por moeda por parte das pessoas aumenta. Em termos práticos, quando o governo aumenta a taxa de juros de seus títulos, as pessoas são propensas a comprar títulos do governo, reduzindo sua demanda por moeda, sobretudo depósitos à vista. Ao passo que, se a renda nominal dobra de \$Y para \$2Y, a demanda por moeda também dobra.

Em um mercado financeiro equilibrado, a oferta de moeda é igual à demanda por moeda, ou seja, $M_o = M_d$. Assim, o modelo da Eq. (1.43) pode ser simplificado para:

$$\begin{gathered}\text{Oferta de moeda} = \text{Demanda por moeda} \\ M = \$YL(i)\end{gathered} \tag{1.44}$$

Até aqui, as variáveis de equilíbrio do mercado financeiro são a renda nominal, a taxa de juros e a demanda de moeda por parte das pessoas, seja papel-moeda ou depósitos à vista. Por exemplo, no gráfico da esquerda da Figura 1.26, a taxa de juros dever ser aquela em que a oferta de moeda (que independe da taxa de juros) seja igual à demanda por moeda (que depende da taxa de juros). Note que a demanda das pessoas por moeda é uma variável que depende do nível de transações na economia, e isso depende da renda nacional e das taxas de juros.

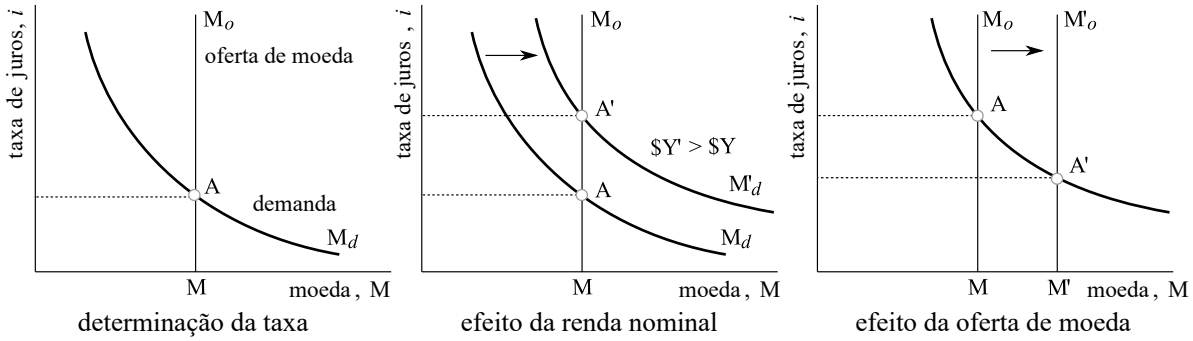


Figura 1.26 – Efeitos da oferta da moeda e da renda nominal sobre a taxa de juros, Blanchard (2017).

Veja, no gráfico central da Figura 1.26, dada a oferta de moeda, que um aumento da renda nominal leva a um aumento da taxa de juros, uma vez que mais transações são realizadas e que demandam mais moeda a qualquer taxa de juros. O motivo é que, à taxa de juros inicial, a demanda por moeda excede a oferta. Para restabelecer o equilíbrio, é necessário um aumento da taxa de juros, diminuindo o montante de moeda retido pelas pessoas. Já no gráfico da direita da Figura 1.26, é fácil perceber que um aumento da oferta de moeda leva a uma diminuição da taxa de juros.

Em uma economia moderna, a forma de alterar a oferta de moeda consiste na compra e venda de títulos no mercado aberto feita pelo BC, como já referido. Por exemplo, se o BC deseja aumentar a oferta de moeda, o faz comprando títulos pagando por meio da criação de moeda (*operação expansionista*). Se deseja diminuir, vende títulos, retirando a circulação de moeda que recebe da venda. Essas operações são chamadas de *operações a mercado aberto.*

1.11.2. A demanda por moeda do BC

O BC tem dois componentes de demanda por moeda: o primeiro é a demanda de moeda por parte das pessoas e o segundo é a demanda de reservas por parte dos bancos. De fato, o ativo de qualquer BC são seus títulos, e o passivo são o montante de papel da economia. Pode-se resumir o equilíbrio entre oferta e demanda de moeda em três pontos:

- A demanda por moeda do BC é igual à demanda por moeda pelas pessoas mais a demanda por reservas pelos bancos.
- A oferta de moeda está sob controle direto do BC.

A taxa de juros de equilíbrio é tal que a demanda por moeda e a oferta de moeda são equivalentes, ver Figura 1.27.

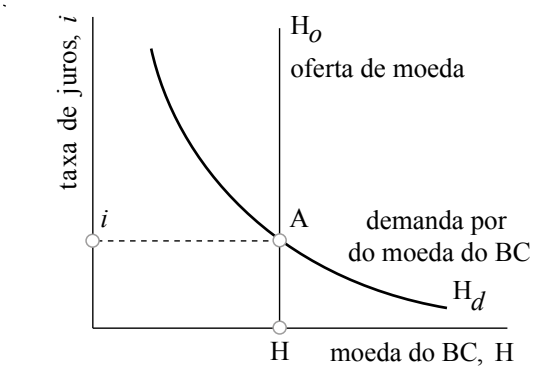


Figura 1.27 – Equilíbrio do mercado de moeda do Banco Central.

Já a demanda por reservas por parte dos bancos, denominada H_d, é dada por:

$$H_d = \beta M_d = \beta \$YL(i) \tag{1.45}$$

onde β é a razão de reservas, que representa o montante de reservas que os bancos têm por cada $1 de depósito à vista. A demanda por moeda (papel-moeda e depósitos à vista) é determinada pelos mesmos motivos já expostos, ou seja, as pessoas demandarão mais dinheiro quanto maior for o nível de transações e menor for a taxa de juros.

Como se sabe, o papel-moeda é mais conveniente para pequenas transações (incluindo transações ilegais), ao passo que os depósitos à vista são mais indicados para as transações de maiores valores. Supondo que as pessoas detenham uma proporção fixa de papel-moeda *c* e uma proporção de (1- *c*) de depósitos à vista, pode-se escrever as seguintes expressões para as demandas por moeda:

$$\begin{aligned} C_d &= cM_d \\ D_d &= c(1-c)M_d \end{aligned} \tag{1.46}$$

onde C_d é a demanda por papel-moeda e D_d é demanda por depósitos à vista. A Figura 1.28 indica as equações que resumem o modelo de determinação da demanda e oferta de moeda do BC.

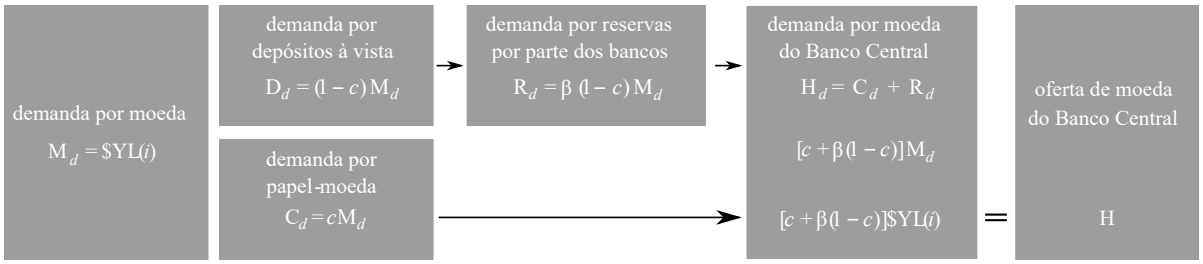


Figura 1.28 – Determinação da demanda e oferta de moeda da BC, Blanchard (2017).

Note que a primeira equação indica o primeiro componente da demanda por papel-moeda do BC – a demanda de papel-moeda por parte do público. Ora, a demanda por depósitos à vista das pessoas resulta em uma demanda de reservas por parte dos bancos comerciais, que é o segundo componente da demanda por reservas do BC. Assim, se D é o montante de depósitos à vista, e já com a definição de β, então a reserva R dos bancos fica definida como:

$$R = \beta D \tag{1.47}$$

e a demanda total por moeda do BC, H_d, é:

$$H_d = C_d + R_d = cM_d + \beta(1-c)M_d \tag{1.48}$$

ou

$$H_d = [c + \beta(1 - c)]\$YL(i) \quad (1.49)$$

Note que a Eq. (1.49) é igual à Eq. (1.41), uma vez que e M = $YL(*i*) e *d* = 1 - *c*.

1.11.3. Lastro da moeda – resumo

O lastro serve para garantir a validade de um ativo. No passado, o valor da moeda, por exemplo, tinha como lastro as reservas de metais preciosos como ouro e prata. De acordo com Villarreal (1984), a teoria pioneira do padrão ouro foi elaborada por David Hume em 1752, que destacava a relação entre a moeda e níveis de preço. Cada banco era obrigado a converter as notas bancárias em ouro ou em prata, sempre que solicitado pelo cliente. Nem todos os países adotaram esse sistema de lastro. A emissão de notas bancárias sem esse lastro, por exemplo, causou escândalos na França, além de desestabilizar a economia de outros países.

Assim mesmo, o padrão ouro ditava o lastro da maioria das moedas, e prevaleceu até 1944, quando se deu a conferência de Bretton Woods. Essa conferência reuniu 730 delegados de todas as 44 nações aliadas em Bretton Woods (New Hampshire, USA) para regularizar a situação monetária e financeira internacional após o fim da II Guerra Mundial. Foram assinados acordos, ratificados pelos governos membros, estabelecendo o Banco Internacional de Reconstrução e Desenvolvimento (BIRD) e o Fundo Monetário Internacional (FMI) como instituições financeiras para a estabilidade econômica dos países membros.

Conforme Lipsey (1975), o acordo definiu que cada país deveria manter a taxa de câmbio de sua moeda rastreada ao dólar, com limite de variação de cerca de 1%. A moeda americana, por sua vez, estaria ligada ao valor do ouro em uma base fixa, com cada dólar equivalendo a 35 gramas de ouro. As propostas iniciais foram elaboradas por John Maynard Keynes e Harry Dexter White. Pelo Brasil se destacaram os economistas Octavio Gouvea de Bulhões e Eugênio Gudin, conforme Barreiros (2009). Esse padrão se manteve até o choque econômico, adotado por Nixon em 1971.

Dentre as medidas adotadas por Nixon, em resposta ao aumento da inflação, uma delas foi o cancelamento unilateral da conversibilidade internacional direta do dólar americano em ouro. Embora as ações de Nixon não tenham abolido formalmente o sistema existente de Bretton Woods, a suspensão de um de seus pilares tornou o sistema inútil. Em 1973, finalmente, o sistema de Bretton Woods foi substituído de fato pelo regime atual de lastro, baseado em moedas fiduciárias, incluindo o dólar americano.

Hoje, ao contrário do passado, as moedas em geral não têm mais lastro em ouro, prata ou dólar, mas nas chamadas moedas fiduciárias (confiança). Ou seja, são as instituições de cada país, sobretudo o governo e as entidades emissores de moedas (bancos centrais), as verdadeiras depositárias da confiança dos agentes econômicos. Qualquer governo no mundo pode emitir o volume de moeda própria que desejar, mas há de ter um lastro na riqueza gerada, expressa pelos bens e serviços produzidos pelo país, sob pena de perda de valor da moeda e o surgimento da inflação (monetarismo).

Com relação às criptomoedas, há um debate se de fato há a necessidade de um lastro. Alguns advogam que o lastro das criptomoedas é a tecnologia (mineração), outros afirmam que continua sendo a fidúcia de quem lança a moeda digital. Com efeito, muitos governos, incluindo o Brasil, já sinalizaram propostas para o controle da emissão de moedas digitais, cujo lastro é a confiança de seus bancos centrais e de suas instituições monetárias.

1.12. O Papel das Empresas, Estado e Sociedade Civil

Segundo Pitombo (2007), com as ameaças das mudanças climáticas e da degradação ambiental, miséria e privações ainda existentes nos países do chamado *terceiro mundo*, expressões como ação social, programa social, cidadania empresarial, terceiro setor, desenvolvimento sustentável, marketing social, responsabilidade

corporativa e ESG[29] invadiram os meios de comunicação em campanhas publicitárias de empresas e governos. Não há como deslegitimar os movimentos que buscam conciliar o interesse privado das empresas com os interesses coletivos da sociedade.

1.12.1. Empresas

O papel das empresas é uma questão ainda aberta. Há pressões para que ajudem a resolver graves problemas sociais e ambientais e, em consequência, os gestores enfrentam a difícil realidade de administrar o interesse dos acionistas, que desejam maximizar o retorno do capital empregado e os demais interesses de outros atores da economia. Alguns questionamentos em relação ao papel da empresa são:

- As empresas devem desempenhar seu papel econômico e, ao mesmo tempo, atender às crescentes demandas sociais?
- Devem elas sacrificar a eficiência produtiva, desviando-se um pouco do foco dos negócios para implementar ações sociais?
- Para atender às demandas sociais, as empresas devem desempenhar atividades próprias de governos ou de organizações não governamentais (ONG's)?
- De que forma as empresas podem ser socialmente responsáveis?
- É melhor praticar ações assistenciais ou fortalecer o Estado, para que este possa garantir a universalidade dos serviços sociais?

São questões intrigantes que vêm sendo discutidas há bastante tempo. De um lado, a atuação social das empresas tem sido objeto de críticas. Uma das primeiras foi formulada por Friedman (1970), para quem só havia "uma responsabilidade social do negócio – usar seus recursos e empenhar-se em atividades que possam aumentar seus lucros obedecendo às regras do jogo, o que quer dizer participar de uma competição livre e aberta, sem truques ou fraudes''.

Em 1984 surgiu a teoria do *stakeholder*[30], que trazia a promessa de conciliar a busca da eficiência econômica das empresas com o atendimento às demandas sociais. Essa teoria se transformou no modelo dominante, como alternativa à teoria clássica da firma. Margolis e Walsh (2003) resumiram as principais críticas a essa teoria com as seguintes colocações:

- Ao se partir do princípio de que o bem-estar da sociedade é maximizado quando todas as firmas buscam maximizar a riqueza do acionista, há uso indevido dos recursos deles e, por vezes, dos empregados, quando a empresa se engaja em ações sociais.
- As empresas podem otimizar suas contribuições para a sociedade fazendo o que elas estão mais bem preparadas para fazer, ou seja, empregar a sua força de trabalho na produção de bens e serviços ao mercado.
- Finalmente, os gestores terão dificuldades se obrigados a tomar decisões que levem em conta os interesses de todas as partes interessadas, que envolvem, em geral, objetivos antagônicos.

Embora se concorde que a empresa não pode maximizar o valor se ignorar os interesses das diversas partes interessadas, Jensen (2001) adverte que esses interesses são conflitantes e que os *tradeoffs* são inevitáveis. Os clientes sempre desejam produtos e serviços de alta qualidade e preços baixos; os empregados querem altos salários, bons benefícios e ótimas condições de trabalho; os fornecedores de capital querem altas taxas

[29] *Environmental, Social and Governance* (Ambiental, Social e Governança, ASG).

[30] *Stakeholder* – expressão utilizada para designar partes interessadas, ou seja, qualquer indivíduo ou grupo que possa afetar a empresa ou por ela ser afetado.

de retorno e baixos riscos; as comunidades demandam altos retornos assistenciais, investimentos sociais e a criação de empregos estáveis etc. Jensen (2001) chegou à conclusão de que as firmas, em última análise, devem ser guiadas por uma única função-objetivo, que deve ser a criação de riqueza. Tal autor revela que o debate sobre a maximização de valor *versus* o atendimento dos *stakeholders* é equivocado e que o conflito verdadeiro seria: a empresa deve ser regida por uma única função-objetivo ou por múltiplos objetivos?

Obviamente, todo processo de decisão envolve a escolha de uma função-objetivo, considerando-se que, em geral, é impossível maximizar mais de uma função ao mesmo tempo. Jensen (2001) propõe que se utilize a estrutura da teoria do *stakeholder*, mas que, no longo prazo, se aceite a maximização do valor da empresa como o critério para se fazer os *tradeoffs* necessários. Assim, a empresa pode prestar atenção às suas diversas partes interessadas sem descuidar-se do seu objetivo maior, sempre usando um critério consistente com o objetivo de tornar as decisões independentes das preferências pessoais dos gestores.

A função social da empresa está relacionada à satisfação das demandas da sociedade quanto às necessidades de bens e serviços, tanto em nível de ordenamento jurídico internacional quanto nacional. Quando se trata de empresas privadas, vale lembrar que o direito à propriedade está previsto na declaração universal dos direitos humanos de 1948 e na constituição brasileira de 1988, que também ressalta a função social das empresas no sentido de cumprir as leis e utilizar adequadamente os recursos naturais disponíveis, preservando o meio ambiente e observando as disposições que regulam as relações de trabalho.

1.12.2. Estado e sociedade civil

Além da dicotomia clássica estado-mercado, Bobbio (2004) viu outra grande dicotomia entre Estado e sociedade civil. Na linguagem política de hoje, a expressão "sociedade civil'' se refere à esfera das relações sociais não reguladas pelo Estado, embora não se possa defini-la sem delimitar a sua extensão e sem redefinir o Estado, demarcando os seus limites.

Para Bobbio, a democracia moderna repousa em uma concepção individualista da sociedade, mas é preciso ter claro que: "o fundamento de uma sociedade democrática é o pacto de não-agressão de cada um com os demais e a obrigação de obedecer às decisões coletivas tomadas segundo as regras do jogo preestabelecidas''. Com o pacto de não-agressão recíproca, os indivíduos abandonam o estado de natureza; com o pacto de obediência às regras estabelecidas em comum acordo, eles constituem uma sociedade civil. Mas só instituindo um poder comum dão vida a um Estado (Bobbio 2003, p. 254–255).

O atual contexto mundial – dominado pelas modernas tecnologias, pela globalização e pelos problemas ecológicos – motivou profundas reflexões sobre a reforma do Estado. Na Inglaterra, segundo Giddens (2001), iniciou-se o debate sobre uma terceira via, que vê a necessidade de reconstruir o Estado indo além das posições ideológicas. Nesse modelo, as instituições da sociedade civil ganham importância e se tornam parceiras do governo em programas de desenvolvimento das comunidades, buscando-se uma sinergia entre Estado, mercado e sociedade civil. Para Giddens (2001), o individualismo também está aliado às pressões por maior democratização, sendo necessário que se encontre um equilíbrio entre as responsabilidades individuais e coletivas: "uma sociedade civil saudável protege o cidadão do poder estatal avassalador. No entanto, a sociedade civil não é, como alguns pensam indulgentemente, uma fonte de ordem e harmonia espontâneas''. Por outro lado, com o crescimento do terceiro setor, verifica-se que muitas ONG's, embora representando minorias, tentam impor seus padrões e vontades a toda a sociedade civil, algumas vezes com viés ideológico.

No Brasil, a sociedade civil se fortaleceu nas quatro últimas décadas, principalmente a partir da constituição de 1988. Na área da assistência social, prevê a participação da população por meio de organizações representativas, na formulação de políticas e no controle das ações em todos os níveis (Art. 204). A carta magna formalizou um compromisso da sociedade com a assistência social: todos os brasileiros passaram a ter o direito à aposentadoria, inclusive aqueles que não contribuíram para a Previdência (Art. 203); a saúde foi enfatizada

como “direito de todos e dever do Estado’’ (Art. 196); a educação foi considerada “direito de todos e dever do Estado e da família’’ (Art. 205) etc.

Em 1995, por exemplo, o plano diretor da reforma do aparelho do Estado buscou fortalecer as parcerias entre o Estado e instituições da sociedade civil na prestação de serviços sociais. Além das privatizações de empresas estatais, esse plano propôs descentralizar, para o setor público não-estatal a execução de serviços que não envolvem o exercício do poder do Estado. Foram criadas as organizações sociais (OSS, Lei 9.637/98) e as organizações da sociedade civil de interesse público (OSCIP, Lei 9.790/99), que são pessoas jurídicas de direito privado sem fins lucrativos. Elas devem ser reconhecidas, acompanhadas e fomentadas pelo Estado, com o propósito de executar serviços sociais relevantes, notadamente nas áreas de ensino, pesquisa científica, desenvolvimento tecnológico, proteção e preservação ambiental, cultura e saúde.

2

TEORIA DE AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS

Talvez o nosso melhor plano possível seja seguir aquilo que a consciência nos dita.
De outra forma, no mínimo, temos de viver com a sensação de que nos traímos,
sabendo que estamos a aturar o que não somos capazes de tolerar.
Jordan Peterson

Diante da escassez de recursos de capital, um decisor deve sempre escolher, dentre as alternativas possíveis, o projeto mais conveniente do ponto de vista econômico para aplicar o capital disponível, uma vez que não há garantia de retorno para todas as alternativas que se apresentam no mundo empresarial.

É fundamental que os investimentos a serem realizados por uma empresa recebam atenção especial de seus administradores financeiros, incluindo os profissionais que se debruçam sobre a viabilidade técnica do projeto. O reconhecimento desse fato tem despertado interesse pelo estudo das técnicas e critérios que norteiam as decisões de investimento, sobretudo em empresas de petróleo, tendo em vista que o risco de insucesso é considerável e nem sempre é fácil de avaliar. Apesar de ampla literatura sobre o assunto, ainda é comum a derrocada de empresas por apostarem em projetos sem a devida avaliação econômica.

2.1. Viabilidade Econômica de Projetos

Sucintamente, pode-se afirmar que o estudo de viabilidade econômica de projetos trata de parâmetros quantitativos que permitem a quem decide aceitar ou rejeitar propostas de investimentos. Inicialmente, para que se compreenda a essência da metodologia, é necessário diferenciar o termo projeto do termo investimento:

- Projeto – quando há a decisão de alocar esforços temporários com o objetivo de criar um produto, serviço ou resultado útil. Os projetos estão associados, em geral, a um fluxo de valores monetários representados graficamente pelas receitas e dispêndios.
- Investimento – entende-se por investimento de capital o emprego de recursos financeiros visando obter benefícios no futuro.

É comum classificar os projetos quanto à duração (curto, médio e longo prazo), quanto à natureza (tático, estratégico, exploratório, piloto etc.), incerteza (técnica, econômica, geológica, política etc.), finalidade (reposição, redução de custos, expansão, ambiental, P&D, aumento da flexibilidade ou de confiabilidade etc.) e quanto à sua relação com outros projetos (dependente, independente, mutuamente exclusivo, contingente etc.).

2.1.1. Tempo de projeto

Os estudos de viabilidade econômica de projetos estão sempre vinculados à *duração do projeto*. Em termos práticos, nem sempre é fácil determinar a vida útil de um projeto com exatidão, ainda mais os da indústria de petróleo. Em projetos de instalação de equipamentos, por exemplo, toma-se para vida útil o prazo fixado pela legislação para sua depreciação.

No Brasil, em termos contábeis, o cálculo da depreciação obedece aos critérios determinados pelo governo, por meio da Secretaria da Receita Federal. É comum um horizonte de 25 anos para instalações industriais, dez anos para máquinas e equipamentos, cinco anos para veículos, dez ano para móveis e 25 anos para imóveis etc.

2.1.2. Premissas gerais

A decisão de aceitar ou rejeitar uma proposta de investimento é uma decisão complexa devido à multiplicidade de fatores ou índices que podem ser utilizados. Os métodos discutidos aqui demandam algumas premissas básicas, a saber:

- O objetivo dos empreendimentos é maximizar o retorno do capital investido.
- O valor do dinheiro está sempre relacionado com o tempo (fluxo de caixa descontado, FCD).
- Teoricamente, existirá sempre uma taxa de juros no mercado, a qual as empresas podem aplicar seus recursos em vez de realizar o projeto.
- A análise dos projetos é determinística[31], isto é, não existe incerteza. Os fluxos de caixa são considerados como exatos.
- Os estudos de viabilidade econômica são realizados considerando sempre os valores monetários expressos em uma moeda estável.

A característica principal dos métodos utilizados na avaliação de projetos é a adoção do sistema de FCD, ou seja, leva em consideração o valor do dinheiro no tempo. Esse fato evidencia a necessidade de se utilizar uma taxa de desconto aplicada sobre os fluxos de caixa associados aos projetos. A *decisão de financiamento* é tomada após a *decisão de investimento*, normalmente com taxas de descontos distintas, e seu objetivo é viabilizar financeiramente um projeto em que a decisão de investimento foi tomada a priori. Como regra geral, a prática empresarial comprova que boas decisões de investimento agregam mais valor à empresa do que boas decisões de financiamento.

2.1.3. Taxa mínima de atratividade

Em sua forma mais simples, os métodos que empregam o FCD pressupõem que o investidor tem os recursos necessários ao projeto aplicados a uma taxa de juros ou pode financiar esses recursos de uma instituição financeira a certa taxa de juros. A essa taxa de juros de aplicação ou de financiamento que dispõe o investidor chama-se de *taxa mínima de atratividade*, TMA.

A taxa mínima de atratividade é uma taxa de juros que expressa uma lucratividade mínima pretendida pelo investidor e, teoricamente, está sempre disponível para aplicação de capital. No processo de avaliação de projetos existirá sempre uma taxa de juros que sirva de comparação para permitir uma tomada de decisão, como aceitar ou rejeitar uma proposta. Todos os recursos disponíveis de uma empresa podem ser facilmente aplicados a essa taxa de juros. Isto significa que, quando a empresa decide aplicar recursos em uma proposta de investimento, desiste de investir na taxa mínima de atratividade, sempre disponível.

A taxa mínima de atratividade varia de empresa para empresa, até mesmo de indivíduo para indivíduo, e ainda, de região para região. Ela depende das tendências conjunturais, das expectativas de mercado e varia de acordo com os volumes disponíveis para investimento. A taxa de juros paga pelo governo, considerada em tese sem risco, pode ser tomada em alguns casos como a taxa mínima de atratividade para o retorno de investimentos. Já algumas empresas, por exemplo, adotam como TMA uma taxa média de retorno obtida historicamente em seus projetos de investimentos.

Qualquer que seja o estudo de viabilidade econômica de um projeto, quem decide sempre estará diante de uma comparação de duas propostas, no mínimo. Isso porque, além do projeto avaliado, existe a alternativa de deixar o capital aplicado na taxa mínima de atratividade. Essa alternativa é chamada algumas vezes de alternativa Z. Uma proposta qualquer de investimento só é aceita quando apresenta rentabilidade superior à mínima requerida, pois em caso contrário, o melhor é investir na alternativa Z.

[31] Os investimentos sob incertezas serão tratados com detalhes nos **Capítulos 5**, **6** e **7 (Tomo II).**

Observe que a taxa de desconto utilizada deve ser a mais alta taxa de retorno a ser obtida em uma proposta alternativa para os mesmos recursos aplicados. Se, por exemplo, a empresa só tem a oportunidade de aplicar seus recursos em um fundo de letras do governo (por exemplo, 7% ao ano), essa será a taxa mínima de atratividade da empresa, ou sua alternativa Z, que servirá de base para comparação com outros projetos alternativos. No entanto, se a empresa dispõe de vários projetos, em que o menos rentável produz um retorno de 10% ao ano, por exemplo, então essa será a taxa adequada para servir de padrão mínimo requerido.

Em algumas empresas a taxa mínima de atratividade é definida de forma discricionária pela alta gestão da área financeira, tomando como base o custo médio ponderado de capitais (CMPC[32]). A partir da taxa definida pelo cálculo do CMPC, a TMA é ajustada para mais ou para menos considerando-se diversos fatores, dentre eles:

- Desalavancagem – para reduzir o endividamento recomenda-se uma TMA > CMPC.
- Compensações por eventuais projeções otimistas no fluxo de caixa – recomenda-se maior TMA.
- Estabilidade temporal das taxas – quanto menos estáveis as taxas, maior a TMA.
- Incentivos à disciplina de capital – quanto maior a disciplina de capital, maior a TMA.
- Atuação estratégica etc.

2.2. Estrutura de Capital

Os recursos básicos de uma empresa são provenientes do fluxo de caixa produzido por seus ativos ou provenientes de recursos de terceiros. A composição desses recursos, que basicamente é uma decisão de estratégia financeira, define a estrutura de capital da empresa, conforme Brealey e Myers (2006).

A estrutura de capital financia o ativo permanente e parte do ativo circulante. O custo de capital próprio é baseado no valor esperado da taxa de retorno sobre o patrimônio líquido[33] durante um intervalo de tempo. É essa a taxa que os investidores exigem para investimento patrimonial em uma empresa. Já o custo de capital de terceiro é baseado, normalmente, nas taxas de mercado de capitais. Quando uma empresa é financiada exclusivamente por ações ou capital próprio, o fluxo de caixa pertence aos acionistas, ao passo que quando é financiada tanto por ações como por empréstimos de terceiros, uma parcela do fluxo de caixa, em tese sem risco, pertence aos credores e outra parcela, com risco, pertence aos acionistas.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.1 – Estime o custo médio ponderado de capital (CMPC efetivo) com base na evolução do patrimônio líquido da Petrobras durante o período de 2004 a 2010.

Solução

Os dados para a solução do Exemplo 2.1 estão indicados na Tabela 2.1 a seguir:

Tabela 2.1 – Evolução do patrimônio líquido da Petrobras e inflação anual (2004 a 2010)

	Dados referentes ao patrimônio líquido da Petrobras e inflação (2004 a 2010)						
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
PL em R$ milhões	62.130	78.785	97.531	113.854	138.365	164.204	310.255
Evolução anual do PL (%)	–	26,81%	23,79%	16,74%	21,53%	18,67%	88,94%
Taxa de inflação (IPCA %)	7,60	5,69	3,14	4,46	5,90	4,31	5,91

[32] Ver detalhes mais adiante.

[33] O patrimônio líquido representa os valores que os sócios ou acionistas têm na empresa em um determinado momento. No balanço patrimonial representa a diferença entre o valor dos ativos e dos passivos.

O custo médio ponderado de capital, considerando o período de seis anos (2004 a 2010), é estimado pela evolução média anual do patrimônio líquido, ou seja:

$$(1 + \text{CMPC})^6 = \frac{\$310.255}{\$62.130} \Rightarrow \text{CMPC} = 30{,}74\%\ a.a. \tag{2.1}$$

Note que, em função do ano de 2010 (ver Tabela 2.1), o CMPC acaba resultando um valor elevado, superestimado. Cabe lembrar que naquele ano a Petrobras havia sido capitalizada pelo governo federal por cessão onerosa. Retirando o ano em questão, o CMPC para o período de 2004 a 2009 (cinco anos) resultaria:

$$(1 + \text{CMPC})^5 = \frac{\$164.204}{\$62.130} = 2{,}6429 \Rightarrow \text{CMPC} = 21{,}46\%\ a.a. \tag{2.2}$$

Descontando a inflação média durante o período de 2004 a 2009, que foi de 4,7%, resulta o CMPC efetivo, ou seja:

$$\text{CMPC}_{\text{efetivo}} = \frac{1 + \text{CMPC}_{\text{nominal}}}{1 + f} - 1 = \frac{1 + 0{,}2146}{1 + 0{,}047} - 1 = 16\%. \tag{2.3}$$

▪▪▪▪▪▪

Outra forma de se chegar ao CMPC é considerar os custos dos recursos de todas as fontes postas à disposição da empresa, sejam próprios ou de terceiros. Em geral, o custo do capital de terceiros é menor do que o custo do capital próprio. Não obstante a vantagem em alavancar os investimentos utilizando-se apenas do capital de terceiros, uma vez que seu custo é menor, nem sempre é o recomendável. O retorno do investimento (projeto) pode não resultar o retorno esperado, deixando a empresa em dificuldades para cumprir com suas obrigações contratuais de financiamento[34].

Adotar uma média ponderada de capital próprio e capital de terceiro é a recomendação da área financeira para uma menor exposição ao risco, conforme indica a Eq. (2.4):

$$\text{CMPC} = \left\{\left[\widetilde{k_e^{equity}} \times (\text{E}/(\text{E} + \text{D}))\right]\right\} + \left\{\left[\widetilde{k_d^{debt}} \times (\text{D}/(\text{E} + \text{D}))\right]\right\} \tag{2.4}$$

onde E (*equity*) é a proporção do capital próprio, D (*debt*) é a proporção do capital de terceiros, k_e é o retorno esperado do capital próprio (retorno dos ativos próprios) e k_d é a taxa de financiamento. A taxa de financiamento, em geral, é igual à soma de uma taxa livre de risco e um prêmio de risco associado à empresa que toma o empréstimo.

A precificação do retorno de ativos próprios é obtida com o modelo CAPM[35] (Capital Asset Pricing Model), conforme indica a Eq. (2.5):

$$\text{E}(k_e) = \text{E}\left(k_f\right) + \beta_i\left[\left(\text{E}(k_m) - \text{E}\left(k_f\right)\right)\right] \tag{2.5}$$

onde E(k_e) é o retorno esperado do ativo que se pretende precificar, E(k_f) é o retorno esperado de um ativo livre de risco e E(k_m) é o retorno esperado do mercado. O segundo termo do lado direito da Eq. (2.5) é o prêmio de risco, que é igual à diferença entre o retorno esperado do mercado e o retorno esperado de um ativo livre de risco multiplicado por β_i. Esse fator é a covariância entre o retorno do ativo que se pretende precificar e o retorno da carteira de mercado dividida pela variância da carteira de mercado, ou seja:

[34] Ver mais detalhes no item 2.6.

[35] O método CAPM está detalhado no **Capítulo 6**.

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(k_e, k_m)}{\sigma^2(k_m)} \tag{2.6}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.2 – De acordo com relatório de 2009 da Petrobras, o patrimônio líquido e a dívida de financiamento eram aproximadamente de \$164 e \$85 bilhões, respectivamente. Considere que sejam essas as fontes de financiamento da empresa, e que os acionistas, por hipótese, sejam remunerados à taxa de 16% e o custo da dívida de financiamento seja de 10%. Calcule o CMPC para o ano de 2009.

Solução

A composição do capital para o ano de 2009 seria

$$\text{Próprio} = \frac{164}{164+85} \cong 65{,}86\% \qquad \text{e} \qquad \text{Terceiros} = \frac{85}{164+85} \cong 34{,}14\% \tag{2.7}$$

De acordo com a definição do custo médio ponderado de capital, expresso na Eq. (2.4), resulta:

$$\text{CMPC} = 0{,}16 \times 0{,}6586 + 0{,}10 \times 0{,}3414 \cong 14\% \tag{2.8}$$

▪▪▪▪▪▪

2.3. Critérios de Avaliação Econômica

Destacam-se duas classes de critérios de avaliação econômica de projetos de produção de petróleo:

- Critérios de liquidez.
- Critérios de rentabilidade.

2.3.1. Critério de liquidez

O critério de liquidez diz respeito ao tempo necessário para que o investimento efetuado seja totalmente recuperado com as receitas líquidas do projeto. Assim serão preferidos os projetos cujo tempo de retorno seja menor. Quanto mais líquido for o projeto, isto é, quanto menor for o tempo de recuperação do capital, menor é o risco do projeto. Quanto mais se espera para recuperar o investimento, maior é a exposição ao risco, ou seja, maiores são as possibilidades de perdas.

Dentre os critérios de liquidez, o mais utilizado é o tempo de retorno do capital (*payback*), definido como o tempo necessário para que as receitas líquidas provenientes do projeto, descontadas à TMA, tenham valor presente acumulado igual aos investimentos realizados, também descontados à TMA.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.3 – Determine o tempo de retorno de um capital de \$2 mil considerando-se uma taxa mínima de atratividade de 5% ao período e fluxo de caixa líquido conforme indicado da Figura 2.1 a seguir.

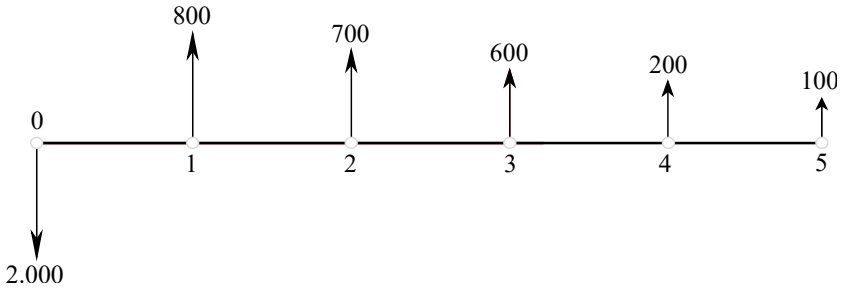


Figura 2.1 – Fluxo de caixa líquido – Exemplo 2.3.

Solução

Para se chegar ao tempo de retorno do capital, deve-se atualizar cada receita com a taxa mínima de atratividade e verificar, graficamente, em qual período o capital de $2 mil é recuperado. Para isso, recomenda-se construir um diagrama conforme indicado na Tabela 2.2 a seguir.

Tabela 2.2 – Períodos e valores atualizados das receitas e dispêndios

	Receita	Valor atual	Acumulado	Soma acumulada ($)
				–2.000
1	800	762	762	–1.238
2	700	635	1.397	–603
3	600	518	1.915	–85
4	200	165	2.080	+80
5	100	78	2.158	+158

O gráfico da Figura 2.2 a seguir mostra que o tempo de retorno está entre o terceiro e quarto ano.

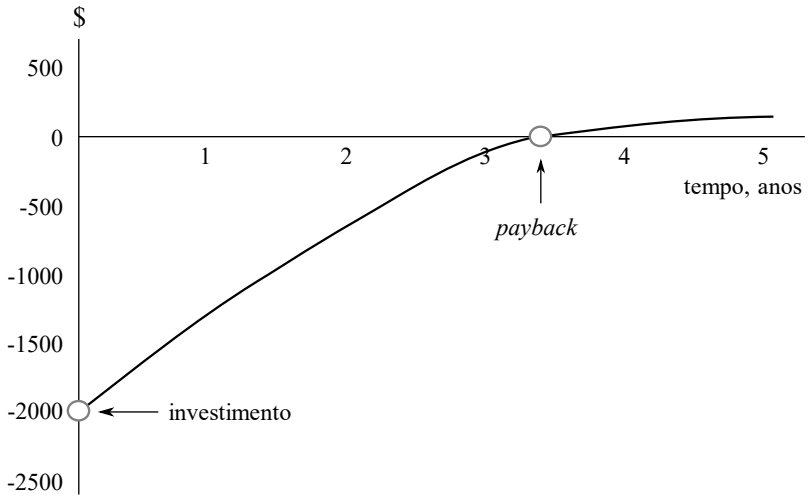


Figura 2.2 – Critério de liquidez – *payback* – Exemplo 2.3.

▪▪▪▪▪▪

O tempo de retorno reflete o tempo em que o dinheiro aplicado no projeto está em risco. É o tempo necessário para que as receitas líquidas geradas no projeto recuperem o investimento original. Geralmente, os períodos máximos de recuperação de capital exigidos pelas empresas giram em torno de três a cinco anos, dependendo do tipo de atividade. Em projetos de produção de petróleo em águas rasas ou *onshore* de pequeno porte, por exemplo, pode-se utilizar o *payback* como critério. Já em grandes projetos, como os da camada do pré-sal, o tempo de recuperação do capital pode ser superior a 12 anos, o que inviabiliza o uso desse indicador como critério, preferindo-se os critérios de rentabilidade.

2.3.2. Critérios de rentabilidade

Quando as empresas não têm problema de caixa, isto é, não necessitam de um rápido retorno de capital, os critérios predominantes nas decisões de investimento são os de rentabilidade. Existem diversos critérios na literatura, e estes são os mais utilizados na avaliação econômica de projetos:

- Valor Presente Líquido – VPL.
- Média Periódica Equivalente – RL.
- Taxa Interna de Retorno – TIR.
- Taxa Global de Rentabilidade – TGR.
- Índice de Lucratividade – IL.

a) Valor presente líquido

O critério do valor presente líquido para avaliação econômica de projetos de E&P foi apresentado inicialmente por Grayson (1960), Arps e Arps (1974), Newendorp (1976), Megill (1977), Ross (1978), Gentry e O'neil (1984) e Stermole e Stermole (1993). Brennan e Schwartz (1985) atestaram em um artigo que a evolução desse e de outros critérios de projeto foi lenta; até então eram simples adaptações do valor presente líquido proposto por Fisher em 1907, conforme expressão a seguir:

$$\mathrm{VPL} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\mathrm{FCL}_t}{(1+\mathrm{TMA})^t} \tag{2.9}$$

onde FCL_t é o fluxo de caixa líquido no ano *t*.

O VPL, também conhecido como método do valor atual, caracteriza-se pela transferência de todos os valores monetários do fluxo de caixa do projeto para o instante zero, descontados à taxa mínima de atratividade. Em outras palavras, para o caso de projetos de produção de petróleo, é a soma algébrica de todos os valores monetários incorridos nos períodos, trazidos ao instante zero com taxa de desconto igual à TMA, ou seja:

$$\text{decis o} \Leftrightarrow \mathrm{VPL} = \sum_{t=0}^{n=t_{abd}} \frac{\mathrm{FCL}_t}{(1+\mathrm{TMA})^t} \tag{2.10}$$

onde t_{abd} é o ano de abandono do campo. Um valor presente líquido positivo indica que o projeto é aceitável, tornando-se mais atrativo quanto maior for seu valor. Esse valor positivo é conhecido como benefício. Um valor presente líquido positivo significa que as entradas de caixa previstas no projeto, quando descontadas à TMA, superam os dispêndios, o que torna a proposta aceitável.

Um VPL nulo não indica que o projeto seja inviável do ponto de vista econômico, na realidade torna-se indiferente aceitá-lo ou rejeitá-lo. Do ponto de vista prático sua aceitação não será compensadora, sendo equivalente a deixar o capital na alternativa Z. Um VPL negativo indica que o projeto deve ser rejeitado pelo fato de não apresentar benefício que assegure a rentabilidade mínima requerida, que é igual à TMA. A regra, portanto, para uso do critério do VPL é:

Tabela 2.3 – Critério pelo método do VPL

VPL	Decisão
VPL > 0	Aceitar – viável
VPL = 0	Indiferente
VPL < 0	Rejeitar – inviável

De uma maneira bem simples o VPL, se positivo, pode ser encarado como sendo o benefício obtido acima do produzido pela TMA. O benefício é um rendimento a mais que se consegue quando se decide investir no projeto em vez de deixar o capital disponível na alternativa Z, aplicado à taxa mínima requerida. Para melhor entendimento do significado do VPL, veja o fluxo de caixa indicado na Tabela 2.4 a seguir:

Tabela 2.4 – Fluxo de caixa – significado do VPL

Ano, t	0	1	2	3
FCL ($)	(1.000)	500	500	500

Para uma taxa mínima de atratividade de 6% ao ano, o valor presente líquido ou benefício é:

$$\text{VPL} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\text{FCL}_t}{(1+\text{TMA})^t} = \frac{-1.000}{(1+0{,}06)^0} + \frac{500}{(1+0{,}06)^1} + \frac{500}{(1+0{,}06)^2} + \frac{500}{(1+0{,}06)^3} = \$337 \qquad (2.11)$$

Dessa forma, se for aplicado no projeto $1 mil hoje, serão obtidos $337 a mais do que deixar $1 mil aplicados a 6% ao ano (TMA). Observe que os valores dos três rendimentos líquidos desse fluxo de caixa são suficientes para pagar o principal e os juros correspondentes. Ou seja, se o empréstimo for de $1.337 a 6% ao ano, a dívida será paga em três parcelas de $500. O valor $1.337 é, por conseguinte, o valor atual das três receitas de $500. Por outro lado, a empresa poderia obter um empréstimo de $1.337 a 6% ao ano, investindo apenas $1 mil no projeto. Assim, pagaria a dívida com as três prestações de $500 recebidas do projeto e ficaria com um saldo líquido de $337, que é o VPL ou o benefício do projeto.

Ensaio 2.1

É comum utilizar taxas instantâneas (capitalização contínua) em vez de taxas discretas para o cálculo do VPL de projetos de produção de petróleo, especialmente quando se tem curvas de produção contínuas, como é o caso das curvas simuladas pelos engenheiros de reservatórios em seus estudos de fluxo de líquidos em meio poroso. Conforme **Anexo 1**, a equação que relaciona o VP (valor presente) com o VF (valor futuro) em uma capitalização contínua é:

$$\text{VF} = \text{VP}e^{ni_n} \quad \Leftrightarrow \quad \text{VP} = \text{VF}e^{-ni_n}$$

onde i_n é a taxa de desconto e n é o período. Assim, se o fluxo de caixa líquido for expresso por uma função contínua no tempo, FCL(t), a expressão para o cálculo do VPL na forma contínua seria

$$\text{VPL} = \int_0^{abd} \text{FCL}(t)\, e^{-\text{TMA}\times t} dt$$

onde TMA é a taxa mínima de atratividade e t é o período que vai de 0 até o abandono do campo (abd). Note que, para o caso de um projeto de produção de petróleo, o FCL(t) é função da receita oriunda da produção de óleo do campo $q(t)$ e dos dispêndios operacionais OPEX(t) – *operational expenditure* – termo utilizado aqui, por enquanto, para o dispêndio total.

Uma análise simplificada para representar o declínio de produção de campos de petróleo é a *análise de curvas de declínio*. Um dos tipos comuns de declínio de produção segue uma função exponencial. Nesse tipo de declínio, chamado de declínio à taxa constante, a taxa é expressa como:

$$a = -\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \int_{q=q_i}^{q=q} \frac{dq}{q} = -\int_{t=0}^{t=t} a dt$$

onde q_i é a vazão inicial a partir da qual se inicia o declínio da produção. Resolvendo a integral, resulta a equação da vazão em função do tempo, ou seja

$$q = q_i e^{-at}$$

onde q é a vazão de produção em um tempo t a partir de uma vazão inicial q_i. Por exemplo, considere um projeto de desenvolvimento da produção de um campo de petróleo cujo investimento total seja CAPEX_{prod} (*capital expenditure*) incorrido no tempo 0 e que a curva de produção de óleo tenha três estágios de vazões em função do tempo:

1. Crescimento linear da produção a partir de uma vazão nula até um platô de produção q_p alcançado em quatro anos.
2. Produção estável no platô durante dois anos.
3. Uma taxa *a* de declínio exponencial de produção a partir do platô até a vazão de abandono, onde $t_{abd} = 27$ anos.

   Ou seja, as vazões de óleo nos três estágios em função do tempo são:

$$1.\ crescimento\ (t \rightarrow 0@4) \Leftrightarrow q_t = 0{,}25 q_p t$$
$$2.\ platô\ (t \rightarrow 4@\ 6) \Leftrightarrow q_t = q_p$$
$$3.\ declínio\ (\ t \rightarrow 6@27) \Leftrightarrow q_t = q_p e^{-a(t-6)}$$

onde q_p é a vazão do platô de produção e q_t a vazão no tempo *t*. Normalmente a vazão de produção de óleo é expressa em bbl/dia e o tempo em anos. Para simplificar, considere que o preço do óleo seja de $40/bbl e os dispêndios totais (OPEX) sejam de 60% das receitas totais oriundas apenas da venda do óleo. Assim, para uma taxa de desconto igual à TMA, o VPL resulta:

$$\text{VPL} = -\text{CAPEX}_{prod} + \overbrace{(1-0{,}6) \times 365 \times 40 \int_0^{27} q(t) e^{-\text{TMA} \times t} dt}^{\text{valor presente do FCL}}$$

Como a função de produção $q(t)$ é contínua nos três estágios distintos de produção (*crescimento, platô e declínio*), o VPL do projeto é:

$$\text{VPL} = -\text{CAPEX}_{prod} + \overbrace{5.840}^{0{,}4 \times 365 \times 40} \left[\overbrace{\int_0^4 0{,}25 q_p t e^{-\text{TMA} \times t} dt}^{crescimento} + \overbrace{\int_4^6 q_p e^{-\text{TMA} \times t} dt}^{platô} + \overbrace{\int_6^{27} q_p e^{-a(t-6)-\text{TMA} \times t} dt}^{declínio} \right]$$

b) Média periódica equivalente – RL

Este método caracteriza-se pela transformação de todos os fluxos monetários do projeto em uma série uniforme equivalente, indicando, dessa forma, um valor médio líquido por período. Conceitualmente, para o cálculo desse índice, representado por RL, determina-se a série uniforme equivalente dos dispêndios (valores negativos). Da mesma forma determina-se a série uniforme equivalente correspondente às receitas (valores positivos). A soma algébrica desses valores resultará em uma média periódica líquida dos fluxos monetários do projeto. Assim, conforme **Anexo 1**, o RL pode ser calculado usando o VPL do projeto conforme expressão a seguir:

$$\text{RL} = \text{VPL} \times \frac{\text{TMA}(1+\text{TMA})^n}{(1+\text{TMA})^n - 1} \tag{2.12}$$

A determinação da viabilidade econômica de um projeto pelo método da série uniforme equivalente ou média periódica é:

Tabela 2.5 – Critério pelo método do RL

RL	Decisão
RL > 0	Aceitar – viável
RL = 0	Indiferente
RL < 0	Rejeitar – inviável

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.4 – Determine o RL para o seguinte fluxo de caixa considerando uma TMA = 10% a.p.

Tabela 2.6 – Fluxo de caixa – Exemplo 2.4.

Ano, *t*	0	1	2	3
FCL (*t*)	(80)	40	50	60

Solução

O cálculo do VPL segue a Eq. (2.10), ou seja:

$$\text{VPL} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\text{FCL}_j}{(1+\text{TMA})^j} = \frac{-80}{(1+0{,}1)^0} + \frac{40}{(1+0{,}1)^1} + \frac{50}{(1+0{,}1)^2} + \frac{60}{(1+0{,}1)^3} = \$42{,}76 \tag{2.13}$$

Assim, de acordo com a Eq. (2.12), resulta

$$\text{RL} = \text{VPL} \times \frac{0{,}1(1+0{,}1)^3}{(1+0{,}1)^3 - 1} = \$17{,}20 \tag{2.14}$$

O projeto deve ser aceito, pois seu RL é maior que zero. Esse índice é muito usado quando o projeto se refere aos custos médios periódicos ou benefícios médios periódicos, sendo escolhidos os projetos com menores custos ou maiores benefícios.

▪▪▪▪▪▪

c) Taxa interna de retorno – TIR

A TIR é encarada como a maior taxa de juros que se pode pagar pelo empréstimo de um capital para investimento em um projeto, de modo que esse seja pago com os recursos gerados pelo próprio projeto. Quanto menor for a taxa de juros do empréstimo em relação à TIR, maior será o benefício. Assim, em projetos de E&P, a TIR pode ser interpretada como sendo a máxima taxa de custo de capital financiado que ainda viabiliza o projeto. Desse modo, o critério de decisão se baseia na comparação da TIR com a TMA (ver Tabela 2.7).

Tabela 2.7 – Critério pelo método da TIR

TIR	Decisão
TIR > TMA	Aceitar – viável
TIR = TMA	Indiferente
TIR < TMA	Rejeitar – inviável

d) Taxa global de rentabilidade – TGR

Para a determinação da *taxa global de rentabilidade* de um projeto, deve-se adotar o seguinte procedimento:

- Determine o valor atual dos dispêndios do investimento descontados pela TMA, designando-o de I.
- Determine o valor futuro dos recebimentos de caixa, levados ao último período de capitalizados à TMA, designando-o de F.
- Determine a taxa global TGR com a seguinte expressão:

$$\text{TGR} = \left(\frac{\text{F}}{\text{I}}\right)^{1/n} - 1 \tag{2.15}$$

onde *n* é o tempo do fluxo de caixa expresso em anos. Essa é a taxa global de rentabilidade equivalente ao rendimento de um fluxo de caixa conforme indicado na Figura 2.3 a seguir.

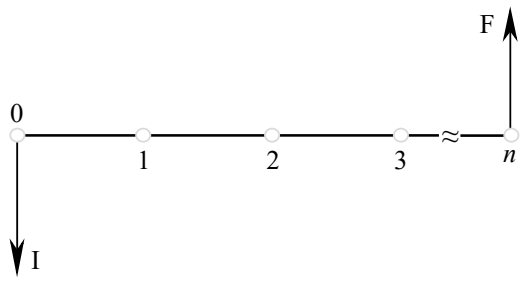


Figura 2.3 – Fluxo de caixa para descrever a TGR.

O montante F ao final do último período *n* é devido ao investimento I incorrido no tempo zero e capitalizado a uma taxa de juros chamada de taxa global de rentabilidade – TGR. A equação geral toma a seguinte forma:

$$\text{TGR} = \left[\frac{\sum_{k=0}^{n} \text{E}_k(1+\text{TMA})^{(n-k)}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\text{I}_k}{(1+\text{TMA})^k}}\right]^{1/n} - 1 \qquad (2.16)$$

onde E_k são as receitas ou entradas de caixa do período k, I_k são os investimentos ou saídas de caixa do período k e TMA é a taxa mínima de atratividade.

Esse critério tem uma particularidade que o torna interessante como substituto da TIR, uma vez que, independentemente do fluxo de caixa (convencional ou não), só haverá uma TGR. Com efeito, o critério de aceitação segue o mesmo da TIR.

Tabela 2.8 – Critério pelo método da TGR

TGR	Decisão
TGR > TMA	Aceitar – viável
TGR = TMA	Indiferente
TGR < TMA	Rejeitar – inviável

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.5 – Determine a taxa global de rentabilidade para o fluxo de caixa da Figura 2.4 para uma TMA = 10% *a.p.*

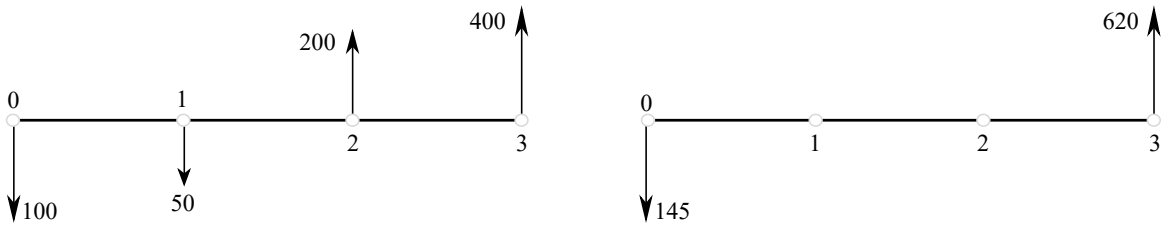


Figura 2.4 – Fluxo de caixa – Exemplo 2.5.

Solução

Assumindo os valores na Eq. (2.16) resulta

$$\text{TGR} = \left[\frac{200(1{,}1)^1 + 400(1{,}1)^0}{\frac{100}{(1{,}1)^0} + \frac{50}{(1{,}1)^1}}\right]^{1/3} - 1 = 62\%\ a.p. \qquad (2.17)$$

▪▪▪▪▪▪

e) Índice de lucratividade – IL

Devido ao método do valor presente líquido não levar em consideração a grandeza do investimento, isto é, não considerar os montantes investidos para gerar benefícios, é definido outro indicador que relaciona o benefício com o investimento exigido pelo projeto.

Para tanto, pode-se usar o índice de lucratividade definido simplesmente pelo quociente entre os valores atualizados das entradas de caixa e os valores atualizados dos dispêndios. O IL, portanto, tem a seguinte expressão:

$$\mathrm{IL} = \left[\frac{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}_k (1 + \mathrm{TMA})^{-k}}{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k (1 + \mathrm{TMA})^{-k}}\right] \tag{2.18}$$

Esse método, assim como o método da média periódica, é também uma variante do valor presente líquido, e nos casos em que a decisão consiste em aceitar ou rejeitar um projeto, o IL apresenta resultados idênticos ao VPL.

Tabela 2.9 – Critério pelo método do IL

IL	Decisão
IL > 1	Aceitar – viável
IL = 1	Indiferente
IL < 1	Rejeitar – inviável

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.6 – Determine o índice de lucratividade do fluxo de caixa da Figura 2.5 para uma TMA = 10% *a.p.*

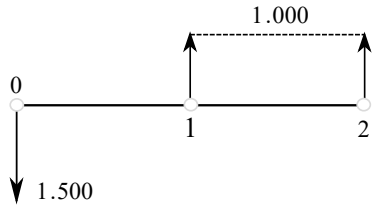


Figura 2.5 – Fluxo de caixa – Exemplo 2.6

Solução

Assumindo os dados na Eq. (2.18) resulta

$$\mathrm{IL} = \frac{1.000 \times (1{,}1)^{-1} + 1.000 \times (1{,}1)^{-2}}{1.500 \times (1{,}1)^{0}} = \frac{1.736}{1.500} = 1{,}16 \tag{2.19}$$

▪▪▪▪▪▪

Ensaio 2.2

Em se tratando de projetos sociais, ainda que os critérios de avaliação sejam distintos daqueles com fins lucrativos, é importante que devam ser tratados também do ponto de vista econômico. Quem decide sobre a viabilidade de um projeto social não deve abdicar da ciência econômica à guisa de obter melhores resultados sociais.

De acordo com Werlang (2005), os projetos sociais envolvem ações direcionadas a um público-alvo destinatário do programa, e que na maioria dos casos afetam também a população em torno deste público-alvo. A ideia básica da avaliação econômica desses projetos é mensurar o benefício econômico gerado, que

consiste na soma dos benefícios auferidos por todas as pessoas destinatárias do projeto. A questão se concentra em encontrar uma métrica para os resultados.

Werlang destaca algumas métricas que traduzem o impacto de programas sociais, tais como: menor evasão escolar, maior aproveitamento escolar, maiores chances de obtenção de emprego, menores gastos com médicos e remédios, maior expectativa de vida, menor índice de mortalidade infantil, maior altura dos indivíduos, menores horas de trabalho infantil etc. Não obstante, é extremamente difícil medir esses impactos, pois é necessário isolar as pessoas da ação de diversos fatores não contemplados no projeto social.

O método de avaliação indicado em Werlang é o mesmo empregado na determinação da eficácia dos medicamentos. Consiste em dividir a população entre o grupo impactado pelo programa social e o que não é impactado, grupo tratado e não tratado, respectivamente. Ao fim do programa fazem-se as comparações entre os dois grupos por meio de uma ou mais métricas já indicadas. Uma vez mensurados os impactos, medem-se os retornos econômicos associados a cada métrica.

Por exemplo, admita que o impacto de um programa em educação seja a de que o aluno beneficiado tenha 10% a mais de chances de formar-se em uma universidade que outro aluno não beneficiado. O benefício econômico nesse caso, por exemplo, poderia ser mensurado em termos da diferença de salário médio entre os dois alunos. Em geral, para aqueles com maior tempo de escola, maiores são os salários médios. Deve-se ressaltar que, um ano a mais de escola implica também um ano a menos de trabalho. Ou seja, nessa avaliação econômica, deve-se levar em conta o custo de oportunidade, o de ficar um ano a mais na escola.

Para alguns projetos sociais destinados à saúde e à redução da criminalidade, os retornos econômicos são mais difíceis de serem calculados. Não obstante, conforme Werlang (2005), algumas técnicas permitem determinar o valor monetário de se viver um ano a mais de vida. Uma vez determinado o benefício econômico, o projeto é avaliado pelas técnicas usuais de avaliação econômica de quaisquer projetos de investimento, comparando custos e benefícios (VPL, *payback*, TGR etc.).

Um exemplo é o ROI (*Return On Investment*) de treinamento em recursos humanos. Uma formulação válida para o caso de empregados que atuam em uma empresa com linha de montagem definida (indústria têxtil, montadora de carros, eletrodomésticos etc.) seria:

$$\text{ROI}_{treinamento} = \frac{\text{Receita} - [\text{Despesas Totais} - (\text{Salário} + \text{Benefícios})_{treinandos}]}{(\text{Salário} + \text{Benefícios})_{treinandos}}$$

Note que ao resultado receita menos despesas totais somam-se os salários e benefícios dos treinandos, de modo a evitar dupla contabilidade. No caso em questão, o benefício refere-se aos valores pagos ao treinando. Esse índice é denominado por Bontis e Fitz-Enz (2002) de HCROI (*Human Capital Return On Investment*). Para o caso de uma empresa de petróleo, a avaliação deve ser segregada por função, obtendo-se um ROI médio da companhia ponderado por carreiras funcionais. Outra métrica, tomando-se como base o trabalho de Bontis e Fitz-Enz (2002), é utilizar o retorno *per capita* de cada treinando para compor o ROI, ou seja:

$$\text{ROI}_{treinamento} = \frac{\text{HEVA}_{treinamento} + (\text{Salário} + \text{Benefícios})_{treinandos}}{(\text{Salário} + \text{Benefícios})_{treinandos}}$$

desde que

$$\text{HEVA}_{treinamento} = (\text{Lucro operacional líquido dos impostos} - \text{Custo de capital})/\text{N}_{treinandos}$$

onde $\text{N}_{treinados}$ é o número de treinandos. O HEVA deriva de EVA (o H refere-se a *Human*). Este índice é tomado emprestado da ciência financeira, de forma que EVA expressa o valor econômico adicionado (*Economic Value Added*).

O que se observa em nações desenvolvidas, seja projetos sociais ou políticas públicas de outra natureza, é que os governos são propensos a considerar as métricas da economia acima dos interesses político-partidários. Mais exatamente, em países desenvolvidos, nas decisões que envolvem grandes recursos financeiros em projetos sociais, a ciência econômica é posta à frente das questões partidárias. Muito provavelmente seja esse o *modus operandi* que ajuda a explicar o elevado nível de desenvolvimento humano de alguns países frente a outros cujos governos não observam questões econômicas relevantes em suas decisões.

2.4. Alternativas de Projetos

Até aqui foi analisada a viabilidade econômica de um projeto de investimento isoladamente. Contudo, muito frequentemente, a administração financeira vê-se diante da necessidade de analisar e comparar vários programas de investimentos. Os métodos estudados até aqui levam em consideração fatores puramente econômicos, e geralmente o objetivo do investidor é a escolha da alternativa de maior rentabilidade.

Na avaliação de propostas de investimento, é importante considerar a inter-relação entre os projetos. Esse relacionamento, ou seja, as formas como um projeto afeta o fluxo de caixa de outros projetos, devem ser investigadas. As principais inter-relações relacionadas à escolha entre alternativas são:

- Investimentos dependentes e independentes.
- Investimentos mutuamente exclusivos.
- Classificação por inspeção.
- Análise incremental.
- Critério VPL *versus* TIR.
- Projetos com durações diferentes.

Em análise de alternativas, os custos passados devem ser ignorados. É um erro considerar, nos estudos de viabilidade entre várias propostas, quantias já despendidas em determinado projeto para que este seja aceito. Deve-se ressaltar também que, na comparação de alternativas, o que é comum entre elas não afeta a decisão, pois o estudo comparativo analisa apenas as diferenças. Ademais, os diagramas devem ser montados tendo como instante zero o dia da decisão, esquecendo-se o passado.

Só se decide sobre as ações relativas ao futuro, pois sobre fatos passados não há o que decidir. Não obstante, em título de acompanhamento, pode-se avaliar o resultado global do investimento desde fatos passados até o fim do projeto, como é o caso de projetos de E&P.

2.4.1. Investimentos dependentes e independentes

Diz-se que dois ou mais investimentos são independentes quando a aceitação ou a rejeição de um deles em nada afeta o fluxo de caixa dos demais. Em caso contrário, os investimentos são ditos economicamente dependentes, isto é, a decisão de rejeitar ou aceitar um projeto implicará modificações nos fluxos monetários dos demais.

Por exemplo, embora seja tecnicamente possível construir uma ponte e operar um serviço de barcos entre os dois lados de um rio, ambos os investimentos não são independentes, ou seja, as receitas de um afetam as receitas do outro. Já uma operadora de petróleo, que tem a chance de investir na margem equatorial ou em eólicas *offshore*, está diante de duas alternativas que, na prática, podem ser consideradas independentes.

2.4.2. Investimentos mutuamente exclusivos

Quando a escolha de um investimento elimina automaticamente os demais, eles são considerados mutuamente exclusivos. Nesse caso, apenas um investimento pode ser realizado. Uma empresa, por exemplo, opta por produzir energia elétrica e deve decidir se a geração primária será a base de energia renovável ou não renovável. A instalação de um sistema de refrigeração a água ou a ar é outro exemplo de dois projetos mutuamente exclusivos. Duas propostas mutuamente exclusivas, portanto, não podem ser aceitas ao mesmo tempo.

2.4.3. Classificação por inspeção

Existem casos de comparação entre projetos em que a escolha pode ser feita por uma simples inspeção. Veja o exemplo de duas propostas indicadas na Tabela 2.10 a seguir:

Tabela 2.10 – Comparação de proposta por inspeção simples

Proposta	Investimento	Retorno
A	(100)	110
B	(100)	120

A vantagem da proposta B sobre a proposta A é facilmente percebida. Veja agora o exemplo exposto da Tabela 2.11 a seguir:

Tabela 2.11 – Comparação de proposta por inspeção simples

Proposta	Investimento	Ano 1	Ano 2
X	(100)	40	80
Y	(100)	60	60

Pode-se observar que ambas as propostas, X e Y, têm o mesmo investimento inicial de $100 e o mesmo valor total de receitas líquidas, ou seja, $120. Nesse caso, devem-se analisar as propostas com mais profundidade. Existe vantagem da proposta Y sobre a proposta X devido ao projeto Y receber $20 a mais no período 1 do que a proposta X. Esses $20 a mais aplicados na taxa mínima de atratividade, seja ela qual for fazem com que o valor futuro ao final do segundo período seja superior ao projeto X. Como o objetivo é sempre maximizar os investimentos, fica clara a vantagem da escolha da proposta Y.

Observe outro exemplo de duas propostas para uma TMA = 10% indicado na Figura 2.6 a seguir:

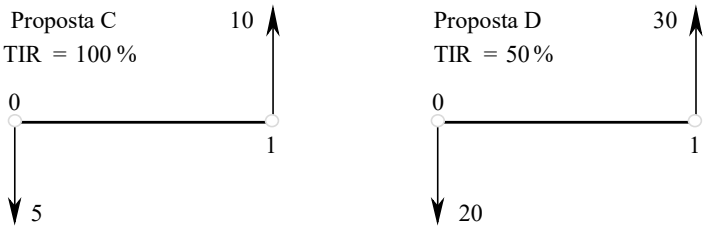


Figura 2.6 – Fluxo de caixa de duas alternativas de projeto.

Observe que ambas as propostas são viáveis porque têm taxas de retorno superiores à taxa mínima de atratividade. Deve-se, entretanto, escolher a proposta economicamente mais vantajosa. Observando as duas propostas, aparentemente a proposta C é mais vantajosa, pois tem uma taxa de retorno igual a 100%, o dobro da taxa de retorno da proposta D. Comparando agora as duas propostas pelo método do valor presente líquido, nota-se que existe um conflito na indicação do melhor projeto, ou seja

$$\mathrm{VPL_C} = \frac{-5}{(1+0{,}1)^0} + \frac{10}{(1+0{,}1)^1} = \$4 \tag{2.20}$$

e

$$\mathrm{VPL_D} = \frac{-20}{(1+0{,}1)^0} + \frac{30}{(1+0{,}1)^1} = \$7 \tag{2.21}$$

Tabela 2.12 – VPL e TIR das propostas – Figura 2.6

Proposta	C	D
TIR	100%	50%
VPL	$4	$7

Pelo critério do VPL, a proposta D é mais vantajosa que a proposta C, pois apresenta maior valor presente líquido. Essa é uma situação de resultados conflitantes na comparação entre duas propostas. Conclui-se que a comparação entre propostas mutuamente exclusivas, o método do VPL e o da taxa interna de retorno podem indicar resultados conflitantes.

A taxa de retorno é um índice que expressa um percentual, não considera o volume do investimento. Assim, um retorno de 100% sobre um investimento de $5 seria preferível a um retorno de 50% sobre um investimento de $20. Já o índice do VPL expressa um valor absoluto.

Na realidade, o conflito apresentado permite o seguinte questionamento: como será investida a diferença de $15 (20 – 5) caso o projeto C seja o escolhido? Pode-se afirmar que, optando-se pela proposta C, que investe apenas $5, fica subentendido que a diferença é aplicada na alternativa Z, ou seja, na taxa mínima de atratividade. Já na proposta D, o capital global de $20 é inteiramente aplicado em sua taxa de retorno que é igual a 50%. Veja o desdobramento da proposta C, chamada agora de proposta C*.

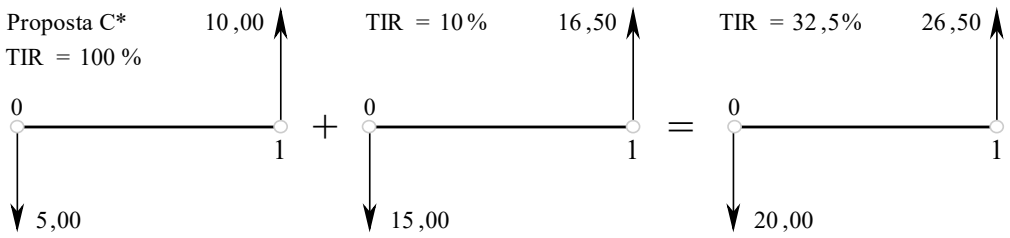


Figura 2.7 – Desdobramento da proposta C.

Agora, podem-se comparar as duas propostas, C* com D, considerando-se um investimento global de $20.

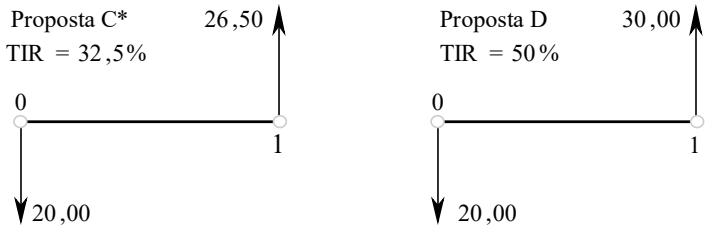


Figura 2.8 – Diagrama de fluxo de caixa das propostas C* e D.

Note que a verdadeira taxa interna de retorno da proposta C*, quando considerado o investimento global de $20, é igual a 32,5%. Esse valor, portanto, é inferior à TIR da proposta D, que é igual a 50%. Agora não há mais resultados conflitantes. Tanto pelo VPL como pela TIR, a escolha recai no projeto D.

Na escolha entre alternativas pelo método da taxa interna de retorno, deve-se tomar cuidado, pois embora possa parecer intuitivo que a alternativa de maior taxa seja a melhor, isso pode não ser verdadeiro. Observe ainda que o objetivo principal de uma empresa é maximizar o retorno futuro sobre o capital global investido em valores monetários, e não maximizar a taxa interna de retorno de um projeto.

2.4.4. Análise incremental

A análise incremental é uma ferramenta importante na comparação de alternativas mutuamente exclusivas pelo método da taxa interna de retorno. Ela consiste em subtrair os valores monetários dos diagramas de fluxo de caixa das alternativas, resultando outro fluxo de caixa chamado de *fluxo de caixa incremental* ou

diferencial. Essa subtração deve ser realizada de tal forma que o primeiro valor a figurar no fluxo diferencial seja negativo.

De posse desse novo fluxo diferencial, determina-se sua taxa interna de retorno e compara com a TMA. Se a TIR do incremento for maior que a TMA, significa que a alternativa que é o *minuendo* é melhor que a alternativa que é o *subtraendo*. Em outras palavras, quando a TIR do incremento, também conhecida como *taxa de Fisher*, for maior que a TMA, a diferença entre os capitais está sendo investida a uma taxa maior que a TMA, o que é desejável.

Aplicando a análise incremental no exemplo anterior, resulta a TIR indicada na Figura 2.9 a seguir:

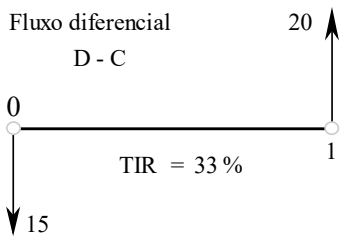


Figura 2.9 – Fluxo de caixa incremental.

Como a taxa de Fisher, ou seja, a TIR do fluxo diferencial é maior que a TMA, o fluxo de caixa do minuendo (projeto D) é o melhor. Algumas observações sobre a comparação entre as alternativas C e D do exemplo anterior podem ser vistas a partir do gráfico VPL × *i* apresentado na Figura 2.10 a seguir.

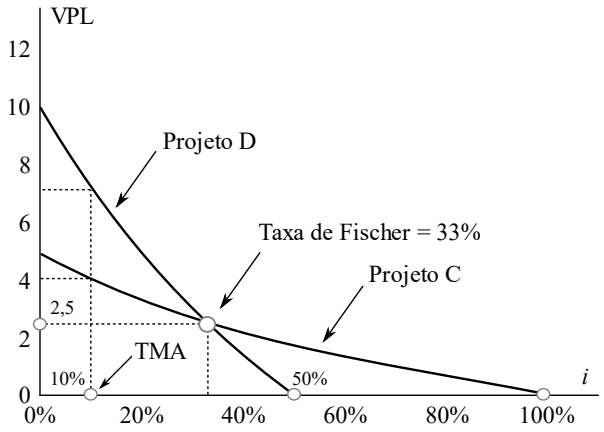


Figura 2.10 – Taxa de Fisher das propostas C e D.

Do gráfico da Figura 2.10, podem-se destacar quatro taxas:

- VPL_C– taxa interna de retorno do projeto C igual a 100%. Encontra-se na interseção da curva do projeto C com o eixo horizontal. É a taxa de desconto que anula o VPL_C.
- VPL_D – taxa interna de retorno do projeto D igual a 50%. Encontra-se na interseção da curva do projeto D com o eixo horizontal. É a taxa de desconto que anula o VPL_D.
- TMA – taxa mínima de atratividade do investidor. É a taxa de desconto utilizada para os cálculos dos VPLs.
- Taxa de Fisher – taxa interna de retorno do fluxo diferencial D – C. É o ponto onde as duas curvas se cortam. A essa taxa de desconto, os dois projetos têm o mesmo valor presente líquido.

Observando o gráfico da Figura 2.10, pode-se concluir que não faz sentido comparar alternativas observando apenas suas taxas internas de retorno, pois no exemplo analisado a escolha seria pela alternativa C, com maior taxa de retorno. Para a correta escolha entre os dois projetos, é necessário conhecer sempre a TMA do investidor, pois nem sempre a alternativa de maior TIR é a melhor.

A escolha entre alternativas pelo método da TIR depende da taxa mínima requerida pelo investidor. Para o exemplo analisado, quando a TMA for menor que a taxa de Fisher, o projeto D será o preferido, pois tem o maior VPL. Se a TMA for maior que a taxa de Fisher, inverte-se o resultado, o projeto C torna-se mais vantajoso. Finalmente, se a TMA coincidir com a taxa de Fisher, as duas propostas são equivalentes, pois terão o mesmo valor presente líquido, no caso, igual a $2,50.

Observe outro exemplo de duas propostas apresentadas na Tabela 2.13, onde se deve decidir qual a melhor alternativa para uma TMA = 5% ao ano.

Tabela 2.13 – Duas propostas alternativas de investimento

Proposta	Investimento	Ano 1	Ano 2	TIR
E	(100)	20	120	20%
F	(100)	100	31	25%

Primeiramente, constata-se que ambas as propostas são viáveis e têm o mesmo investimento inicial de $100. Se a decisão for pela comparação simplesmente entre as duas taxas de retorno, a escolha recai sobre a proposta F, que tem taxa superior à da proposta E. Como já visto anteriormente, a proposta de maior TIR pode não ser a melhor.

Mesmo que os investimentos iniciais sejam iguais, não se deve decidir entre alternativas simplesmente comparando suas taxas de retorno. No exemplo analisado se depara, novamente, com um problema de escala ou de volume de investimento, só que, nesse caso, a oportunidade do investimento excedente ocorre não mais no tempo zero, e sim um ano depois.

Observando a proposta F, verifica-se que ao final do ano 1 tem-se disponível, para investimento, $80 a mais do que na proposta E. Pelo método da TIR, esse excedente de $80 da proposta F é reaplicado à sua própria taxa de retorno, 25% ao ano, enquanto pelo método do VPL a taxa de investimento das disponibilidades é a taxa mínima de atratividade. A comparação entre as duas propostas dadas pode ser efetuada definindo o projeto F*, conforme Tabela 2.4 a seguir:

Tabela 2.14 – Proposta F* (pelo método do VPL)

Proposta	Investimento	Ano 1	Ano 2	TIR
F*	(100)	100 – 80 = 20	31+80×1,05 = 115	18%

Comparando as duas propostas E e F*, verifica-se que a proposta E é mais vantajosa.

Tabela 2.15 – Comparação entre as alternativas E e F*

Proposta	Investimento	Ano 1	Ano 2	TIR
E	(100)	20	120	20%
F*	(100)	20	115	18%

Calculando o VPL para cada proposta com a TMA igual a 5% ao ano, tem-se que

$$\text{VPL}_\text{E} = \frac{-100}{(1+0{,}05)^0} + \frac{20}{(1+0{,}05)^1} + \frac{120}{(1+0{,}05)^2} = \$28 \tag{2.22}$$

e

$$\text{VPL}_\text{F} = \frac{-100}{(1+0{,}05)^0} + \frac{100}{(1+0{,}05)^1} + \frac{31}{(1+0{,}05)^2} = \$23 \tag{2.23}$$

Observe que o critério do VPL, que destaca a proposta E como a mais vantajosa, é conflitante com a decisão inicial pelo critério da TIR, que elegeria a proposta F com TIR de 25%. O conflito é devido às diferentes premissas relativas à taxa de reinvestimento. O método da TIR implica que os recursos disponíveis são sempre reinvestidos à própria taxa interna do projeto até o seu período final. Pelo método da TIR, o excedente de $80 da proposta F é reaplicado à sua TIR de 25% ao ano, enquanto pelo método do VPL a taxa de reinvestimento é a taxa mínima de atratividade.

2.4.5. VPL *versus* TIR

A premissa mais aceita e recomendada para a taxa de reinvestimento é a taxa mínima de atratividade. O método do VPL é considerado o mais adequado para a escolha entre alternativas ou propostas de investimentos mutuamente exclusivas. É esse o critério mais utilizado ainda na indústria de petróleo.

Geralmente, admite-se que as disponibilidades de caixa sejam reaplicadas à TMA, que por definição está sempre à disposição do investidor na alternativa Z. Para classificar ou hierarquizar várias alternativas de investimento, é preferível o método do VPL à TIR. A superioridade teórica do VPL é atribuída ao fato implícito de que todas as disponibilidades de recursos são reinvestidas ao custo do capital da empresa.

Conforme o **Anexo 1**, devido a determinadas propriedades matemáticas na determinação da TIR, podem ocorrer, em fluxos de caixa não convencionais, múltiplas taxas ou até mesmo casos em que o fluxo de caixa não apresenta taxa de retorno, resultando difícil interpretação que não ocorre se o critério escolhido for o VPL.

O VPL tem outras vantagens em relação ao método da TIR: (*i*) o cálculo do VPL é mais simples; (*ii*) não necessita de processos iterativos e é um índice aditivo, o que não ocorre com a TIR. Por exemplo, se o projeto A tem VPL igual a $10 e o projeto B tem VPL igual a $20, sendo realizados os dois projetos o VPL total será de $30. No entanto, se a TIR do projeto A é de 30% *a.a.* e a TIR do projeto B é de 25% *a.a.*, não se sabe de imediato quanto será a TIR do investimento conjunto.

2.4.6. Projetos com durações diferentes

Quando os projetos a serem comparados têm durações diferentes, o problema é mais de formulação de hipótese do que uma questão de análise de investimento. A consideração de um mesmo horizonte de tempo é fundamental na comparação entre alternativas de investimento.

Desde que a escolha deva sempre recair na proposta que maximize em longo prazo os investimentos, quando as alternativas têm horizontes temporais diferentes é necessário determinar o que ocorrerá no período entre o final da proposta de menor duração e o final da vida útil da proposta de maior duração. Duas hipóteses podem ser formuladas no sentido de igualar as durações dos projetos analisados:

- Hipótese 1 – cada proposta pode ser repetida com fluxo de caixa idêntico um determinado número de vezes, de tal modo que as alternativas tenham o mesmo tempo de duração. O horizonte temporal comum aos dois projetos é o mínimo múltiplo comum entre as durações deles.

- Hipótese 2 – os projetos não podem ser repetidos e, ao final da vida útil daquele de menor duração, os recursos disponíveis serão aplicados na TMA até o prazo final igual ao projeto de maior duração.

Uma vez que os projetos têm o mesmo número de períodos após a adoção de uma das duas hipóteses, qualquer um dos métodos vistos anteriormente pode ser usado. Quando a repetição de cada projeto pode ocorrer, o método mais vantajoso de comparação é o método da média periódica equivalente ou série uniforme equivalente.

Esse método calcula a média periódica para cada alternativa e dispensa a repetição física de cada diagrama de fluxo de caixa, pois tratando-se de média por período, esta não se modifica quando se aumenta o número de períodos do projeto com os mesmos valores monetários. Deve-se observar que, se forem comparadas alternativas com durações diferentes pelo método da média ou série uniforme, fica implícito que as propostas podem se repetir quantas vezes forem necessárias. Veja como exemplo o caso de uma sonda de perfuração: uma vez terminada a vida útil dessa sonda, ela será substituída por outra idêntica dando continuidade às operações a que se destina.

Quando o método adotado para fins de comparação for o método do VPL, implica automaticamente admitir que o horizonte temporal do projeto de menor duração é completado reaplicando-se as disponibilidades a uma taxa igual à taxa mínima de atratividade.

Um exemplo de alternativas mutuamente exclusivas e comparáveis, não tendo a mesma duração, ocorre quando se deseja desfazer de uma FPSO, equipamento ou uma unidade operacional qualquer. Uma alternativa é vender a FPSO imediatamente por um valor à vista. A outra seria permanecer com ela por mais alguns períodos e vendê-la posteriormente. Quando esse for o caso, as alternativas podem ser compradas pelo método do VPL. Por exemplo, se a venda à vista de uma FPSO gerar uma entrada imediata de caixa igual a $100 e o VPL do fluxo de caixa dessa mesma FPSO, permanecendo em operação por mais três anos, for igual a $80, conclui-se que a venda imediata é mais interessante do que vendê-la no final do terceiro ano.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.7 – Compare as duas alternativas apresentadas na Tabela 2.16 para uma TMA = 10% ao período e decida qual a melhor alternativa.

Tabela 2.16 – Alternativas de Propostas

Proposta	Investimento	Período 1	Período 2	Período 3
A	(100)	120	–	–
B	(100)	50	50	50

Solução

Admita inicialmente que as propostas não podem se repetir. Com efeito, ao final do período 1, deve-se investir o capital disponível na TMA. Pelo método do VPL tem-se que:

$$\mathrm{VPL_A} = -100 + 120 \times \frac{1}{(1+0{,}1)} = \$9{,}10 \tag{2.24}$$

e

$$\mathrm{VPL_B} = -100 + 50 \times \frac{1}{(1+0{,}1)^3} = \$24{,}30 \tag{2.25}$$

O critério do VPL aponta o projeto B como o melhor, se os projetos não forem repetidos. Agora, suponha que o projeto A, de menor duração, é repetido três vezes, tornando as duas propostas com igual duração. Nesse caso, o melhor método é o da média periódica, portanto

$$RL_A = VPL_A \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 9{,}1 \times \frac{0{,}1(1+0{,}1)}{(1+0{,}1)-1} = 9{,}1 \times 1{,}1 = \$10{,}00 \tag{2.26}$$

e

$$RL_B = VPL_B \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 24{,}3 \times \frac{0{,}1(1+0{,}1)^3}{(1+0{,}1)^3 - 1} = 24{,}3 \times 0{,}402 = \$9{,}80 \tag{2.27}$$

Observe que o melhor projeto é o A, pois tem maior RL. Se for aplicado outro método, como por exemplo o VPL, é necessário repetir três vezes o fluxo do projeto A para igualar o número total de períodos. Observe como fica o fluxo de caixa do projeto A na Figura 2.11 a seguir:

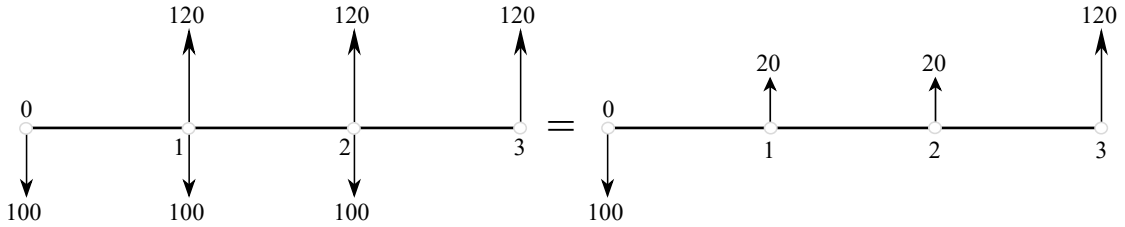


Figura 2.11 – Diagrama – Exemplo 2.7.

Os VPLs dos projetos resultam

$$VPL_A = -100 + \frac{20}{(1+0{,}1)^1} + \frac{20}{(1+0{,}1)^2} + \frac{120}{(1+0{,}1)^3} = \$24{,}90 \tag{2.28}$$

e

$$VPL_B = -100 + 50 \times \frac{1}{(1+0{,}1)^3} = \$24{,}30 \tag{2.29}$$

Confirmando que, se os projetos forem repetidos, o projeto A é o melhor.

▪▪▪▪▪▪

2.5. Influência do Imposto de Renda

Os fluxos de caixa associados a projetos de investimentos são influenciados pela tributação do imposto sobre a renda. Desse modo, a existência de uma alíquota a ser aplicada sobre o lucro tributável possibilita o cálculo de duas taxas de retorno: uma antes de ser descontado o imposto de renda e outra depois do imposto de renda.

Deve-se observar que muitos projetos aceitáveis antes do imposto passam a ser desinteressantes após a redução correspondente ao IR. A carga tributária representa, na realidade, um ônus, cujo efeito é o de reduzir o valor da rentabilidade resultante de um empreendimento.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.8 – Analise um projeto de investimento correspondente à operação de um sistema de bombeio mecânico no valor de $100 com vida econômica igual a seis anos e valor residual nulo. O sistema de bombeio proporciona uma receita líquida anual igual a $30. A depreciação é linear e efetuada ao longo de quatro anos. A alíquota do imposto de renda é igual a 40% sobre o lucro tributável e a taxa mínima de atratividade é igual a 10%.

Solução

A Tabela 2.17 apresenta a solução do problema, indicando o VPL e a TIR do fluxo de caixa antes e depois de aplicado o imposto de renda.

Tabela 2.17 – Fluxo de caixa antes e depois do IR

Ano	Fluxo antes do IR	Depreciação	Lucro Tributável	IR (40%)	Fluxo após o IR
0	(100)	–	–	–	(100)
1	30	(25)	5	(2)	28
2	30	(25)	5	(2)	28
3	30	(25)	5	(2)	28
4	30	(25)	5	(2)	28
5	30	–	30	(12)	18
6	30	–	30	(12)	18
TIR	19,9%			TIR	13,7%
VPL	$30,66			VPL	$10,09

Como se pode observar, o projeto é viável não só por ter a taxa de rentabilidade maior que a taxa mínima requerida como também por ter o VPL positivo. O fluxo antes do imposto de renda permite uma rentabilidade de 19,9% ao ano e um VPL de $30,66. Depois de deduzido o imposto, a rentabilidade cai para 13,7% ao ano e o benefício é reduzido para $10,09.

.....

2.6. Alavancagem Financeira

De maneira geral, as operadoras usam, em seus projetos de E&P, não só recursos próprios, como também recursos de terceiros, por meio de empréstimos ou financiamentos. Os recursos próprios são aqueles provenientes dos sócios, podendo também originar-se dos lucros retidos para reinvestimento ou, ainda, recursos oriundos da depreciação. A entrada de uma parte de recursos externos, visando compor o capital a ser investido, ocorre quando o custo do capital de terceiros é inferior à taxa de retorno sobre o capital próprio.

A obtenção desses recursos de terceiros só é vantajosa quando a capacidade do projeto em gerar retorno for suficiente para amortizar e remunerar o capital captado por empréstimo. Devido ao capital de terceiros ter, geralmente, taxa inferior à taxa de retorno dos projetos, a rentabilidade sobre o capital próprio pode ser sensivelmente melhorada. A esse fato denomina-se *alavancagem financeira*.

Admita, por exemplo, um projeto conforme o diagrama da Figura 2.12 a seguir cuja taxa de retorno é igual a 20% ao ano.

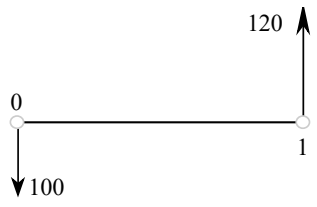


Figura 2.12 – Exemplo de alavancagem financeira.

Se esse projeto contar com 50% do capital financiado a um custo de 10% ao ano, resultaria em um novo diagrama de fluxo de caixa. Quem toma $50 emprestado a 10% *a.a.*, após um ano deve pagar $55. Assim, o diagrama assume os valores da Figura 2.13 a seguir:

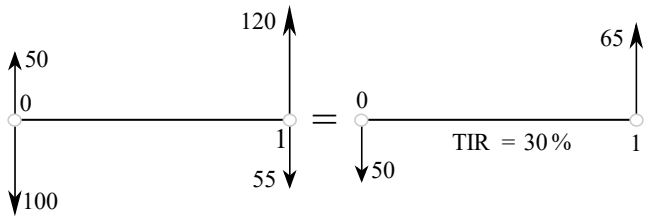


Figura 2.13 – Exemplo de alavancagem financeira.

Nesse caso, a taxa de retorno sobre o capital próprio foi alavancada de 20% para 30% ao ano. Observe que, quanto maior for a participação da dívida no capital investido, maior será a alavancagem, desde que a TIR do projeto seja maior que a taxa do financiamento. A alavancagem financeira reflete a capacidade do projeto de usar o financiamento a fim de maximizar a sua rentabilidade. Não obstante, é fundamental ter em mente que, em uma situação de alavancagem elevada, os riscos também se elevam.

A análise de projetos financiados com composição mista de recursos apresenta um grau adicional de complexidade quando considerado o imposto de renda, já que os juros do empréstimo devem ser considerados na determinação do fluxo de caixa. A legislação tributária permite a dedução dos juros pagos como sendo uma despesa dedutível do lucro tributável, semelhante ao que acontece com a depreciação.

O efeito da alavancagem é extremamente atraente se tudo der certo, no entanto a realidade envolve riscos que devem ser considerados. O risco associado à cobertura dos encargos financeiros devido ao empréstimo é o risco financeiro da empresa, ou seja, o risco que incorre de não conseguir cobrir os custos financeiros com o retorno do projeto. Se a empresa não puder saldar seus compromissos financeiros, poderá ser forçada a fechar por solicitação dos credores insatisfeitos.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.9 – Analise o projeto de investimento em um empreendimento com as seguintes características:

Tabela 2.18 – Dados do projeto

Dados	Valores
Investimento inicial	$100
Benefício periódico	$40
Vida útil (depreciação linear)	5 anos
Valor residual	Nulo
Imposto de renda	35%
TMA	10% ao ano

Considere que 50% do capital investido seja com recursos de terceiros tomados por empréstimo para amortização pelo sistema SAC à 10% ao ano (ver **Anexo 1**).

Solução

Considerando inicialmente que o investimento seja feito integralmente com recursos próprios, o resultado do fluxo antes e depois do IR segue o que está apresentado a seguir.

Tabela 2.19 – Fluxo de caixa – Capital próprio

ano	Fluxo antes do IR	Depreciação	Lucro tributável	IR (35%)	Fluxo após o IR
0	(100)	–	–	–	(100)
1	40	20	20	(7)	33
...	...	...	...	...	...
5	40	20	20	(7)	33
TIR	28,6%			TIR	19,4%
VPL	$51,63			VPL	$25,10

Pode-se observar, na Tabela 2.19, que a taxa de retorno do projeto depois do imposto de renda é igual a 19,4% ao ano, superior portanto à taxa mínima requerida, o que torna o projeto aceitável. Considere agora que 50% do capital investido seja com recursos de terceiros tomados por empréstimo para amortização pelo sistema SAC à 10% ao ano. Nessas condições, resultam os dados da Tabela 2.20 a seguir:

Tabela 2.20 – Fluxo de caixa – Capital próprio e de terceiro

ano	Fluxo antes do IR	Amortização	Juros	Fluxo após dívida	Depreciação	Lucro tributável	IR (35%)	Fluxo após o IR
0	(50)	–	–	–	–	–	–	–50,00
1	40	(10)	(5)	25	20	15	(5,25)	19,75
2	40	(10)	(4)	26	20	16	(5,60)	20,40
3	40	(10)	(3)	27	20	17	(5,95)	21,05
4	40	(10)	(2)	28	20	18	(6,30)	21,70
5	40	(10)	(1)	29	20	19	(6,65)	22,35
							TIR	30%

A TIR do fluxo, após o IR, é de 30%. Como se pode observar, a taxa de retorno sobre o capital próprio de $50 sofreu uma "alavancagem", passando de 19,4%, quando o capital era próprio, para 30% devido ao financiamento de 50% do capital.

.....

2.7. *Leasing* Financeiro e Operacional

O arrendamento mercantil, ou *leasing*, é um tipo de aluguel ou financiamento oferecido no mercado financeiro. A operação de *leasing*, ou arrendamento mercantil, se baseia na concepção econômica de que o fato gerador de rendimento para a empresa é a utilização de um bem, e não a propriedade deste. O arrendamento mercantil envolve a utilização de máquinas, equipamentos, imóveis etc., sem que se tenha efetivamente sobre eles o direito de posse. O arrendatário utiliza os serviços dos ativos arrendados pela empresa de *leasing*, que é a proprietária dos bens. Em troca do uso dos bens, o arrendatário paga à locadora, periodicamente, determinado valor monetário como uma obrigação legal por um período predefinido.

O pagamento referente ao arrendamento é tratado pelo arrendatário como uma despesa operacional e, portanto, dedutível para fins de imposto de renda. Encerrado o prazo contratual, o cliente dispõe de três opções quanto ao bem arrendado:

- Devolução do bem à locadora.
- Renovação do contrato de *leasing* com prestações baseadas no valor residual do bem, ou ainda,
- Aquisição do bem pelo seu valor residual.

Os exemplos mais comuns de contratos de *leasing* são encontrados nos usuários de computadores. Outro exemplo é o das máquinas copiadores, em que praticamente a totalidade dos equipamentos é arrendada. Nas atividades de E&P é comum o arrendamento de FPSOs.

A contraprestação periódica de um contrato de *leasing* pode ser deduzida do lucro operacional antes do IR, no período em que o bem foi recebido. Essa oportunidade de reduzir o valor do IR a ser pago pelo arrendatário torna a operação de *leasing* bastante competitiva com as alternativas de compra definitiva do bem de produção. Como qualquer outra operação, o *leasing* apresenta alguns aspectos favoráveis e outros desfavoráveis. As vantagens são:

- Liberação de recursos financeiros para capital de giro e outras aplicações mais rentáveis, com consequente aumento da liquidez.
- Financiamento total do bem. Geralmente, os financiamentos para compra de ativos permanentes requerem do tomador uma parte do valor do bem como entrada. Na operação de *leasing*, o arrendatário não está obrigado a qualquer tipo de entrada, conseguindo, portanto, um financiamento integral.
- Ausência do risco de obsolescência.
- Para efeito fiscal, o arrendamento é inteiramente dedutível como despesa do lucro tributável.
- Simplificação contábil.

As desvantagens do arrendamento são:

- Não formação de patrimônio, que serve como garantia para empréstimos.
- Perda do valor residual. Ao fim da vida do contrato de arrendamento, se houver valor residual do bem arrendado, esse reverte-se a favor da locadora.
- Despesa total maior que o valor do bem.

Existem dois tipos de *leasing*: o *leasing* financeiro e o *leasing* operacional.

2.7.1. *Leasing* financeiro

É uma operação de financiamento sob a forma de locação de médio a longo prazo, com base em um contrato de bens móveis ou imóveis, na qual intervém uma empresa de *leasing* (arrendador), a empresa produtora do bem (fornecedor) e a empresa que necessita utilizá-lo (arrendatário). Ao final do contrato, o arrendatário que não pode rescindi-lo tem as seguintes alternativas:

- Comprar o bem pelo valor residual contratado.
- Renovar o contrato pelo valor residual. Geralmente a taxa de *leasing* diminui.
- Devolver o bem e encerrar o contrato.

2.7.2. *Leasing* operacional

É uma operação de aluguel regida por contrato praticada entre o produtor do bem (arrendador) e seus usuários (arrendatários), podendo o arrendador ficar responsável pela manutenção ou por qualquer outro tipo de assistência técnica que seja necessária. Geralmente utilizado em ramos de alta tecnologia, por exemplo, na exploração e produção de petróleo, aviação etc.

O arrendatário pode rescindir o contrato a qualquer tempo mediante aviso prévio. Se quiser adquirir o bem ao final do contrato, terá que negociar com a empresa de *leasing*. Geralmente o valor presente das prestações do arrendamento, incluindo custos e serviços de operação, não deve ultrapassar 90% do valor do bem. O prazo contratual, geralmente, deve ser inferior a 75% da vida útil do bem com um mínimo de 90 dias.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.10 – Considere um equipamento no valor de $100, que proporciona um lucro operacional igual a $46 durante quatro anos, ocasião em que estará totalmente depreciado linearmente sem qualquer valor residual. A alíquota do imposto de renda é igual a 40% e a TMA é de 10% *a.a*. Construa o fluxo de caixa desse empreendimento considerando três opções:

- Arrendamento mercantil com quatro quotas de *leasing* de $35.
- Compra a prazo pelo sistema SAC a uma taxa de 10% ao ano.
- Compra à vista.

Solução

A Tabela 2.21 apresenta o fluxo de caixa para o *leasing* após o imposto de renda.

Tabela 2.21 – Fluxo após o IR (arrendamento mercantil)

Ano	0	1	2	3	4
Fluxo original	–	46	46	46	46
Leasing	–	(35)	(35)	(35)	(35)
Lucro tributável	–	11	11	11	11
IR – 40%	–	(4)	(4)	(4)	(4)
Fluxo após IR	–	7	7	7	7

Agora, considere que o equipamento seja comprado com financiamento de $100 em quatro anos pelo sistema SAC com taxa de juros igual a 10% ao ano. A Tabela 2.22 a seguir apresenta o fluxo de caixa da aquisição do equipamento depois do imposto de renda.

Tabela 2.22 – Fluxo após o IR (compra financiada)

Ano	0	1	2	3	4
Fluxo original	–	46	46	46	46
Amortização	–	(25)	(25)	(25)	(25)
Juros	–	(10)	(8)	(5)	(3)
Fluxo após dívida	–	11	13	16	18
Depreciação	–	(25)	(25)	(25)	(25)
Lucro tributável	–	11	13	16	16
IR – 40%	–	(4)	(5)	(6)	(7)
Fluxo após IR	–	7	8	10	11

E por último, veja o resultado na Tabela 2.22 considerando a compra do equipamento à vista:

Tabela 2.23 – Fluxo após o IR (compra à vista)

Ano	0	1	2	3	4
Fluxo Original	(100)	46	46	46	46
Leasing	–	(25)	(25)	(25)	(25)
Lucro tributável	–	21	21	21	21
IR – 40%	–	(8)	(8)	(8)	(8)
Fluxo após IR	(100)	38	38	38	38

Comparando as três alternativas e classificando-as conforme o valor presente líquido descontado a 10% ao ano, resulta nos valores indicados na Tabela 2.24 a seguir.

Tabela 2.24 – Comparação do VPL (compra financiada, *leasing* e compra à vista)

Ano	0	1	2	3	4	VPL
Financiado	–	7	8	10	11	$28,00
Leasing	–	7	7	7	7	$22,19
Compra à vista	(100)	38	38	38	38	$20,45

Pode-se observar que a melhor alternativa é comprar o equipamento por meio de financiamento.

▪▪▪▪▪▪

2.8. Limitação de Capital

Em geral, as empresas têm restrições orçamentárias resultantes da política interna ou das condições do mercado financeiro. A existência dessas restrições implica limitação de capital para investimento, provocando alteração no critério de seleção de projetos independentes. A decisão é tomada no sentido de selecionar o conjunto de alternativas que maximize a rentabilidade dos empreendimentos cuja demanda por recursos não supere o volume de capital disponível.

No caso da análise de alternativas de projetos independentes, o método mais utilizado pelas empresas é aquele que seleciona a melhor combinação de projetos, de tal sorte que se possa ter o maior valor presente líquido, respeitando a disponibilidade de capital para o investimento.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.11 – Admita que uma operadora de petróleo deva analisar a viabilidade econômica dos projetos independentes indicados a seguir:

Tabela 2.25 – Valores de investimento e VPL dos projetos

Projetos	K	L	M	N
Investimento necessário	5	10	15	20
VPL	1	10	9	15

Deseja-se selecionar o melhor conjunto de projetos conforme cada hipótese formulada de limitação de capital para investimento:

- Hipótese 1 – sem restrição de capital.
- Hipótese 2 – disponibilidade de $5.
- Hipótese 3 – disponibilidade de $10.
- Hipótese 4 – disponibilidade de $15.
- Hipótese 5 – disponibilidade de $20.
- Hipótese 6 – disponibilidade de $25.

Solução

1. Sem restrição de capital – nesse caso, todos os projetos seriam realizados porque todos têm o VPL positivo, significando que qualquer projeto é melhor que a alternativa Z.

2. Disponibilidade de $5 – com essa restrição de capital, só se pode realizar o Projeto K.

3. Disponibilidade de $10 – nesse caso, há duas combinações possíveis:
   - Projeto K + Alternativa Z com VPL = $1+$0 = $1.
   - Projeto L com VPL = $10.

   Logo, a decisão é aplicar os $10 disponíveis no projeto L.

4. Disponibilidade de $15 – as seguintes combinações devem ser consideradas:
   - Projeto K + Projeto L com VPL = $1+$10 = $11.
   - Projeto M com VPL = $9.

   Logo, a decisão é aplicar $15 nos projetos K + L.

5. Disponibilidade de $20 – três combinações são possíveis:
   - Projeto N com VPL=$15.
   - Projeto K + Projeto M com VPL = $1+$9 = $10.
   - Projeto K + Projeto L + Alternativa Z com VPL = $1+$10+$0 = $11.

   A decisão é aplicar $20 no Projeto N.

6. Disponibilidade de $25 – quatro combinações são consideradas:
   - Projeto K + Projeto N com VPL = $1+$15 = $16.
   - Projeto L + Projeto M com VPL = $10+$9 = $19.
   - Projeto K + Projeto M + Alternativa Z com VPL = $1+$9+$0 = $10.
   - Projeto K + Projeto L + Alternativa Z com VPL = $1+$10+$0 = $11.

   Logo, a decisão é aplicar $25 na combinação L + M.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.12 – Uma empresa de petróleo dispõe de $35 para realização de seus projetos de investimentos. Sua taxa mínima de atratividade é de 10% ao período. Analise as alternativas de projetos independentes e não repetitivas indicadas a seguir:

Tabela 2.26 – Valores de investimento e VPL dos projetos

Projetos	1	2	3	4
Investimento necessário	10	15	20	30
VPL	2	3	(1)	4

Solução

Excetuando o projeto 3, todos os demais são viáveis, pois têm VPL positivo. O projeto 3 não tem benefício, e por isso deve ser descartado, sendo preferível aplicar o capital disponível na alternativa Z. Pela classificação conforme o VPL, tem-se a seguinte escala prioritária: Projeto 4 > Projeto 2 > Projeto 1 > Alternativa Z > Projeto 3. A Tabela 2.27 seguinte apresenta os conjuntos possíveis de serem formados com os projetos independentes já dispostos em ordem decrescente dos benefícios:

Tabela 2.27 – Análise dos projetos – Exemplo 2.12

Combinações possíveis	Investimento total	VPL	Observação
1+2+3	55	$9	Rejeitado pelo limite $35
2+4	45	$7	Rejeitado pelo limite $35
1+4	40	$6	Rejeitado pelo limite $35
1+2+Z	**35**	**$5**	**$10 na alternativa Z**
4+Z	35	$4	$5 na alternativa Z
2+Z	35	$3	$20 na alternativa Z
1+Z	35	$2	$25 na alternativa Z

Pelo que indica a Tabela 2.27, a decisão é aplicar os $35 no conjunto de projetos: Projeto 1 + Projeto 2 + Alternativa Z com VPL = $2+$3+$0 = $5.

▪▪▪▪▪▪

2.9. Depreciação

Os bens que constituem o ativo de uma empresa, tais como equipamentos, veículos etc., estão sujeitos a constantes desvalorizações devido ao desgaste. Entende-se por depreciação a diferença entre o valor de compra de um bem e seu valor no fim da sua vida útil, chamado *valor residual*.

Existem bens que sofrem desvalorização total durante o período de sua vida útil, isto é, não têm valor residual. Isso acontece principalmente com os bens imateriais, como patentes, marcas etc. A depreciação é, portanto, a perda de valor que sofrem os ativos patrimoniais de uma empresa. Os bens estão sujeitos à desvalorização devido a vários fatores, tais como:

- Físico – desgaste pelo uso e ação do tempo ou natureza.
- Funcionais – desuso, obsolescência e perda de eficiência.
- Eventuais – negligência e acidentes.

Periodicamente, deve ser efetuada uma apropriação de recursos em um montante correspondente à perda de valor do bem durante o exercício considerado. Na realidade, procura-se constituir um fundo de reserva chamado fundo de depreciação, de tal modo que seja possível a aquisição de um novo bem para substituir o atual quando este se tornar antieconômico.

Para evitar que na época da renovação ou substituição de equipamentos ocorram dificuldades financeiras para q reposição, as empresas procuram contabilizar, em cada exercício, uma parte do investimento original como despesa de depreciação correspondente à desvalorização do bem naquele exercício. A finalidade básica da depreciação é permitir que o empresário tenha, ao final da vida útil do bem, um determinado valor que seja suficiente para a reposição, mantendo-se a linha de produção.

Na realidade, os recursos disponíveis por longo prazo, originários das cotas de depreciação, são geralmente reinvestidos nas próprias operações da empresa como forma de prover sua capitalização ou de atenuar a frequente carência de recursos para atender às suas necessidades. As despesas com depreciação não correspondem a um desembolso no exercício, pois representam tão somente uma provisão.

Para compreender o conceito de *despesa de depreciação*, considere um simples processo de fabricação de brocas de perfuração. Admita que o equipamento necessário custe $18 mil e tenha vida útil de cinco anos, com valor residual desprezível. A capacidade de produção é de 10 unidades por dia, operando 360 dias por ano. A matéria-prima, energia, mão de obra etc., ou seja, os custos operacionais são de $10 por unidade produzida. Observe que, efetivamente, a máquina está sendo consumida a cada broca produzida. Uma pequena parte da máquina, pode-se dizer, incorpora-se ao custo da produção de cada broca. Como medir essa parcela que se consome a cada broca que a máquina produz? Conforme as informações, pode-se concluir que, em cada broca produzida a parcela máquina que se desgasta é igual a $18.000/(5×360×10), ou seja, igual a $1 por broca.

Enfatiza-se o fato de que realmente está havendo um custo de depreciação de $1 para cada broca que a máquina produz. Esse custo de depreciação, similar aos demais, é adicionado aos $10 do custo operacional, perfazendo um custo unitário por broca igual a $11, que é o custo da produção de uma broca. Na prática, não se lança a depreciação por unidade produzida; normalmente faz-se essa apropriação por exercício contábil, geralmente igual a um ano.

É importante ressaltar o papel desempenhado por esse fundo de depreciação na manutenção dos investimentos da empresa. Essas parcelas de depreciação que são recuperadas permitem a renovação dos equipamentos em épocas oportunas, sem depender de novas captações de recursos externos. No exemplo exposto, após cinco anos acumula-se $18 mil no fundo de depreciação para a compra de uma nova máquina de fabricar brocas de perfuração, iniciando-se um novo ciclo de produção.

2.9.1. Influência da depreciação no lucro operacional

No Brasil adota-se, em geral, a depreciação linear ou método da linha reta, com valor residual nulo. A legislação aceita, porém, que se modifique o processo de cálculo da depreciação desde que este possa ser justificado tecnicamente, por laudo de órgão governamental especializado. Há ainda casos especiais em que se admite a depreciação acelerada, por exemplo, para empresas que operam em turnos contínuos de trabalho.

De maneira geral, os benefícios decorrentes das despesas podem ser definidos e quantificados com facilidade. Se os salários não forem pagos, não se tem mão de obra para fabricar os produtos. Se a matéria-prima não for comprada, não se tem produção, e assim por diante. No caso de despesas de capital ou investimento, a situação é distinta. É mais difícil determinar os benefícios resultantes da instalação de uma unidade operacional de um projeto de pesquisa e desenvolvimento ou de uma campanha publicitária, uma vez que esses benefícios resultam no longo prazo. Os gastos cujos benefícios se estendem por vários períodos são, portanto, considerados investimentos, enquanto os dispêndios cujos benefícios ocorrem no próprio exercício, são considerados como despesas. Para efeito de tributação, os gastos com despesas podem ser deduzidos do lucro tributável no exercício em que tenha ocorrido, enquanto os gastos com investimentos devem ser amortizados ou depreciados ao longo de vários exercícios.

2.9.2. Bens tangíveis

São conceituados como bens tangíveis aqueles que têm existência própria, como o aparelhamento industrial ou comercial da empresa conforme seu tipo de atividade. Os bens tangíveis relacionados no ativo imobilizado da empresa são depreciados periodicamente em cada exercício fiscal.

Tabela 2.28 – Exemplos de bens tangíveis

Equipamento	Anos	Equipamento	Anos
Navios	20	Trator	5
Imóveis	25	Caminhão	4
Veículos	5	Máquina	10
Veículos leves	5	Perfuração marítima	10

2.9.3. Bens intangíveis

Os bens intangíveis se caracterizam por não serem reconhecidos visualmente, mas têm valor monetário. Divide-se os bens intangíveis em dois grupos, o primeiro sendo composto por bens do tipo direito de prospecção de jazidas, fontes minerais, reservas florestais etc., e o segundo grupo composto por bens intangíveis do tipo marcas e patentes, direitos autorais etc.

Os investimentos em bens intangíveis do primeiro grupo são apropriados em cada exercício com despesas operacionais denominadas de exaustão. A cota anual de exaustão é obtida mediante a aplicação de uma taxa percentual que permite, findo o período contratual de exploração, a recuperação total do investimento realizado, geralmente, em 10 anos. Os bens intangíveis do segundo grupo, do tipo marcas e patentes, são apropriados como despesa operacional de amortização em cada período, podendo ser realizados no prazo mínimo de cinco anos e máximo de dez anos.

2.9.4. Despesa e investimento

Para efeito do lucro tributável, deve-se distinguir desembolso para investimento e desembolso para despesas. Considera-se como despesa de investimento o gasto realizado com bens de produção que têm vida útil longa e, portanto, são consumidos lentamente no processo produtivo da empresa ao longo de vários exercícios. Exemplificando, imagine uma operadora de petróleo que adquire produtos para tratamento de água de produção e um vaso de separação para o sistema de tratamento. A compra dos produtos de tratamento é imediatamente lançada e considerada como despesa e a compra do vaso separador é considerada como investimento, já que tal bem deverá durar vários anos e constará da relação de bens da operadora como ativo imobilizado.

À medida que o separador vai sendo consumido no processo de separação, a legislação tributária permite que, em cada período, seja reduzida do lucro tributável do exercício uma parcela do valor original do bem depreciado. Essa parcela é chamada de depreciação legal. As deduções das parcelas de depreciação resultam em benefícios para as empresas. Deseja-se sempre pagar menos imposto de renda, e assim as empresas têm interesse em deduzir do lucro tributável o máximo e o mais cedo possível.

2.9.5. Métodos de depreciação

A depreciação teórica consiste em adotar um critério ou método matemático que permita o cálculo da distribuição da depreciação ao longo da sua vida útil, pelos diversos exercícios financeiros, por meio dos quais, presumivelmente, o bem será consumido. Não obstante a existência de vários critérios para o cálculo de depreciação, a legislação fiscal brasileira adota em geral o mais simples, que é o método da depreciação linear.

a) Depreciação linear

É o método mais simples e o mais utilizado. Consiste em dividir o total a depreciar pelo número de anos de vida útil do bem.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.13 – Seja, por exemplo, o cálculo da depreciação de um vaso separador que custa $40 mil e, após dez anos de vida útil, tem um valor residual de $5 mil.

Solução

A quota anual de depreciação é, por definição

$$d = \frac{40.000 - 5.000}{10} = \$3.500 \tag{2.30}$$

Tabela 2.29 – Depreciação linear

Período	Depreciação Anual	Depreciação Acumulada	Valor Contábil
0	–	–	40.000
1	3.500	3.500	36.500
2	3.500	7.000	33.000
...	...	...	...
10	3.500	35.000	5.000

▪▪▪▪▪▪

b) Depreciação à taxa constante

O método da taxa constante consiste em estabelecer uma taxa constante de depreciação que é aplicada sobre o valor do bem no fim de cada exercício. A equação é

$$i_D = 1 - \left(\frac{\text{VF}}{\text{VP}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.31}$$

onde i_D é a taxa de depreciação, VF é o valor residual, VP é o valor original e *n* é o tempo de vida útil.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.14 – Considerando os dados do Exemplo 2.13, calcule a quota de depreciação à taxa constante.

Solução

Por definição, a taxa será

$$i_D = 1 - \left(\frac{5}{40}\right)^{\frac{1}{10}} = 0{,}188 \Leftrightarrow r = 18{,}8\% \tag{2.32}$$

O plano de depreciação é o da Tabela 2.30 a seguir.

Tabela 2.30 – Depreciação à taxa constante

Período	Depreciação Anual	Depreciação Acumulada	Valor Contábil
0	–	–	40.000,00
1	7.520,00	7.520,00	32.480,00
2	6.106,24	13.626,24	26.373,76
...	...	...	...
10	1.154,47	35.015,92	4.984,08

▪▪▪▪▪▪

c) Depreciação capitalizada

De acordo com os critérios, observa-se que as parcelas de depreciação são reservadas para cada exercício contábil, e não são capitalizadas ao longo do tempo. Sabe-se que essas parcelas de depreciação são usadas como capital de giro na própria empresa, sem que sejam computados juros sobre essas quantias. Levando-se em consideração esse fato, pode-se adotar o critério de depreciação capitalizada, que consiste em calcular uma quota anual fixa que, colocada ao fim de cada período em um fundo de depreciação, a juros compostos, produza, no fim de *n* períodos, o montante a depreciar.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.15 – Com os dados do Exemplo 2.13, calcule a quota considerando depreciação capitalizada a uma taxa de 10% ano.

Solução

O problema se resume em calcular uma parcela *d* (quota de depreciação) que resulte no valor do bem depreciável subtraído do valor residual, assim

$$d = \frac{(40.000 - 5.000) \times 0{,}1}{(1 + 0{,}1)^{10} - 1} = \$2.196{,}09 \tag{2.33}$$

O plano de depreciação encontra-se a seguir.

Tabela 2.31 – Depreciação capitalizada

Período	Quota de Depreciação	Juros	Fundo de Depreciação	Valor Contábil
0	–	–	–	40.000,00
1	2.196,09	–	2.196,09	37.803,91
2	2.196,09	219,61	4.611,79	35.388,21
...	...	...	...	...
10	2.196,09	2.982,18	35.000,02	4.999,98

▪▪▪▪▪▪

2.9.6. Depreciação e imposto de renda

A depreciação contábil beneficia o empresário em termos de imposto de renda, visto que o governo permite seu abatimento para efeito de cálculo do lucro tributável da empresa. A legislação permite que se considere o valor residual igual a zero, o que é vantajoso para o empresário, pois isso eleva o valor da depreciação. Já a alíquota do imposto de renda incide sobre o lucro tributável da empresa, que após a dedução da quota de depreciação, tem a seguinte expressão:

$$\text{LUCRO TRIBUTÁVEL} = \text{RECEITAS} - \text{DESPESAS} - \text{DEPRECIAÇÃO} \tag{2.34}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2.16 – Considere a compra de uma pequena sonda por $1.100, com receitas anuais iguais a $500 e despesas estimadas em $200. A vida útil dessa sonda é de cinco anos, valor residual de $100 e o imposto de renda de 30%. Considerando um prazo legal para depreciação em cinco anos, construa um fluxo de caixa com as seguintes informações em coluna: ano, investimento, receitas e/ou despesas, lucro tributável, imposto de renda e fluxo após o IR.

Solução

Considerando uma depreciação linear, a quota será por definição

$$d = \frac{(1.100 - 100)}{5} = \$200 \tag{2.35}$$

Com isso, pode-se montar um fluxo de caixa conforme indicado na Tabela 2.32 a seguir:

Tabela 2.32 – Fluxo de caixa – Exemplo 2.16

Ano	Investimento	Receitas/Despesas	Depreciação	Lucro tributável	IR	Fluxo após IR
0	(1.000)	–	–	–	–	(1.000)
1	–	300	200	100	30	270
...	–	...	...	...	...	...
5	–	300	200	100	30	270

▪▪▪▪▪▪

2.10. Competência Hierárquica

Do ponto de vista da economia, os limites definidos para cada nível hierárquico não devem servir de motivo para não se observar os critérios de avaliação econômica com base nas melhores práticas, ainda que a prática de escalonar tais volumes seja recomendável. Não obstante, é fundamental observar que os valores demandados pelas oportunidades de investimento não estão "hierarquizados" nos mesmos níveis definidos pela empresa. Mais exatamente, as metodologias de avaliação econômica de projetos são válidas para quaisquer volumes financeiros, independentemente de quem tem a competência para decidir sobre esses valores.

Se as informações e os critérios de decisão forem definidos claramente e sem ambiguidades para todos os níveis hierárquicos, não haverá razão para que um gerente de nível hierarquicamente inferior possa estar mais suscetível à decisão incorreta do que seus superiores. Exceção a essa regra ocorre quando os executivos de maior nível hierárquico têm conhecimentos de informações não disponíveis aos gestores inferiores. Sob qualquer ponto de vista, todos os níveis hierárquicos devem sujeitar suas decisões sobre investimentos ao que determinam as melhores práticas econômicas, principalmente o nível mais elevado da corporação, no qual as decisões envolvem grandes volumes financeiros.

2.11. Problemas Propostos

Problema 2.1 – A produção de um poço de baixa produção de petróleo *onshore* proporciona uma receita líquida de $20 mil no primeiro ano, diminuindo em seguida à base de $1 mil por ano. Estima-se uma vida útil de 12 anos para esse poço e um valor residual dos equipamentos remanescentes de $26 mil. Determine qual o valor máximo de compra à vista desse poço de produção para uma taxa de atratividade igual a 10% ao ano.

Resposta $114.658

Problema 2.2 – Uma operadora de petróleo pretende automatizar um sistema de bombeio mecânico em um campo de produção. Esse sistema tem vida útil de cinco anos e poderá ser comprado em cinco pagamentos anuais iguais a $100 mil. O custo operacional desse sistema é estimado em $15 mil por ano e seu valor residual é de $6 mil. O sistema de automação economizará $30 mil por mês de mão de obra. Determine a rentabilidade mensal desse sistema para uma taxa de atratividade igual a 10% ao ano.

Resposta $R_{sistema}$ = $9.091/mês

Problema 2.3 – Deseja-se selecionar um conjunto de projetos de investimento em E&P, conforme o quadro a seguir, que maximize o VPL para as seguintes disponibilidades de capital:

a) Disponibilidade $15.

b) Disponibilidade $70.

Tabela 2.33 – Dados – Problema 2.3

Projeto	A	B	C	D
Investimento	10	20	30	40
VPL	(1)	5	2	4

Resposta a) Não realizar nenhum investimento, b) Melhor opção B + D. Ver quadro a seguir:

Tabela 2.34 – Dados – Problema 2.3

Combinações	Investimento	VPL	Observação
B+C+D	90	11	Rejeitado
C+D	70	6	–
B+D	60	9	10 na TMA
B+C	50	7	20 na TMA
D	40	4	30 na TMA
C	30	2	40 na TMA
B	20	5	50 na TMA

Problema 2.4 – Um equipamento no valor de $500 mil terá valor residual de $100 mil após dez anos de uso. Qual o valor da primeira e da segunda quota de depreciação dessa máquina pelo método da taxa constante?

Resposta d_1 = $74.335,00 e d_2 = $63.283,62

Problema 2.5 – Determine o tempo de retorno do seguinte empreendimento com taxa mínima de atratividade de 10% ao ano.

Tabela 2.35 – Dados – Problema 2.5

Dados	Valores	Dados	Valores
Investimento inicial	$513.121,00	Ano 2	$200 mil
Receitas anuais	Final de cada período	Ano 3	$100 mil
Ano 1	$300 mil	Ano 4	$50 mil

Resposta Três anos

Problema 2.6 – A produção manual de um produto apresenta uma despesa anual de $7 mil. Pretende-se mecanizar a produção. Escolha, dentre as propostas de mecanização apresentadas, a mais conveniente se a taxa de atratividade da empresa é de 10% *a.a.*, e a vida útil do equipamento é de cinco anos. Utilize o método da série uniforme equivalente.

Tabela 2.36 – Dados – Problema 2.6

Propostas	Condições	Valores
Mecanização I	Investimento inicial	$12.000
	Custo anual de operação	$3.000
Mecanização II	Investimento inicial	$15.000
	Custo anual de operação	$2.500
	Valor residual do equipamento	$3.000

Resposta $RL_{MANUAL} = -\$7.000/ano$, $RL_{MEC\ I} = -\$6.166/ano$, $RL_{MEC\ II} = -\$5.996/ano$. A proposta Mecanização II é a melhor.

Problema 2.7 – Analise a alavancagem depois do IR de um investimento correspondente à compra de um equipamento considerando que 60% do seu valor será financiado.

Tabela 2.37 – Dados – Problema 2.7

Dados	Valores
Investimento inicial	$100
Receita anual	$40
Prazo legal de depreciação linear	4 anos
Imposto de renda	40%
Custo do dinheiro	10% *a.a.*
Sistema de financiamento	Tabela PRICE

Resposta

Tabela 2.38 – Resposta – Problema 2.7

Ano	Original (recursos próprios)		Financiado	
	Antes IR	Após IR	Antes IR	Após IR
0	(100)	(100)	(40)	(40)
1	40	34	21	17
2	40	34	21	17
3	40	3,4	21	16
4	60	46	41	28
TIR (%)	26,4	16,8	46	30,3

Problema 2.8 – Compare as duas alternativas apresentadas para uma TMA = 5% *a.p.*

Tabela 2.39 – Dados – Problema 2.8

	0	1	2	TIR
Alternativa A	(100)	30	100	16%
Alternativa B	(100)	100	20	17%

Resposta VPL_A = \$19 e VPL_B = \$13. A alternativa A é a melhor.

Problema 2.9 – Com \$3 MM depositados a uma taxa de juros de 5% ao mês pretende-se comprar um apartamento. Escolha, entre as propostas apresentadas a seguir, a mais vantajosa.

Tabela 2.40 – Dados – Problema 2.9

Propostas	Condições	Valores
Proposta A	À vista	\$3 MM
Proposta B	Sinal	\$500 mil
	25 prestações mensais iguais a \$275.253,00	\$6.881.300
Proposta C	Sinal	\$1 MM
	25 prestações mensais iguais a \$215.252,00	\$5.381.300
	Na entrega da chave (final do 25º mês)	\$500 mil

Resposta VPL_A = – \$3 MM, VPL_B = – \$4.379.386, VPL_C = – \$4.181.401. A proposta A é a melhor.

Problema 2.10 – Decida entre comprar ou alugar uma sonda de perfuração considerando um empreendimento correspondente à operação dessa sonda com as seguintes características:

Tabela 2.41 – Dados – Problema 2.10

Dados	Valores
Investimento inicial	$90
Receita anual	$50
Prazo legal de depreciação linear	3 anos
Imposto de renda	30%
Valor residual	Nulo
TMA	30%
Leasing – três prestações	$40

Resposta A melhor alternativa é comprar a sonda.

Tabela 2.42 – Resposta – Problema 2.10

	0	1	2	3	VPL
Comprar (após IR)	(90)	44	44	44	$19
Arrendar (após IR)	–	7	7	7	$17

3

CUSTO DE PRODUÇÃO

Cuidado com as pequenas despesas; um pequeno vazamento afundará um grande navio.
Benjamim Franklin

A determinação dos custos de um projeto é uma tarefa das mais importantes na análise de um empreendimento. Entende-se por custo a soma dos valores consumidos e aplicados para se obter determinado bem ou serviço. Um analista de projetos de produção de petróleo, por exemplo, não pode prescindir de um acompanhamento minucioso dos custos, uma das condições fundamentais para o sucesso do empreendimento, e isso o ajudará na avaliação da eficiência e rentabilidade do projeto. Até mesmo as organizações sem fins lucrativos, ou instituições do governo, devem monitorar o custo de pessoal, dos insumos, manutenção etc.

Há diferença entre os termos *custo* e *despesa*. Os custos são gastos que a empresa realiza com o produto ou serviço, com objetivo de vendê-lo no mercado consumidor e estão associados, geralmente, à atividade fim pela qual a empresa foi criada. Já as despesas são os gastos com as atividades de apoio e não geram, por si só, retorno financeiro, tão somente propiciam a funcionalidade da produção.

Eventualmente, há dificuldade em classificar um gasto como custo ou como despesa, razão pela qual acabam sendo usados como sinônimos. Alguns termos associados ao custo são de uso corrente nos meios de produção com o objetivo de diferenciá-los, estre eles: custo primário, custo rateado e comum, custo de transformação ou conversão, custo de mercadoria ou produto vendido, custo de qualidade, custo ambiental, custo histórico etc.

3.1. Classificação dos Custos

Com relação à maior ou menor facilidade de apuração contábil de seus valores na produção de determinado bem ou serviço, os custos podem ser classificados em:

- Diretos – são aqueles que podem ser imediatamente apropriados para um produto ou um serviço.
- Indiretos – são aqueles que dependem de cálculos, rateios ou estimativas para serem divididos e apropriados em diferentes produtos ou diferentes serviços.

Para uma empresa que fabrica um só produto, sem variações de qualidade ou tamanho, ou presta um serviço, existem somente custos diretos. O custo indireto surge quando a empresa fabrica mais de um produto, ou mais de uma qualidade ou tamanho de um produto, ou quando a empresa presta mais de um serviço e o custo, por consequência, é atribuído a mais de um produto ou serviço. Com relação à sua participação na produção, os custos classificam-se em:

- Fixos – são considerados custos fixos todos os valores consumidos ou aplicados que independem do fato da empresa estar produzindo uma quantidade maior ou menor de bens ou serviços, ou até mesmo em parada de manutenção. Como exemplo de custos fixos na indústria do petróleo, podem ser citados os salários do pessoal administrativo, aluguéis de prédios, depreciação etc.
- Variáveis – são os custos que demonstram dependência com a variação do nível de produção. O melhor exemplo para custo variável é a matéria-prima, custo que segue a quantidade produzida. Outro exemplo de custo variável, em plataformas de produção de petróleo, são os insumos químicos para o tratamento de água produzida.

Determinados componentes podem se apresentar ora como custo fixo, ora como custo variável. O valor da mão de obra direta, por exemplo, é tipicamente um custo variável. No entanto, o valor da mão de obra na fase de instalação da empresa ou nas fases de partida inicial de plantas de processo, quando a produção ainda não se iniciou, constitui um custo fixo.

Existe uma classe especial de custo, denominada de custo variável em saltos, ou *custo semifixo*. Por exemplo, quando um distribuidor de óleo diesel resolve entregar o dobro do volume nos postos de vendas e necessita dobrar a frota de carretas, para o distribuidor o custo fixo é aquele necessário para entregar intervalos de volumes do produto, variando apenas em saltos esporádicos. Esses custos podem ser definidos como custos fixos que se repetem toda vez que a empresa necessita ampliar a sua capacidade produtiva.

Os custos semifixos podem ser:

- Reversíveis – são excluídos logo que a empresa diminui o seu ritmo extraordinário de produção, retornando ao seu ritmo normal. Exemplo são os salários de novos mestres, que são despedidos quando se encerra o ciclo produtivo extra, ou os contratos de consultores externos para operações iniciais de sistemas de alta complexidade.
- Irreversíveis – quando permanecem onerando a empresa mesmo depois que ela retorna ao seu ritmo normal de produção. Exemplo são as despesas de conservação de novos equipamentos suplementares adquiridos, os quais não podem ser vendidos após o encerramento do ciclo produtivo extra.

Há um *custo* que não é registrado na contabilidade, mas considerado na análise de investimento, denominado de *custo de oportunidade*. Enquanto a contabilidade se ocupa com o registro do desempenho passado da empresa, o analista de projeto tende a olhar as perspectivas futuras da empresa, pois está preocupado com a escassez de recursos. Assim, os custos de oportunidade referem-se aos custos associados às oportunidades que são deixadas de lado caso a empresa não utilize seus recursos da maneira mais rentável, conforme visto no **Capítulo 1**.

3.2. Curvas de Custos

A atividade que se destina a produzir as informações sobre os custos para os diversos níveis gerenciais é chamada de contabilidade de custos. É nessa atividade que se coletam, se classificam e se registram os custos das diversas atividades da empresa.

3.2.1. Taxa de Crescimento do Custo Variável

A taxa de crescimento do custo variável de uma empresa que almeje aumentar a produção de Q_1 para Q_2 é definida pela razão entre o aumento do custo variável (CV_2 - CV_1) e o respectivo incremento na produção (Q_2 - Q_1), ou seja:

$$\text{taxa de variação do CV} = \frac{(\text{CV}_2 - \text{CV}_1)}{(\text{Q}_2 - \text{Q}_1)} \tag{3.1}$$

A taxa instantânea de crescimento do custo variável é definida pela derivada da curva CV em relação à quantidade produzida Q, ou seja:

$$\text{taxa instantânea do CV} = \lim_{\Delta \text{Q} \to 0} \frac{\Delta \text{CV}}{\Delta \text{Q}} = \frac{d(\text{CV})}{d\text{Q}} \tag{3.2}$$

De acordo com a Figura 3.1 a seguir, pode-se observar três fases para o comportamento das taxas de crescimento do custo variável:

- Taxas decrescentes – Essa fase deve-se à *economia de escala*. À medida que a produção aumenta, as combinações de recursos possibilitam melhores rendimentos. Embora haja acréscimo nos custos variáveis, esses aumentos proporcionais são cada vez menores.
- Taxa constante – O processo anterior tem um limite. A taxa de crescimento dos custos variáveis cai após os efeitos da economia de escala e se estabelece por um período, mantendo o custo crescente em uma taxa menor e constante.
- Taxas crescentes – No momento em que os recursos fixos existentes não suportam os aportes adicionais de recursos variáveis com a mesma eficiência, a curva inverterá o seu sentido de concavidade, voltando-se para cima. Nesse trecho, o nível de produção se eleva com custos crescendo a uma velocidade maior. É o momento de rever a estrutura de custos fixos, ou decidir se é, ou não, a hora de *alavancar* o processo de produção.

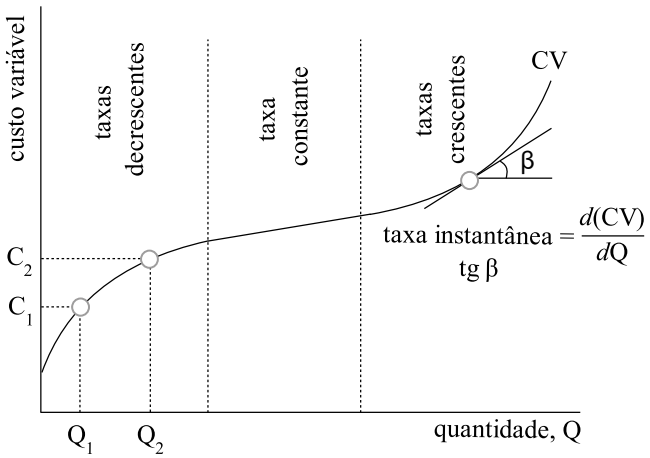


Figura 3.1 – Curva de custo variável.

3.2.2. Custo total

O custo total CT é composto de custo fixo total CFT e custo variável total CVT, ou seja:

$$CT = CFT + CVT \tag{3.3}$$

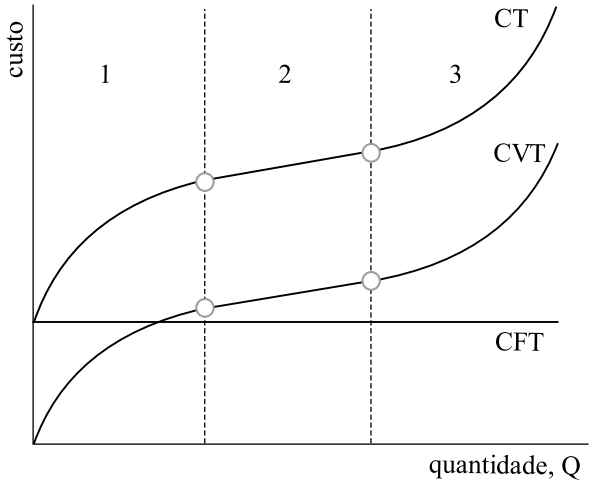


Figura 3.2 – Curvas de custos: fixo, variável e total.

3.2.3. Custo unitário e custo médio

O custo fixo unitário CFU é a divisão do custo fixo total pela quantidade produzida Q, ou seja:

$$\mathrm{CFU} = \frac{\mathrm{CFT}}{\mathrm{Q}} \tag{3.4}$$

O gráfico da Figura 3.3 a seguir mostra o comportamento da função custo fixo unitário, CFU.

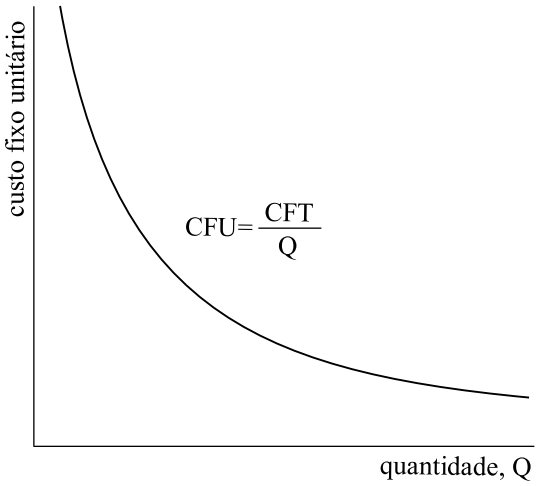


Figura 3.3 – Função do custo fixo unitário.

No início, para baixos níveis de produção, o custo de uma unidade produzida é muito elevado. No entanto, à medida que se atinge níveis mais altos de produção, com o custo fixo mantendo-se inalterado, é observada uma rápida redução do custo fixo unitário. A queda do custo fixo unitário é bem acentuada no início, desacelerando progressivamente até tornar-se insignificante, tendendo para valores baixos (assintótica).

De forma similar, o custo variável unitário CVU ou *v* resulta da divisão do custo variável total pelo número de unidades produzidas, logo

$$\mathrm{CVU} = v = \frac{\mathrm{CVT}}{\mathrm{Q}} \tag{3.5}$$

O custo variável unitário apresenta uma curva de valores que decrescem até um ponto mínimo para então voltar a crescer lentamente. Isso acontece devido ao regime de economia de escala no início e posteriormente devido ao princípio dos rendimentos decrescentes.

É o que se denomina de *lei dos rendimentos decrescentes*. Um exemplo típico é o aumento de trabalhadores para o cultivo de uma determinada extensão de terra. Em um primeiro momento a produção aumenta; em seguida, a produção não se altera na mesma proporção devido ao excesso de trabalhadores em relação à extensão de terra, que permanece constante.

O custo médio unitário CMU resulta da soma dos dois custos definidos anteriormente, ou seja:

$$\mathrm{CMU} = \mathrm{CFU} + \mathrm{CVU} = \frac{\mathrm{CFT}}{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{CVT}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{Q}} \tag{3.6}$$

O comportamento da função CMU incorpora o custo fixo unitário e o custo variável unitário. Assim, inicialmente, seu valor em relação às quantidades produzidas declina rapidamente devido, principalmente, à queda do custo fixo unitário. Após um período de estabilidade, o custo médio unitário apresenta uma sensível tendência de crescimento devido à lei dos rendimentos decrescentes (ver Figura 3.4).

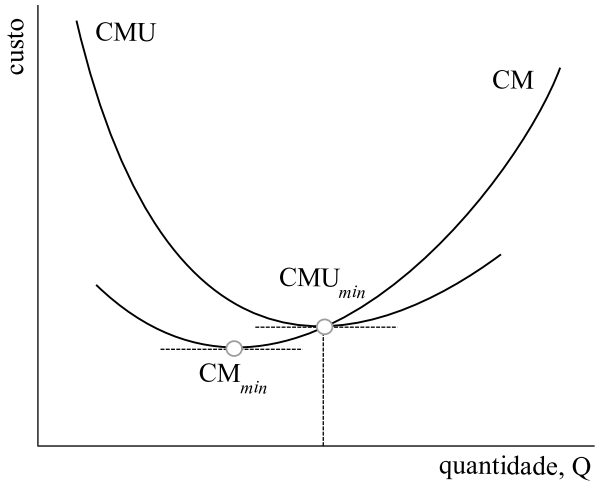


Figura 3.4 – Função custo médio unitário (CMU) e custo marginal (CM).

3.2.4. Custo marginal

O custo marginal CM é o acréscimo de custo para se produzir uma unidade adicional. Em termos matemáticos o custo marginal é a derivada do custo total CT em relação à quantidade produzida, ou seja:

$$\mathrm{CM_Q} = \frac{\mathrm{CT(Q + \Delta Q) - CT(Q)}}{\Delta \mathrm{Q}} \Leftrightarrow \mathrm{CM_Q} = \frac{d(\mathrm{CT})}{d\mathrm{Q}} \tag{3.7}$$

Considerando o comportamento da curva de custo total indicado na Figura 3.2, pode-se perceber três estágios de taxas de crescimento. O comportamento dessas taxas reflete o comportamento do custo marginal na Figura 3.4. Em um estágio inicial, percebe-se que o custo marginal decresce até certo nível de produção, passando por um mínimo, para em seguida crescer alcançando elevados valores, principalmente a partir do instante em que a produção entra na fase de rendimentos decrescentes.

Observe que o custo médio unitário decresce enquanto é maior que o custo marginal. A interpretação desse fato é intuitiva: se o custo de produzir uma unidade adicional é menor que o custo médio, logo, ao se produzir mais uma unidade, o custo médio diminui. Por outro lado, quando o custo marginal é superior ao custo médio, este começa a se elevar à medida que se produz mais uma unidade. Assim, a curva de custo marginal corta a curva de custo médio em seu valor mínimo. Acima dessa quantidade, qualquer produção adicional eleva o custo médio.

A partir dessa observação podem-se extrair dois corolários simples:

- Quando o custo médio é uma função crescente da produção, o custo marginal é superior ao custo médio unitário.
- Quando o custo médio não aumenta e nem diminui com a produção, o custo marginal é igual ao custo médio unitário.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3.1 – Suponha que o custo fixo total de produção de petróleo de um pequeno reservatório do campo da Fazenda Belém (óleo extra pesado) seja de $500 e que o custo variável total seja função do volume de óleo produzido, uma vez que depende dos custos de injeção de vapor, que é utilizado nos casos de produção de óleo extra pesado. Admita que a função do custo variável total seja conforme a Eq. (3.8) a seguir:

$$\mathrm{CVT} = 2\mathrm{Q}^3 - 44\mathrm{Q}^2 + 340\mathrm{Q} \tag{3.8}$$

A partir desses dados, construa um gráfico com as seguintes curvas de custos para 15 mil barris produzidos:

- Custo variável total (CVT).
- Custo total (CT).
- Custo médio por mil barris (CMU).
- Custo marginal (CM).

Qual a quantidade, em milhares de barris produzidos, a partir da qual a produção adicional de um mil barris aumenta o CMU?

Solução

Considere uma unidade o equivalente a mil barris. Assim, conforme a Eq. (3.3), o custo total de produção é

$$\mathrm{CT} = \mathrm{CVT} + \mathrm{CFT} = 2\mathrm{Q}^3 - 44\mathrm{Q}^2 + 340\mathrm{Q} + 500 \tag{3.9}$$

O custo marginal, por definição, é a derivada do custo total em relação à quantidade produzida, portanto

$$\mathrm{CM} = \frac{d(\mathrm{CT})}{d\mathrm{Q}} = 6\mathrm{Q}^2 - 88\mathrm{Q} + 340 \tag{3.10}$$

Já o custo médio é o custo total dividido pela produção, ou seja

$$\mathrm{CMU} = \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{Q}} = \frac{2\mathrm{Q}^3 - 44\mathrm{Q}^2 + 340\mathrm{Q} + 500}{\mathrm{Q}} = 2\mathrm{Q}^2 - 44\mathrm{Q} + 340 + \frac{1}{\mathrm{Q}}500 \tag{3.11}$$

A Figura 3.5 a seguir indica as curvas representativas das Eqs. (3.8) a (3.11). Observe que a curva de custo fixo total é uma reta cujo valor é \$500. Note também que a quantidade a partir da qual a produção adicional de mil barris aumenta, o CMU é de 12 mil barris. A produção de 12 mil barris tem CMU de \$142, e de 13 mil resulta um CMU de \$144.

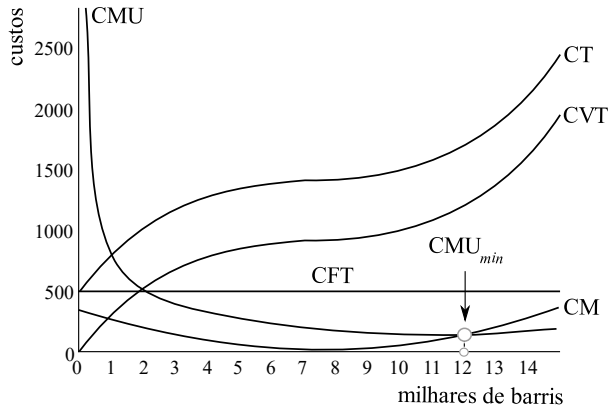


Figura 3.5 – Curvas de custos – Exemplo 3.1.

▪▪▪▪▪▪

3.2.5. Custo de longo prazo *versus* custo de curto prazo

Por definição, o tempo em que a empresa é impedida de aumentar de tamanho, seja por fatores de mercado ou por opção estratégica, é chamado de curto prazo. Para cada tamanho de empresa há uma função de custo médio associada ao curto prazo, cujo tempo varia conforme os fatores de produção. Por exemplo, no caso de uma refinaria de petróleo, o curto prazo pode ser a etapa inicial de entrada de apenas algumas plantas, como uma unidade de destilação atmosférica e outra de hidrotratamento de óleo.

Considere uma empresa cuja produção seja viabilizada em instalações de pequeno, médio e grande porte. Uma vez decidido o tamanho das instalações, o nível de produção dependerá, essencialmente, da variação dos insumos dentro de um intervalo mínimo e máximo suportado pelos custos fixos. Uma questão primária é avaliar que porte de instalação é o mais indicado com base no CMU de curto prazo (ver Figura 3.6)

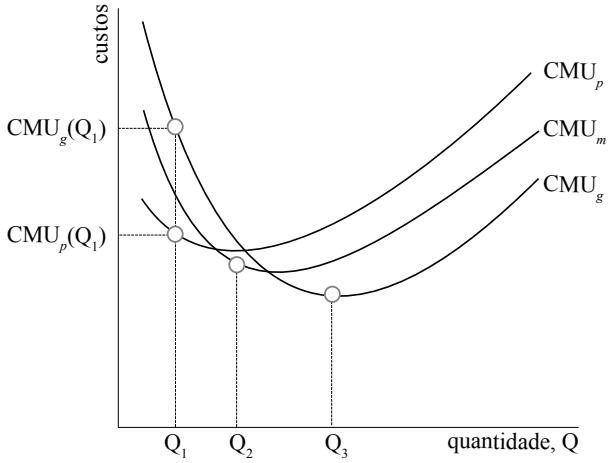


Figura 3.6 – Custo médio de curto prazo – empresa de pequeno, médio e grande porte.

Caso a empresa saiba a quantidade que planeja produzir antes de construir uma nova planta de produção, deve escolher um tamanho que resulte no menor custo médio de curto prazo, e o porte da planta será proporcional ao mercado de consumidores que a empresa deseja atender no curto prazo.

A Figura 3.6 informa que, para um nível de grande produção Q_3, a planta de grande porte é a que apresenta menor custo médio unitário. Já para um nível médio de produção Q_2, a planta de médio porte implica menor custo médio unitário e, para uma pequena produção Q_1, a planta de pequeno porte é a mais adequada. Observe também que, quando o nível de produção é Q_1, o ganho em custo médio que resulta da troca de uma planta de grande porte por uma de pequeno porte é:

$$\text{ganho} \Leftrightarrow \text{CMU}_g(\text{Q}_1) - \text{CMU}_p(\text{Q}_1) \tag{3.12}$$

Essa economia surge devido à redução dos custos fixos em uma planta de menor porte quando comparado com os custos fixos de uma planta de maior porte, permitindo adicionalmente que a empresa ajuste, de forma mais eficiente, suas operações ao tamanho da planta. Empresas com elevados custos fixos (grande estrutura de produção) não devem produzir por um longo prazo volumes reduzidos.

É importante notar que, para grandes empresas que demandam tempo para a capacitação de profissionais, como na indústria de petróleo e gás, assumir um aumento de custos fixos com a contratação de novos empregados para atender a uma produção crescente, no futuro, pode ser encarado como uma estratégia de sobrevivência. Por outro lado, caso o aumento da produção não se verifique no tempo esperado, os custos fixos penalizarão a empresa por muito tempo.

No longo prazo, a empresa pode escolher qualquer nível de custos fixos, conferindo-lhes características de custos variáveis. Em outras palavras, no curto prazo a empresa tem um tamanho fixo de unidade produtiva, enquanto no longo prazo a empresa é livre para ajustar o tamanho da sua unidade de produção. Desse modo, a empresa terá que ser capaz de fazer um produto em um determinado nível de produção no longo prazo tão bem quanto o faria no curto prazo (ver Figura 3.7).

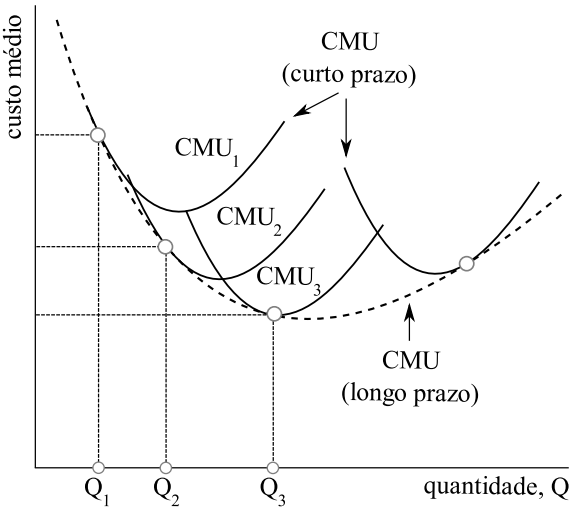


Figura 3.7 – Custo médio de curto prazo e de longo prazo.

Como se observa na Figura 3.7, o custo médio de longo prazo é o mesmo custo médio de curto prazo para qualquer nível de produção. Na prática, a gestão de mudanças quanto ao tamanho ideal da empresa não é tão simples. Obter uma performance de custo médio unitário no longo prazo é um desafio para os gestores, sobretudo em empresas complexas, como é o caso do setor de óleo e gás.

3.3. Equilíbrio da empresa

Uma empresa está em equilíbrio quando o preço de venda de seus produtos ou serviços cobre três componentes fundamentais:

- Custo operacional (matéria-prima, mão de obra, energia, aluguéis etc.).
- Retorno do capital (depreciação do capital empregado).
- Remuneração do capital (lucro).

Mais ainda, um dos principais objetivos econômicos da empresa é a maximização do lucro, traduzido pela máxima diferença possível entre a receita total e o custo total, ou no mínimo produzir e vender em uma quantidade que garanta uma receita total que suporte os custos totais. Essa quantidade mínima é conhecida pelo termo *break-even point*, ponto em que as receitas se igualam aos custos (ver Figura 3.8).

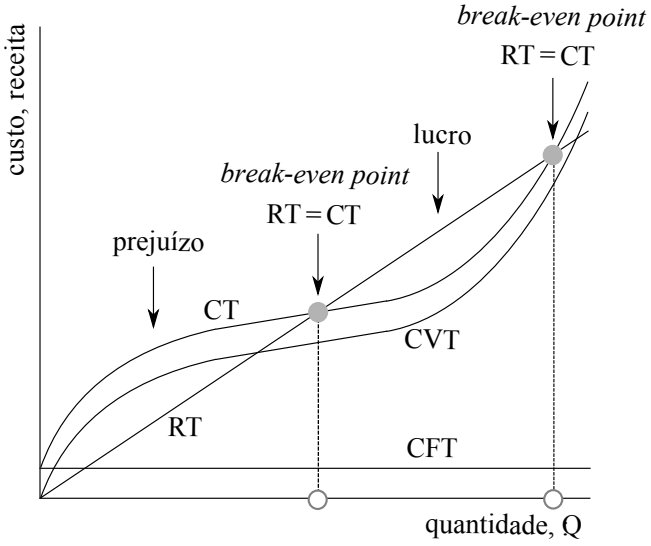


Figura 3.8 – Ponto de equilíbrio.

3.4. Maximização do Lucro

As empresas incorrem em todos os tipos de custos na expectativa de que a produção resultante de todos os recursos combinados gere uma receita total compensadora, capaz não apenas de cobrir os encargos, como ainda gerar um valor excedente, o lucro; afinal, o lucro é a meta por excelência da firma, e sua maximização é um dos mais significativos parâmetros da eficiência empresarial.

O ponto de equilíbrio, *break-even point,* refere-se a um nível de produção em que o lucro líquido operacional é nulo, ou seja, as receitas são iguais às despesas operacionais. Não há apenas um ponto de equilíbrio. Por exemplo, na indústria de petróleo pode ser a condição de esgotamento do campo, quando se encontra na *pressão de abandono*, em que as receitas são iguais às despesas operacionais. No entanto, as empresas, de um modo geral, procuram um nível de produção que torne máximo a diferença entre a receita total e o custo total. Ou seja, um ponto onde o lucro operacional, definido conforme expressão

$$\mathrm{L} = \mathrm{RT} - \mathrm{CT} \tag{3.13}$$

seja máximo. A receita total de uma empresa pode ser definida pelo produto do preço unitário de venda p e o número de unidades vendidas Q, logo

$$\mathrm{RT} = p \times \mathrm{Q} \tag{3.14}$$

De forma similar ao custo marginal, a receita marginal é definida como a receita obtida na venda de mais uma unidade. Em termos matemáticos, a receita marginal é a derivada da função RT em relação à quantidade produzida, ou seja:

$$\mathrm{RM_Q} = \frac{d(\mathrm{RT})}{d\mathrm{Q}} \tag{3.15}$$

ou, em termos discretos, assume a seguinte forma:

$$\mathrm{RM(Q)} = \frac{\mathrm{RT(Q} + \Delta\mathrm{Q)} - \mathrm{RT(Q)}}{\Delta\mathrm{Q}} \tag{3.16}$$

A margem de contribuição unitária m corresponde à variação do lucro de uma unidade produzida. Em outras palavras, é a diferença entre o preço médio de venda de uma unidade p e o custo variável total por unidade v, ou seja $m = p - v$, ou ainda m = (RT - CVT)/Q. Isso corresponde à contribuição que cada unidade produzida traz para a formação do resultado da empresa. A margem de contribuição total M é, portanto, definida como $m \times$ Q. Assim, o lucro operacional pode ser reescrito como

$$(\mathrm{RT} - \mathrm{CVT}) = m \times \mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{L} = \mathrm{M} - \mathrm{CFT} \tag{3.17}$$

ou

$$\mathrm{L} = m \times \mathrm{Q} - \mathrm{CFT} = (p - v)\mathrm{Q} - \mathrm{CFT} \tag{3.18}$$

Pode-se observar que o lucro operacional é formado por duas parcelas, uma positiva M e outra negativa CFT. Se CFT > M, o resultado será um lucro negativo (prejuízo). Se CFT < M, o resultado é um lucro positivo. Quando essas duas parcelas forem iguais o lucro é nulo. Nesse caso, se diz que a empresa está operando no ponto de equilíbrio. Na hipótese de um comportamento linear para os custos fixos totais e receitas (v e p constantes), o volume mínimo de venda para que não ocorra prejuízo é

$$\mathrm{Q}_{min} = \frac{\mathrm{CFT}}{p - v} = \frac{\mathrm{CFT}}{m} \tag{3.19}$$

A Tabela 3.1 a seguir traz um exemplo que ajuda a entender melhor os conceitos expostos.

Tabela 3.1 – Exemplo hipotético de receita, custo e lucro de uma empresa

Q	Receitas			Custos totais			Custos unitários				L
	RT	RU, *m*	RM, *m*	CFT	CVT	CT	CFU	CVU, *v*	CMU	CM	
1	32	32	32	40	5	45	40	5	45	45	– 13
2	60	30	28	40	9	49	20	4,5	24,5	4	11
3	84	28	24	40	12	52	13,3	4	17,3	3	32
4	104	26	20	40	15	55	10	3,8	13,8	3	49
5	120	24	16	40	18	58	8	3,6	11,6	3	62
6	132	22	12	40	22	62	6,7	3,7	10,3	4	70
7	140	20	8	40	30	70	5,7	4,3	10	8	70
8	144	18	4	40	42	82	5,	5,3	10,3	12	62
9	144	16	0	40	58	98	4,4	6,4	10,9	16	46
10	140	14	– 4	40	78	118	4	7,8	11,8	20	22
11	132	12	– 8	40	102	142	3,6	9,3	12,9	24	– 10

O primeiro grupo de colunas mostra as entradas: a receita total, o preço de venda de cada unidade produzida (receita unitária) e a receita marginal. O segundo grupo é de custos (fixo, variável e custo total). O terceiro grupo contém os custos unitários, incluindo o custo marginal. Por último o lucro L para cada nível de venda Q.

Pode-se observar que o preço decresce linearmente em função das quantidades vendidas. Como a receita é o produto do preço vezes a quantidade, resulta então uma função quadrática (concavidade voltada para baixo). Por exemplo, para um nível de produção e venda de três unidades, identificam-se os seguintes valores:

Tabela 3.2 – Dados extraídos da Tabela 3.1

Itens	Valores
Preço de venda de cada unidade	p = \$28
Custo variável unitário	v = \$4
Custo fixo total	CFT = \$40
Margem de contribuição unitária (p - v)	m = \$24
Margem de contribuição operacional (p - v)Q	M = \$72
Lucro operacional (M - CFT)	L = \$32

A margem de contribuição unitária *m* é a contribuição que cada unidade traz para a formação do resultado. Assim, a margem de contribuição total M tem as seguintes funções:

- Antes do ponto de equilíbrio M < CFT, M cobre parcialmente os custos fixos. A empresa acumula prejuízo durante esse tempo.
- No ponto de equilíbrio M = CFT, M cobre exatamente os custos fixos.
- Depois do ponto de equilíbrio M > CFT, M não só cobre os custos fixos como também forma o lucro.

Pode-se observar na Tabela 3.1 que, em um nível de produção de uma unidade, ocorre um prejuízo de \$13. Entre os valores de produção de uma e duas unidades está o ponto de equilíbrio. Em um nível de oito unidades, ocorre um lucro operacional de \$62, e assim por diante.

Normalmente o custo total cresce à medida que a empresa se aproxima da sua capacidade plena. Isso pode resultar uma queda da eficiência de mão de obra e das máquinas. Uma análise do gráfico esquerdo da Figura 3.9 a seguir mostra que as funções não são lineares, tanto da receita total como também do custo total. Assim sendo, o lucro máximo pode ocorrer em um nível de vendas abaixo da produção máxima possível, o que permite concluir que o lucro máximo não necessariamente deve coincidir com a venda máxima.

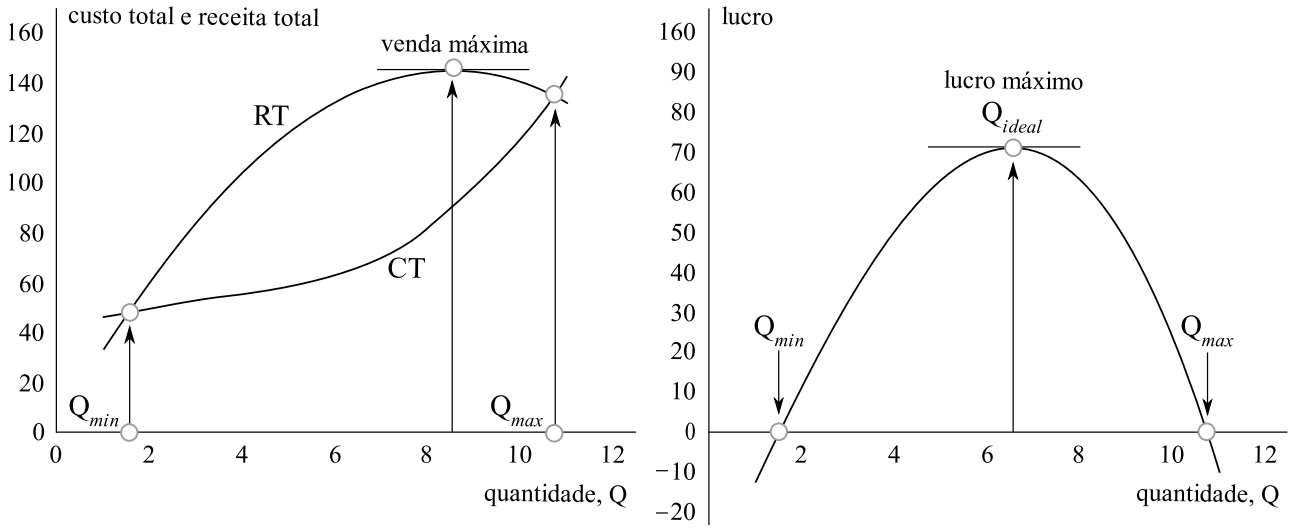


Figura 3.9 – Lucro máximo como função das curvas de receita total e custo total.

O nível de produção que resulta o maior lucro operacional é aquele observado pela máxima distância entre os custos totais e a receita total. Acima do ponto de equilíbrio, a empresa passa a obter lucros em escala crescente, todavia, devido à lei dos rendimentos decrescente, há um ponto a partir do qual os aumentos na receita reduzem o nível do lucro. Há um limite a partir do qual os custos passam a progredir mais rapidamente que as receitas. O lucro começa então a declinar e a empresa pode voltar a ter prejuízo. Ao longo desse percurso existe um ponto em que o lucro é máximo. Conforme se observa na Tabela 3.1, esse ponto de lucro máximo está situado em uma produção próxima de sete unidades, correspondente a um lucro máximo de $70. Essa é a situação de produção ideal.

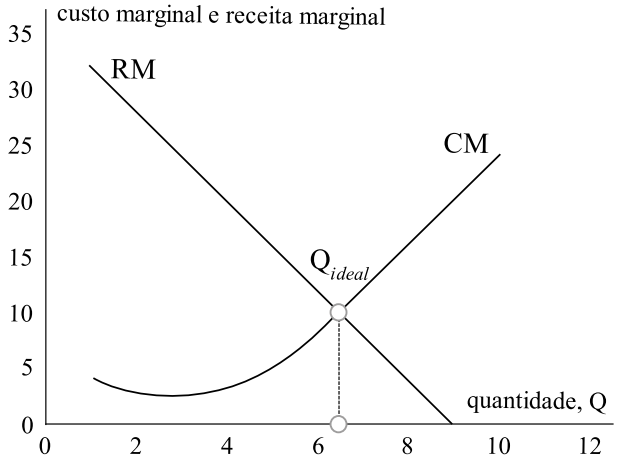


Figura 3.10 – Ponto de maximização do lucro.

O custo marginal é o custo para produzir uma unidade adicional, conforme já definido. Da mesma forma, a receita marginal é a receita da venda de uma unidade adicional. Logo se deduz que a maximização do lucro se dá em um ponto em que a receita marginal se torna igual ao custo marginal (ver Figura 3.10).

Enquanto o custo marginal for inferior à receita marginal, é interessante produzir mais uma unidade. Esse ganho atinge seu ponto máximo quando as duas curvas se cortam, isto é, quando CM = RM. A partir daí não é mais vantajoso aumentar a produção, uma vez que o custo para produzir mais uma unidade é superior à receita obtida com a venda dessa mesma unidade, reduzindo o lucro.

Outro ponto notável é representado por Q_{max}. A partir desse ponto, conhecido como ponto de saturação, a empresa entra novamente na região de prejuízo. Nos dados da Tabela 3.1, o Q_{max} ocorre quando a produção está próxima de atingir 11 unidades, conduzindo a empresa a um resultado negativo, ou prejuízo de $10. O gráfico direito da função lucro na Figura 3.9 apresenta os três pontos notáveis: dois pontos em que o lucro é igual a zero, ou seja, o ponto de equilíbrio Q_{min} e o ponto de saturação Q_{max}, e o ponto onde o lucro é máximo.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3.2 – Os dados da Tabela 3.3 a seguir referem-se aos valores de uma pequena unidade hipotética de destilação de diesel automotivo.

Tabela 3.3 – Dados – Exemplo 3.2

Itens	Valores
Preço de venda de um barril de diesel	p = 250 - Q
Custo variável por barril	v = $50
Custo fixo total	CFT = $6.400

Determine:

- A equação do lucro operacional.
- Os três pontos notáveis da função lucro: ponto de equilíbrio, ponto de saturação e nível ideal de produção.
- Qual o lucro máximo?

Solução

Assumindo os dados da Tabela 3.3 na Eq. (3.18), tem-se a equação para o lucro operacional:

$$\mathrm{L} = m\mathrm{Q} - \mathrm{CFT} = (p - v)\mathrm{Q} - \mathrm{CFT} = (250 - \mathrm{Q} - 50)Q - 6.400 \tag{3.20}$$

ou

$$\mathrm{L} = 200\mathrm{Q} - \mathrm{Q}^2 - 6.400 \tag{3.21}$$

O ponto de equilíbrio e o ponto de saturação são as quantidades Q_{min} e Q_{max} para os quais o lucro é zero, ou seja, é a solução da seguinte equação quadrática:

$$200\mathrm{Q} - \mathrm{Q}^2 - 6.400 = 0 \tag{3.22}$$

onde

$$\mathrm{X} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \times (-1)(-6400)}}{-2 \times 1} = \frac{-200 \pm 120}{-2} \tag{3.23}$$

Resolvendo, resultam duas raízes positivas, $X_1 = 40$ e $X_2 = 160$. Logo, $Q_{min} = 40$ barris de diesel e $Q_{max} = 160$ barris. Já o nível ideal de produção é o valor máximo da parábola indicada pela Eq. (3.22), ou seja:

$$Q_{ideal} = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-2} = 100 \tag{3.24}$$

O lucro máximo, portanto, é

$$L = 200 \times 100 - (100)^2 - 6.400 = \$3.600 \tag{3.25}$$

A Figura 3.11 a seguir mostra a solução gráfica.

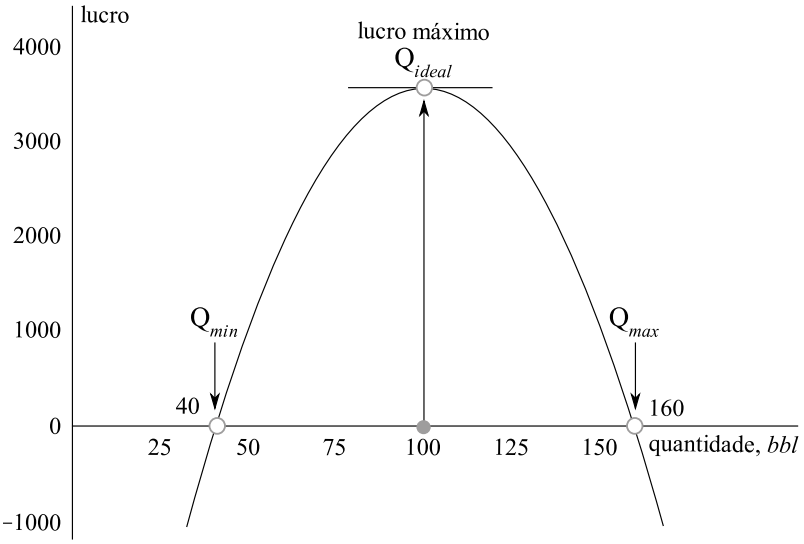


Figura 3.11 – Curva da função lucro – Exemplo 3.2.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3.3 – A ANP tem buscado atrair empresas de pequeno porte para assumir atividades de E&P de campos de petróleo e gás considerados marginais pelas grandes operadoras que atuam no Brasil. Supondo que esteja sendo oferecido um campo com as características apresentadas na Tabela 3.4 a seguir, pede-se avaliar sua viabilidade econômica.

Tabela 3.4 – Dados de exploração e produção do campo – Exemplo 3.3

Itens	Valores
Taxa de declínio, *a*	7% ao ano
Vazão atual de óleo	6.600 bbl/dia
Gás associado	Aproveitamento não econômico
Preço de venda de 1 bbl de óleo, *p*	$80/bbl
Custos operacionais de produção (OPEX)	
Custo fixo, CFT	$60 MM/ano
Custo variável unitário, *v*	$20/bbl
Taxa mínima de atratividade	10% ao ano

O campo é produtor de óleo e encontra-se na fase de declínio de produção do tipo exponencial, conforme a Eq. (3.26) a seguir:

$$q = q_0 e^{-at} \tag{3.26}$$

onde q é a vazão de produção anual em bbl para o tempo t, q_0 é a vazão atual de óleo e a é a taxa de declínio anual.

Solução

De acordo com a Eq. (3.19), o volume mínimo de venda anual para que o campo seja viável economicamente é:

$$\mathrm{Q}_{min} = \frac{\mathrm{CFT}}{p - v} = \frac{60 \times 10^6}{80 - 20} = 10^6 \ bbl \tag{3.27}$$

ou q_{min} = 2.740 bbl/dia. O tempo de abandono, ou *break-even point*, pode ser obtido com a Eq. (3.26). Assim, tem-se que:

$$\frac{2.740}{6.600} = e^{-at_{abd}} \tag{3.28}$$

ou

$$\ln\left(\frac{10^6/365}{6.600}\right) = \ln e^{-at_{abd}} = -at_{abd} \tag{3.29}$$

Logo, o tempo de abandono do campo é:

$$t_{abd} = -\frac{1}{0{,}07}\ln\left(\frac{10^6/365}{6.600}\right) = 12{,}56 \ anos \tag{3.30}$$

O VPL do campo pode ser obtido com a Eq. (3.17), desde que as receitas e os custos sejam em valores presentes acumulados, resultando:

$$\mathrm{VPL} = \mathrm{L}_{acum\ atual} = \mathrm{RT}_{acum\ atual} - \mathrm{CT}_{acum\ atual} \tag{3.31}$$

A receita total atualizada pode ser obtida por meio de um artifício comumente utilizado em projetos de produção. Esse artifício consiste, inicialmente, em atualizar a produção anual utilizando-se de uma taxa instantânea equivalente à taxa mínima de atratividade (ver **Anexo 1**). Procedendo assim, a produção anual atualizada seria:

$$\mathrm{Q}_{atual} = \frac{q_0 e^{-at}}{e^{i_i t}} = q_0 e^{-(a+i_i)t} \tag{3.32}$$

Observe que a Eq. (3.32) é oriunda da expressão a seguir:

$$\mathrm{VP} = \mathrm{VF}e^{-ni_i} \tag{3.33}$$

Com esse artifício, tem-se a seguinte expressão para a produção acumulada atual:

$$\mathrm{Q}_{acum\ atual} = \int_0^{t_{abd}} q_0 e^{-(a+i_i)t}\, dt \tag{3.34}$$

ou

$$\mathrm{Q}_{acum\ atual} = q_0 \frac{e^{-(a+i_i)t}}{-(a+i_i)}\Bigg|_0^{t_{abd}} \tag{3.35}$$

cujo resultado é:

$$\mathrm{Q}_{acum\ atual} = \frac{q_0}{(a + i_i)}\left[1 - e^{-(a+i_i)t_{abd}}\right] \tag{3.36}$$

Do **Anexo 1**, sabe-se que:

$$i_i = \ln(1 + i_n) \Leftrightarrow \ln(1 + 0{,}1) = 0{,}095 \tag{3.37}$$

Logo, substituindo os valores na Eq. (3.36), resulta

$$\mathrm{Q}_{acum\ atual} = \frac{6.600 \times 365}{(0{,}07 + 0{,}095)}\left[1 - e^{-(0{,}07+0{,}095)12{,}56}\right] = 12{,}48 \times 10^6\ bbl \tag{3.38}$$

A receita acumulada atualizada pode ser obtida com a Eq. (3.14), assim

$$\mathrm{RT}_{acum\ atual} = p \times \mathrm{Q}_{acum\ atual} = 12{,}48 \times 10^6 \times (80) = \$1{,}020\ \text{bi} \tag{3.39}$$

Para atualizar um custo fixo de \$60 milhões por ano durante 12,56 anos é utilizada a equação do valor presente de um fluxo de caixa tipo série uniforme (ver **Anexo 1**), ou seja:

$$\mathrm{CFT}_{atual\ acum} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} = 60 \times 10^6\frac{(1 + 0{,}1)^{12{,}56} - 1}{0{,}1(1 + 0{,}1)^{12{,}56}} = \$418{,}8\ \text{MM} \tag{3.40}$$

Já o custo variável atualizado é

$$\mathrm{CV}_{acum\ atual} = \mathrm{Q}_{acum\ atual}(20) = \$254{,}9\ \text{MM} \tag{3.41}$$

Logo, o custo total acumulado e atualizado resulta

$$\mathrm{CT}_{acum\ atual} = \mathrm{CFT}_{acum\ atual} + \mathrm{CV}_{acum\ atual} = 418{,}8 + 254{,}9 = \$674\ \text{MM} \tag{3.42}$$

Com os valores de CT e RT acumulados e atualizados, pode-se obter o VPL do campo, portanto:

$$\mathrm{VPL} = \mathrm{RT}_{acum\ atual} - \mathrm{CT}_{acum\ atual} = 1{,}020 - 0{,}674 = \$346\ \text{MM} \tag{3.43}$$

.....

3.5. Alavancagem Operacional

A alavancagem operacional resulta do fato de que os custos fixos podem ser distribuídos para um volume maior de produção, fazendo com que o custo médio unitário seja reduzido. Em outras palavras, a alavancagem operacional é definida como a capacidade de se aumentar os custos fixos (estrutura geral de produção) visando aumentar as vendas e, por consequência, o lucro operacional. Pode-se ilustrar melhor a alavancagem operacional com os dados de um exemplo hipotético de receitas, custos e nível de venda de um determinado produto (ver Tabela 3.5).

Tabela 3.5 – Exemplo hipotético de alavancagem

Itens	Valores
Preço de venda de cada unidade	p = \$10
Custo variável unitário	v = \$5
Nível de venda	Q = 100 unidades
Margem de contribuição unitária	m = \$5
Margem de contribuição operacional	M = \$500
Custos fixos totais	CFT = \$250
Lucro operacional	L = \$250

Admita um crescimento de 50% no nível de vendas, ou seja, de 100 para 150 unidades. Assim, de acordo com a Eq. (3.18), resulta

$$\mathrm{L} = m \times \mathrm{Q} - \mathrm{CFT} = 5 \times 150 - 250 = \$500{,}00 \tag{3.44}$$

implicando um acréscimo de 100% no lucro operacional ($250 para $500). Observe também que uma queda de 50% nas vendas (100 para 50 unidades) resulta

$$\mathrm{L} = m \times \mathrm{Q} - \mathrm{CFT} = 5 \times 50 - 250 = \$0{,}00 \tag{3.45}$$

ou seja, em uma redução também de 100% no lucro operacional ($250 para zero). As duas situações mostram como a alavancagem operacional funciona em ambas as direções. Um aumento nas vendas corresponde a um aumento proporcional maior no lucro operacional, bem como a uma queda nas vendas ocasiona também uma queda proporcional maior no lucro operacional. Daí a necessidade de se estabelecer em que grau de alavancagem se encontra um empreendimento como função dos seus custos fixos, ou que grau de alavancagem é desejável assumir com os aumentos dos custos fixos.

O grau de alavancagem operacional é a razão entre a variação percentual do lucro operacional e a variação percentual das vendas, ou seja

$$\mathrm{GAO} = \frac{\Delta\%\mathrm{lucro}}{\Delta\%\mathrm{vendas}} \tag{3.46}$$

Para os dados do exemplo

$$\mathrm{GAO} = \frac{100\%}{50\%} = 2 \tag{3.47}$$

Outra fórmula para a medida do grau de alavancagem operacional é dada pela expressão a seguir:

$$\mathrm{GAO} = \frac{(p-v)\mathrm{Q}}{(p-v)\mathrm{Q} - \mathrm{CFT}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M} - \mathrm{CFT}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} \tag{3.48}$$

a qual aplicada ao exemplo em questão resulta

$$\mathrm{GAO} = \frac{(10-5)100}{(10-5)100 - 250} = \frac{500}{250} = 2 \tag{3.49}$$

Admita agora que a empresa possa substituir parte dos seus custos variáveis por custos fixos. Por exemplo, suponha uma redução de v = $5 para v = $4. Note que o CFT para o mesmo nível de lucro é determinado pela Eq. (3.50) a seguir:

$$250 = (p-v)\mathrm{Q} - \mathrm{CFT} \tag{3.50}$$

de onde se conclui que

$$\mathrm{CFT} = (10-4) \times 100 - 250 = \$350{,}00 \tag{3.51}$$

ou seja, o custo fixo total se eleva de $250 para $350 e o grau de alavancagem resulta em

$$\mathrm{GAO} = \frac{(10-4)100}{(10-4)100 - 350} = \frac{600}{250} = 2{,}4 \tag{3.52}$$

implicando um aumento de 20% no grau de alavancagem. Verifica-se também, com esse exemplo, que quanto maior for o custo fixo em relação ao custo variável, tanto maior é o grau de alavancagem operacional.

De maneira geral, o risco do negócio está relacionado à incapacidade de cobrir os custos fixos. À medida que os custos fixos aumentam, maior será o volume de vendas necessário para se atingir o ponto de equilíbrio, e quanto maior for o ponto de equilíbrio, maior será o risco do negócio. Em outras palavras, a empresa se sub-

mete aos riscos maiores em troca da alavancagem. O administrador financeiro é, portanto, o responsável por tomar decisões consistentes com a manutenção de um nível desejado de alavancagem operacional, equilibrando o grau de risco com o de crescimento.

3.6. Teoria da Firma – Preço e Produção

Um dos pilares da teoria da firma pressupõe que o objetivo fundamental da empresa é obter o maior lucro possível. Se fosse possível precificar os produtos ou serviços no mais alto nível de preços, a empresa faria sem questionar. No entanto, a curva de demanda limita essa possibilidade. Surge então uma questão importante: qual produção ótima é esperada pela empresa?

A Figura 3.12 a seguir ajuda a responder essa questão. Ela indica os valores ótimos de preço e quantidade a serem praticados pela empresa que maximizam os lucros. Conforme se vê, a quantidade de produção ótima se dá na interseção entre a função custo marginal e a receita marginal. Ora, se a empresa dispõe de uma curva de demanda D do produto em questão, é possível determinar então o preço e produção ótima com base na interseção entre as curvas de custo marginal e receita marginal, CM e RM, respectivamente.

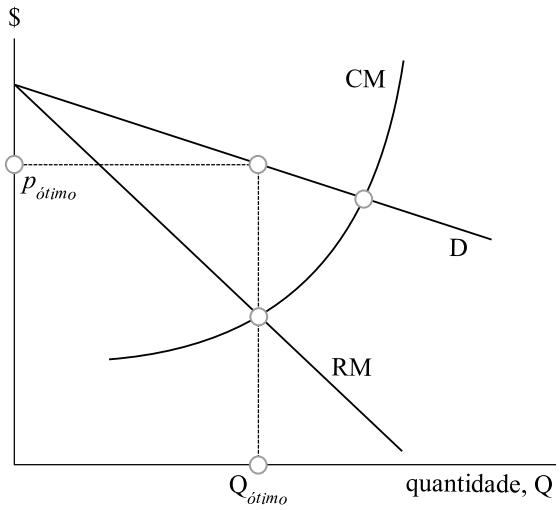


Figura 3.12 – Quantidade ótima e preço ótimo – maximização do lucro

A partir da Figura 3.12 é possível estabelecer critérios para maximização do lucro, ou seja:

- Se RM > CM, a empresa pode aumentar seus lucros aumentando o volume de venda com a redução do preço. A receita marginal tende a cair até o ponto de equilíbrio.
- Se RM < CM, a empresa pode aumentar seus lucros diminuindo o volume de venda com aumento do preço. A receita marginal tende a subir até o ponto de equilíbrio.
- Se RM = CM, os níveis de produção e preço já estão em seus valores ótimos de preço e produção.

Observe que aumentar o lucro com mudanças no volume de venda e preço dependerá da elasticidade-preço da demanda, cuja equação é

$$\eta = -\frac{\Delta Q/Q}{\Delta p/p} \tag{3.53}$$

Assim, uma alternativa para a equação que determina o nível ideal de produção, ou seja, quando RM = CM, é expressar a receita marginal em termos de elasticidade-preço da demanda. Tomando como base as Eqs. (3.16) e (3.53), pode-se chegar à seguinte relação:

$$\text{RM} = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = \text{CM} \tag{3.54}$$

Supondo que o custo variável total da empresa seja uma função linear do nível de produção, o custo marginal será igual ao custo variável unitário, isto é, CM = *v*. A margem de contribuição percentual sobre as unidades adicionais vendidas $m_{\%}$ é a razão entre o lucro por unidade e a receita por unidade, ou seja:

$$m_{\%} = \frac{(p - v)}{p} = \frac{(p - \text{CM})}{p} \tag{3.55}$$

A partir das Eqs. (3.54) e (3.55), pode-se chegar às seguintes relações:

$$\text{RM} - \text{CM} > 0 \quad \text{quando} \quad \eta > \frac{1}{m_{\%}} \tag{3.56}$$

$$\text{RM} - \text{CM} < 0 \quad \text{quando} \quad \eta < \frac{1}{m_{\%}} \tag{3.57}$$

Isso implica duas estratégias relacionadas ao preço de venda:

- A empresa deve diminuir o preço sempre que a elasticidade-preço da demanda for maior que o inverso da margem de contribuição percentual sobre as unidades adicionais que a empresa venderia em função do aumento da demanda.
- A empresa deve aumentar o preço sempre que a elasticidade-preço da demanda for menor que o inverso da margem de contribuição percentual sobre as unidades adicionais que a empresa deixaria de vender em função da queda na demanda.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3.4 – Suponha que um posto de combustíveis cobre, por um litro de óleo de motor, $8. Admita também que o ganho em relação aos custos variáveis seja de $4 (margem de contribuição unitária). Visando aumentar os lucros, o dono do posto deve aumentar ou diminuir o preço do óleo sabendo que a elasticidade-preço da demanda é de 2,5?

Solução

A margem de contribuição percentual, neste caso, conforme Eq. (3.55), é

$$m_{\%} = \frac{(p - v)}{p} = \frac{8 - 4}{4} = 0{,}5 \tag{3.58}$$

Assim, tem-se que

$$\frac{1}{m_{\%}} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \Leftrightarrow \eta > \frac{1}{m_{\%}} \tag{3.59}$$

De acordo com a Eq. (3.56), a receita marginal é maior que o custo marginal, isso implica que o dono do posto tem margem para reduzir o preço do óleo e obter maiores lucros com a venda.

▪▪▪▪▪▪

3.7. Economia de Escala e de Escopo

A *economia de escala* é verificada quando há redução no custo médio unitário durante a fase de aumento de produção da empresa (ver Figura 3.13).

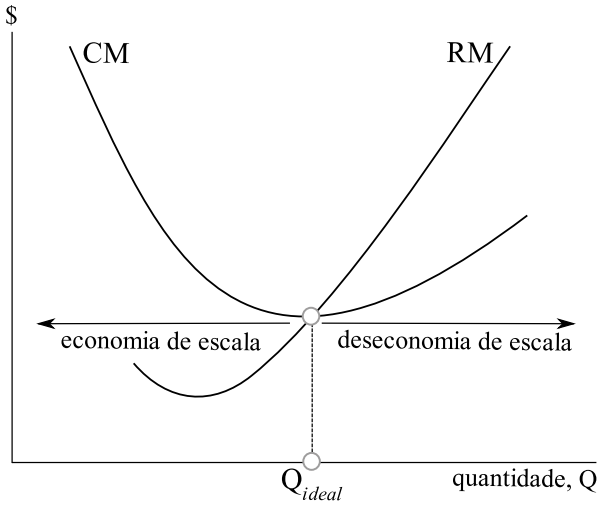


Figura 3.13 – Economia e deseconomia de escala.

Quando o custo médio é ascendente, diz-se que o aumento da produção entra em uma fase de *deseconomia de escala*. A economia de escala é uma das principais motivações de fusões entre grandes empresas que compartilham o mesmo mercado. A essência da economia de escala está nos seguintes fatores:

- Estoque.
- Indivisibilidade e diluição dos custos fixos.
- Aumento da produtividade dos insumos variáveis (especializações).

Já a *economia de escopo* ocorre somente nos casos em que a empresa consegue economizar à medida que aumenta a variedade de bens e serviços. Enquanto a economia de escala está relacionada ao custo médio unitário, a economia de escopo está relacionada ao custo total relativo de uma variedade de bens produzidos por uma empresa *versus* produzidos por uma, duas ou mais empresas. Ou seja, um processo de produção apresenta economia de escopo quando se verifica a seguinte estrutura de custos totais de produção:

$$\mathrm{CT}_{empresa}(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_n) < \mathrm{CT}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Q}_1, 0) + \mathrm{CT}_{\mathrm{B}}(\mathrm{Q}_2, 0) + \ldots + \mathrm{CT}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{Q}_n, 0) \tag{3.60}$$

onde CT representa o custo total e Q as quantidades de uma variedade de bens produzidos (A, B, ..., Z empresas).

A economia de escopo está quase sempre associada à economia de escala. Quando uma empresa investe no desenvolvimento tecnológico de um determinado produto, por exemplo, na produção de polímeros para o setor de alimentos, parte desse conhecimento pode ser aproveitado para produzir polímeros com aplicação na indústria de petróleo. Muito provavelmente, a economia, nesse caso, só se sobrepõe em relação à economia verificada em uma empresa especializada para produtos químicos voltados à indústria de petróleo se acompanhada do ganho devido à economia de escala.

3.8. Isoquanta e Isocusto – Minimização de Custo

A exemplo do que foi feito na maximização do lucro, pode-se fazer quanto à minimização dos custos. Aqui será analisada uma função custo de dois fatores: capital e trabalho. Tal função de custo poderia, por exemplo, assumir a seguinte forma:

$$\mathrm{C} = k\mathrm{K} + l\mathrm{L} \tag{3.61}$$

onde *k* e *l* são os preços do capital e do trabalho, e K e L são as quantidades de capital e trabalho, respectivamente. A Figura 3.14 a seguir indica algumas isoquantas e isocustos hipotéticas para um processo cuja função de produção seja representada pelos insumos capital e trabalho.

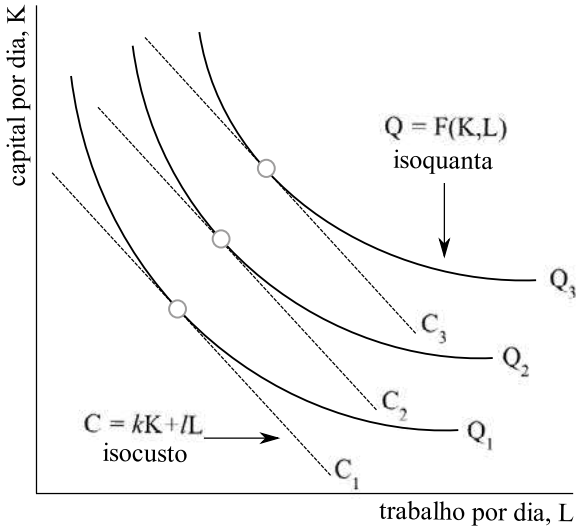


Figura 3.14 – Isoquanta e isocusto – produção com dois insumos (capital e trabalho).

Uma curva de *isoquanta* representa todas as possíveis combinações de fatores de produção (ou insumos) que resultam no mesmo volume de produção. De modo semelhante, uma curva de *isocusto* é aquela que representa todas as possíveis combinações dos custos que resultam o mesmo custo total. Note que, nesse caso, as isocustos são representadas por retas. Desse modo, partindo do custo indicado na Eq. (3.61), a quantidade de trabalho K pode ser expressa como K = (C/*k*) - (*l*/*k*)L. Já a inclinação da reta isocusto é a derivada da função K em relação à L, ou seja:

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{L}} = -\frac{l}{k} \tag{3.62}$$

Observe que a Eq. (3.62) é a própria *taxa marginal de substituição* (TMS) de capital por trabalho, a menos do sinal negativo (por convenção, essa taxa é sempre apresentada em valores positivos). Logo, se a isocusto é uma linha reta, a TMS será

$$\mathrm{TMS} = -\frac{\Delta \mathrm{K}}{\Delta \mathrm{L}} \tag{3.63}$$

Olhando para uma isoquanta da Figura 3.14 e tomando como base o conceito da derivada, o acréscimo de produção resultante do aumento do insumo trabalho é igual ao produto marginal do trabalho (PM_L) multiplicado pelo número de trabalho adicional. De forma análoga, o decréscimo de produção resultante de uma redução do insumo capital é igual ao produto marginal do capital (PM_K) multiplicado pelo número de unidades de capital reduzido. Nesse caso, uma vez que se trata de uma curva de isoquanta, o acréscimo de produção devido ao aumento de trabalho é igual ao decréscimo de produção decorrente da redução de capital, ou seja, a variação da produção é nula. Em termos matemáticos, significa que:

$$\mathrm{PM_L}\Delta \mathrm{L} + \mathrm{PM_K}\Delta \mathrm{K} = 0 \tag{3.64}$$

ou

$$\frac{\mathrm{PM_L}}{\mathrm{PM_K}} = -\frac{\Delta \mathrm{K}}{\Delta \mathrm{L}} = \mathrm{TMS} \tag{3.65}$$

De acordo com a teoria da firma, a escolha dos fatores de produção é feita de tal modo que minimize o custo de produção, uma vez que seu pressuposto fundamental é a maximização do lucro. Por exemplo, considerando-se o capital e o trabalho os dois únicos fatores de produção, de acordo com a teoria da empresa a função F(K,L) deve ser aquela de maior produção possível a partir da combinação desses fatores. Assim, considerando que o custo de produção seja representado pela Eq. (3.61), o problema da minimização, conforme Pindyck e Rubinfeld (2002), é resolvido caso se encontre o valor mínimo dessa função, ou seja, uma combinação de capital e trabalho que resulte em um custo mínimo

$$\mathrm{C}_{min} = k\mathrm{K} + l\mathrm{L} \tag{3.66}$$

sujeito à condição de produção de um nível Q_0, ou seja:

$$\mathrm{F(K,L)} = \mathrm{Q}_0 \Leftrightarrow \mathrm{F(K,L)} - \mathrm{Q}_0 = 0 \tag{3.67}$$

A quantidade de capital K pode ser representada por algum parâmetro que traduza os bens de capitais, como por exemplo, horas de máquina, dias de aluguel de uma sonda etc. A quantidade de trabalho L pode ser representada pelo número de horas dos empregados, por exemplo.

Um problema de minimização (ou de maximização) com restrição pode ser resolvido por meio do método do *multiplicador de Lagrange*. O primeiro passo é descrever o *lagrangiano*, que nada mais é do que a soma de dois termos: a função a ser minimizada (ou maximizada) e uma variável λ multiplicada pela restrição. A restrição deve ser apresentada de tal modo que a soma dos seus termos seja igual a zero, ver (3.67). Assim, para o problema posto nas Eqs. (3.66) e (3.67), o lagrangiano é:

$$\Lambda = k\mathrm{K} + l\mathrm{L} - \lambda[\mathrm{F(K,L)} - \mathrm{Q}_0] \tag{3.68}$$

onde Λ representa o lagrangiano. O segundo passo é diferenciar o lagrangiano em relação às variáveis K, L e λ (derivadas parciais). Igualando essas diferenciações a zero, forma-se um sistema de equações cuja solução são os extremos mínimos (ou máximos) da função. Procedendo como indicado, portanto, o sistema de equações é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{K}} &\Leftrightarrow k - \lambda \mathrm{PM_K(K,L)} = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{L}} &\Leftrightarrow l - \lambda \mathrm{PM_L(K,L)} = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &\Leftrightarrow \mathrm{F(K,L)} - \mathrm{Q}_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.69}$$

onde

$$\mathrm{PM_K(K,L)} = \frac{\partial \mathrm{F(K,L)}}{\partial \mathrm{K}} \quad \text{e} \quad \mathrm{PM_L(K,L)} = \frac{\partial \mathrm{F(K,L)}}{\partial \mathrm{L}} \tag{3.70}$$

são os produtos marginais do capital e do trabalho, respectivamente. Os valores K, L e λ, quando determinados por algum método de solução de sistemas de equações, são a solução do problema de minimização (ou maximização). No caso em questão, pode-se dividir as duas primeiras expressões indicadas em (3.69) por *kl*, resultando a seguinte expressão:

$$\frac{\mathrm{PM_K(K,L)}}{k} = \frac{\mathrm{PM_L(K,L)}}{l} \tag{3.71}$$

que, consequentemente, representa também uma condição necessária que minimiza o custo. Ou seja, se o termo do lado esquerdo da Eq. (3.71) for maior que o termo do lado direito, indica que a empresa pode, mantendo a produção, aumentar o uso de capital e dinimuir o trabalho.

Dependendo da função de produção F(K, L), pode-se deduzir, analiticamente, uma função de custo com base no sistema definido em (3.69). Um exemplo clássico é a função de produção de Cobb e Douglas (1928). Tal função tem a seguinte forma:

$$\mathrm{F(K,L)} = \mathrm{AK}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta} \Leftrightarrow \log \mathrm{F} = \log \mathrm{A} + \alpha \log \mathrm{K} + \beta \log \mathrm{L} \tag{3.72}$$

onde A é um fator de escala e α e β são ponderadores. Esses ponderadores carregam informações valiosas; note que a soma deles determina a tendência do rendimento em relação à variação dos fatores de produção, ou seja, se

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = 1, \ \text{rendimento constante de escala} \\ &\alpha + \beta > 1, \ \text{rendimento crescente de escala} \\ &\alpha + \beta < 1, \ \text{rendimento decrescente de escala} \end{aligned} \tag{3.73}$$

Em outras palavras, se $\alpha + \beta = 1$ significa que, duplicando capital e o trabalho, duplica-se a produção. Já os produtos marginais do capital e do trabalho resultam nas seguintes relações:

$$\mathrm{PM_K(K,L)} = \frac{\partial \mathrm{F(K,L)}}{\mathrm{K}} = \alpha \mathrm{AK}^{\alpha-1}\mathrm{L}^{\beta} \quad \text{e} \quad \mathrm{PM_L(K,L)} = \frac{\partial \mathrm{F(K,L)}}{\mathrm{L}} = \beta \mathrm{AK}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta-1} \tag{3.74}$$

Observe que, se $\alpha < 1$ implica que a empresa tem produto marginal decrescente para o capital. Ou seja, quanto maior , menor o produto marginal do capital. O mesmo raciocínio se aplica ao fator trabalho, se $\beta < 1$ implica que há produto marginal decrescente para o trabalho.

Seguindo o raciocínio exposto, deve-se primeiro escrever o lagrangiano. Isso é feito substituindo a função F(K, L) obtida na Eq. (3.74) na Eq. (3.68), resultando

$$\Lambda = k\mathrm{K} + l\mathrm{L} - \lambda\left[\mathrm{AK}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta} - \mathrm{Q}_0\right] \tag{3.75}$$

Diferenciando a Eq. (3.75) em relação aos fatores de produção e igualando suas derivadas a zero, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{K}} \Leftrightarrow k - \lambda\left(\alpha \mathrm{AK}^{\alpha-1}\mathrm{L}^{\beta}\right) = 0 \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathrm{L}} \Leftrightarrow l - \lambda\left(\beta \mathrm{AK}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta-1}\right) = 0 \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} \Leftrightarrow \mathrm{AK}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta} - \mathrm{Q}_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Resolvendo esse sistema de equações chega-se aos valores da quantidade de trabalho e de capital capazes de minimizar o custo de produção Q_0:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \left(\frac{\mathrm{Q}_0}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{k\beta}{l\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\ \mathrm{K} &= \left(\frac{\mathrm{Q}_0}{\mathrm{A}}\right)^{1/(\alpha+\beta)} \left(\frac{l\alpha}{k\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{3.77}$$

De acordo com a Eq. (3.77), à medida que a remuneração *l* do trabalho aumenta, a empresa usará mais capital. Substituindo as Eqs. (3.77) na Eq. (3.66) obtém-se, após algumas operações algébricas, a seguinte equação para o custo mínimo:

$$C_{min} = k^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} l^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \left(\frac{Q_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{3.78}$$

Se o processo produtivo é de rendimentos constantes de escala ($\alpha + \beta = 1$), então a Eq. (3.78) fica reduzida a

$$C_{min} = k^{\alpha} l^{\beta} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha} \right] \left(\frac{Q_0}{A}\right) \tag{3.79}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3.5 – Considere que a produção de petróleo em bbl/dia do campo de Mero seja representada pela seguinte função de produção:

$$Q_{bbl/dia} = 25K^2L^{0,5} \tag{3.80}$$

onde K é a quantidade de capital e L é o trabalho. Considere também que o custo de capital empregado no projeto seja de \$250 mil por dia e o do trabalho de \$50 mil por dia. Com essas informações, calcule qual o custo mínimo para produzir um milhão de barris, qual o custo médio e deduza uma equação para a TMS de capital por trabalho.

Solução

Comparando a forma da Eq. (3.80) com a da Eq. (3.72), deduz-se que α é igual 2, β é igual a 0,5 e o fator de escala A é igual a 25. Utilizando esses valores na Eq. (3.78), resulta o custo mínimo para produzir 1 milhão de barris, ou seja:

$$C_{min} = 250.000^{\frac{2}{2,5}} \cdot 50.000^{\frac{0,5}{2,5}} \left[4^{\frac{0,5}{2,5}} + 4^{\frac{-2}{2,5}} \right] \left(\frac{1 \times 10^6}{25} \right)^{\frac{1}{2,5}} = \$20,7 \text{ MM} \tag{3.81}$$

Dividindo o custo pela produção, chega-se a um custo médio por barril de \$20,7/bbl. Para deduzir a função da TMS é necessário conhecer os produtos marginais do capital e do trabalho. Como a função de produção é $F(K, L) = 25K^2L^{0,5}$, derivando-a em relação ao capital e ao trabalho, chega-se aos seguintes resultados para as produções marginais:

$$PM_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 50KL^{0,5} \quad \text{e} \quad PM_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{12,5K^2}{L^{0,5}} \tag{3.82}$$

De onde se deduz a função para a TMS,

$$TMS = \frac{PM_L}{PM_K} = 0,25KL^{-1} \tag{3.83}$$

▪▪▪▪▪▪

3.9. Problemas Propostos

Problema 3.1 – Pretende-se explorar um pequeno campo de petróleo com reservas para produzir durante dez anos, conforme estimativa indicada na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Estimativa da produção – Problema 3.1

Ano	Milhões de bbl	Ano	Milhões de bbl
1	2,8	6	1,3
2	2,5	7	1,0
3	2,2	8	0,7
4	1,9	9	0,4
5	1,6	10	0,1

Outros dados do problema estão na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Dados – Problema 3.1

Dados	Valores
Custo de exploração, perfuração e completação de poços	$43 milhões
Custo de equipamentos e instalações	$20 milhões
Custo de produção	$20,00/bbl
Preço de venda de óleo	$30,00/bbl
Valor residual – equipamentos	$1,38 milhões

Analise a viabilidade econômica de exploração e produção do campo sabendo que a taxa mínima de atratividade é 15% ao ano. Utilize o método da taxa interna de retorno.

Resposta TIR = 30%

Problema 3.2 – Um equipamento novo custa $200 mil. Dispõe-se dos seus valores residuais em cada ano, bem como dos custos operacionais conforme a Tabela 3.8 a seguir. Determine a vida útil econômica, ou seja, a ocasião em que será conveniente substituir o equipamento por outro novo, considerando uma taxa de juros de 10% *a.a.*

Tabela 3.8 – Valores residuais do equipamento – Problema 3.2

Período	Valor residual (mil)	Custo anual (mil)
0	200	
1	130	200
2	95	230
3	73	250
4	60	260
5	50	270

Resposta RL_1 = $290 mil/ano, RL_2 = $284.285,71/ano, RL_3 = $283.444,11/ano, RL_4 = $282.766,65/ano, RL_5 = $283.296,26/ano. A vida útil econômica do equipamento é de quatro anos. Observe os resultados na Tabela 3.9 a seguir:

Tabela 3.9 – Resultados – Problema 3.2

Período	Inicial	Residual	Operacional	Total
0				
1	220.000,00	130.000,00	200.000,00	290.000,00
2	115.238,10	45.238,10	214.285,71	284.285,71
3	80.422,96	22.054,38	225.075,53	283.444,11
4	63.094,16	12.928,25	232.600,73	282.766,65
5	52.759,50	8.189,87	238.726,64	283.296,26

Problema 3.3 – Uma empresa contratada pela Petrobras causou o fechamento de poços de produção de petróleo devido a um acidente no transporte de equipamento operacional. Como consequência do acidente, houve interrupção da produção de petróleo durante quatro dias. São conhecidos os seguintes dados:

Tabela 3.10 – Dados – Problema 3.3

Itens	Valores
Produção média diária	6 m^3
Custo médio operacional de um barril de petróleo	$ 7,00
Valor médio de um barril de petróleo	$ 29,00
Duração da vida produtiva do campo de petróleo	10 anos

Determine o valor em $ que a contratada deverá indenizar a Petrobras devido à paralisação dos quatros dias.

Resposta $4.516.892,00

Problema 3.4 – Os dados relativos a um empreendimento para fabricação de certo produto são:

Tabela 3.11 – Dados – Problema 3.4

Itens	Valores
Investimento (equipamento)	I = $1000
Duração do empreendimento	n = 10 anos
Valor residual	$ 29,00
Taxa mínima de atratividade	TMA = 6% ao ano
Custo fixo total (por ano)	CFT = $200
Custo variável unitário	v = $40
Capacidade anual de produção	10 unidades

1) Considerando a depreciação linear dos equipamentos, determine:

   a) O preço de venda por unidade produzida que cubra apenas os custos operacionais por ano.

b) O preço de venda para o produto, que além de cobrir os custos operacionais, repõe a parcela anual do capital investido.

c) O preço de venda por unidade produzida, considerando agora, além dos componentes anteriores, a parcela correspondente à remuneração do capital (6% ao ano).

2) Considerando a depreciação capitalizada, determine o preço de venda de cada unidade produzida correspondente a uma remuneração do capital de 6% ao ano.

Resposta 1a) \$60,00; 1b) \$70,00; 1c) \$76,00; 2) \$73,60

Problema 3.5 – A Tabela 3.12 seguinte apresenta uma estatística dos custos de fabricação de um produto em dois níveis de produção.

Tabela 3.12 – Dados – Problema 3.5

Produção (unidades)	100	50
Matéria-prima	\$60	\$30
Mão de obra direta	\$20	\$10
Energia elétrica	\$40	\$30
Depreciação	\$50	\$50
Despesas operacionais	\$50	\$30
Custo total	\$220	\$150

1) Identifique cada componente do custo total por tipo de custo e a equação da reta que o representa.

2) Considerando que o preço de venda de cada unidade é p = \$3, determine:

a) A equação da reta representativa da função receita total.

b) O custo variável unitário v.

c) A margem de contribuição unitária m.

d) A margem de contribuição operacional M(Q = 100).

e) O lucro operacional no nível de produção Q = 100.

f) O ponto de equilíbrio Q_{min}.

g) O preço mínimo de venda para que não se tenha prejuízo (Q = 100).

h) O custo variável unitário máximo para que não se tenha prejuízo (Q = 100).

i) Quantas unidades devem ser vendidas para que o lucro operacional seja de \$32.

j) Qual o grau de alavancagem operacional em um nível de produção Q = 80 unidades.

Resposta 1) CT = 1,4Q + 80; 2a) RT = 3Q ; 2b) v = \$1,40 ; 2c) m = \$1,60 ; 2d) M = \$160 ; 2e) L = 80 ; 2f) Q_{min} = 50; 2g) p_{min} = \$2,20 ; 2h) v_{max} = \$2,20; 2i) Q_{32} = 70; 2j) GAO = 2,7.

4

AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE PROJETOS APLICADA

Sem uma procura consciente da beleza, arriscamo-nos a cair num mundo de prazeres que causam dependência e na banalização dos atos de dessacralização, um mundo em que já não se percebe bem por que vale a pena a vida humana.

Roger Scruton

Este capítulo descreve, em detalhes, uma sistemática para avaliar a economicidade de projetos reais de produção de petróleo. Os itens que se referem aos componentes do fluxo de caixa e aos indicadores de projetos estão baseados no trabalho do consultor Ozualdo Toyoda, que atuou durante muito tempo como analista de projetos na Petrobras. Entre os indicadores estão o custo unitário de produção (CUP), custo unitário de investimento (CUI), custo unitário de operação (CUO) e custo unitário de tributação (CUT).

Ao final do capítulo são apresentadas duas proposições para cálculo expedito do VPL: uma para projetos de desenvolvimento da produção e outra para maximização simultânea de esforços de exploração e desenvolvimento da produção. Trata-se de proposições genéricas, sem os detalhes de um projeto real. O objetivo é municiar o leitor com equações de VPL que possam auxiliá-lo na publicação de artigo ou dissertação de mestrado, nos quais terá a chance de explorar aspectos econômicos de projetos de E&P não contemplados nesta obra.

4.1. Premissas Gerais

Por se tratar de uma sistemática, é importante, já de início, ressaltar algumas premissas:

- O cenário econômico considerado é determinístico. Não obstante, isso não impede de fazer uso do valor esperado de quaisquer variáveis do projeto (preço, produção, custo, taxa de juros etc.).
- O fluxo de caixa do projeto, ainda que se possa detalhar tanto quanto se queira, é uma aproximação razoável de um projeto real.
- Os percentuais das participações governamentais e dos impostos federais incidentes no fluxo de caixa são os que vigoram no Brasil ao tempo da edição deste livro[36].

Na prática, o fluxo de caixa de um projeto é composto de vetores monetários pontuais, de forma que todas as receitas e despesas incorridas em um período *t* (ano, em geral) são concentradas em uma mesma data. Esses vetores podem ser inseridos no início, meio ou final do período, conforme indica a expressão a seguir:

$$\mathrm{VPL} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\overbrace{\mathrm{E}(\mathrm{FCL}_t)}^{\text{valor esperado do FCL}}}{\underbrace{(1+\mathrm{TMA})^{t-j}}_{j \Leftrightarrow \text{início (1), meio (0,5), fim (0)}}} \tag{4.1}$$

onde $\mathrm{E}(\mathrm{FCL}_t)$ é valor esperado do fluxo de caixa líquido no ano *t*, *n* é o período de produção e TMA é a taxa mínima de atratividade. O tempo, considerando que se trata de um sistema de produção contínuo, é definido como:

[36] Atualmente o Congresso Nacional vem reformulando o sistema tributário brasileiro. Basicamente, os cinco tributos atuais sobre o consumo – PIS, COFINS, IPI, ICMS e ISS – serão substituídos por dois tributos (CBS e IBS) e por um imposto seletivo (IS). O CBS unificará o PIS, COFINS e IPI (exceto na zona franca de Manaus) e o IBS unificará o ICMS e o ISS.

$$t = \frac{1}{365} \times \text{número de dias } \{\text{data do } \text{FCL}_t - \text{ data base}\} \tag{4.2}$$

Aqui, para efeito de simplificação, todo o investimento depreciável e não depreciável, I_D e I_{ND}, é alocado no tempo zero (início do ano 1), e ao final de cada ano incide o valor esperado do fluxo de caixa líquido, representado pelas receitas descontadas das despesas incorridas no referido ano. Assim, a Eq. (4.1) pode ser rescrita como:

$$\text{VPL} = -\overbrace{(\text{CAPEX}_{próprio} + \text{CAPEX}_{terceiro})}^{\text{CAPEX}_{prod}=I_D+I_{ND}} + \sum_{t=1}^{t_{abd}} \frac{\text{E}(\text{FCL}_t)}{(1+\text{TMA})^t} \tag{4.3}$$

onde CAPEX_{prod} é todo o investimento no desenvolvimento da produção, que pode ser financiado com recursos próprios ou de terceiros ou por ambas as fontes. Conforme visto no **Capítulo 2**, as empresas adotam algum nível de endividamento de longo prazo para financiamento de projetos com recurso oriundo de terceiros (*alavancagem financeira*), que em geral tem taxa de desconto inferior à taxa de atratividade do projeto. Nesse caso, pode-se optar para o cálculo do $\text{CAPEX}_{terceiro}$ a seguinte equação:

$$\text{CAPEX}_{terceiro} = \sum_{t=0}^{n_f} \frac{\text{CAPEX}_{t,terceiro}}{(1+i_f)^t} \tag{4.4}$$

onde n_f é o período de financiamento, $\text{CAPEX}_{t,terceiro}$ refere-se à parcela paga a cada ano conforme contrato e i_f é a taxa de financiamento acordada entre as partes.

Em geral, a alta administração irá se defrontar com duas questões essenciais: em quais oportunidades de negócio a companhia deve investir e como obter o capital necessário para implementar essas oportunidades. A primeira etapa, por se tratar de uma decisão de investimento, consiste em avaliar a rentabilidade intrínseca do projeto por meio do fluxo de caixa gerado. Se o empreendimento for rentável, a segunda etapa é uma decisão de financiamento, que consiste em escolher a melhor estratégia para financiar o projeto.

É claro que, dependendo da taxa de financiamento e da composição do capital a ser investido, o projeto pode ser viabilizado. Não obstante, como recomenda a prática financeira, só os bons projetos merecem o esforço de uma boa estratégia de financiamento. Em outras palavras, não é o financiamento que "salva" o projeto, e sim um bom projeto é que qualifica uma boa estratégia de financiamento.

4.2. Componentes do Fluxo de Caixa

O esquema genérico para construção do fluxo de caixa de um projeto de produção de petróleo está indicado na Figura 4.1. Esse esquema refere-se às entradas e saídas de valores incorridos com a execução do projeto, em que o termo FCL representa o fluxo de caixa líquido (observe os sinais de cada componente).

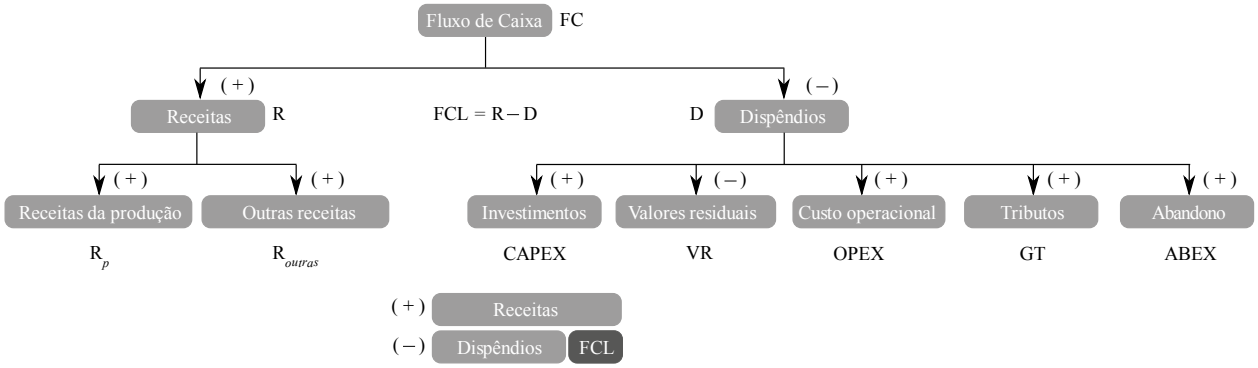


Figura 4.1 – Esquema de fluxo de caixa de projetos de produção de petróleo.

4.2.1. Receitas

A receita total R corresponde à soma das receitas de produção e outras receitas auferidas. As receitas da produção são os benefícios econômicos obtidos pela venda dos produtos primários e derivados, os quais estão indicados no esquema da Figura 4.2.

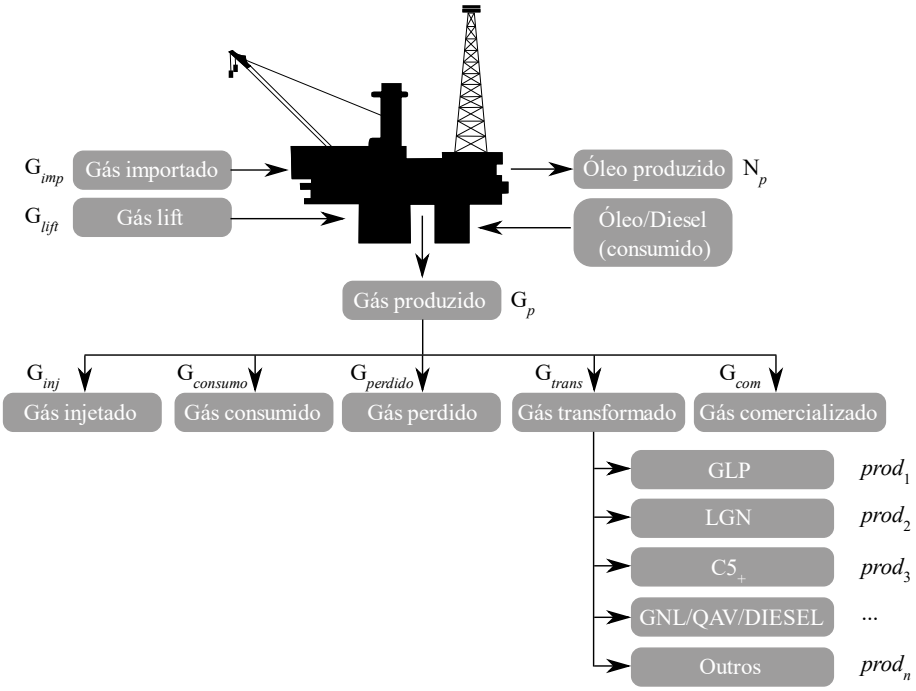


Figura 4.2 – Produtos e derivados de um projeto de produção de petróleo.

Os produtos primários referem-se ao óleo e gás produzidos diretamente no campo, e os produtos derivados referem-se à produção de GLP, LGN, $C5_+$, GNL, QAV, DIESEL e outros obtidos pela transformação de uma parcela do gás produzido e/ou importado. O processo físico-químico para obtenção de derivadas em uma unidade estacionária de produção (UEP) *offshore* é denominado de Fischer-Tropsch. Esse processo baseia-se na obtenção de hidrocarbonetos líquidos a partir de uma mistura de gases contendo monóxido de carbono e hidrogênio, com a ajuda de catalisadores de níquel ou cobalto, à pressão levemente elevada e temperatura em torno de 200 ºC.

Embora a tecnologia de produção de derivados a partir do gás seja conhecida, no Brasil ainda não se tem um sistema de produção de petróleo equipado para contemplar esse processo físico-químico. Caso a UEP contemple tal sistema, o gás comercializado seria o remanescente do gás produzido e importado debitado do injetado, consumido, perdido e transformado, ou seja:

$$G_{com} = G_p + G_{imp} - G_{inj} - G_{consumo} - G_{perdido} - G_{trans} \tag{4.5}$$

À parcela de gás comercializada anualmente soma-se a produção anual acumulada de óleo N_p. Assim, a receita da produção fica definida conforme expressão a seguir:

$$R = R_p + R_{outras} \qquad \text{onde} \qquad R_p = N_p p_{óleo} + G_{com} p_{gás}(PCGS/9400) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i p_i}^{G_{trans}} \tag{4.6}$$

onde d_i são os derivados obtidos com o processo Fischer-Tropsch, quando houver. O preço do gás tem como referência um gás com poder calorífico superior (PCGS) de 9400 kcal/m^3 a uma pressão absoluta de 1,033 kg/cm^2 e temperatura de 20 ^{o}C, e o preço do óleo tem como referência o petróleo tipo Brent.

As outras receitas são aquelas cujas origens não estão ligadas diretamente à produção. Note que é importante subtrair, da Eq. (4.6), o consumo de óleo produzido ou de óleo diesel quando essas parcelas forem significativas.

4.2.2. Dispêndios

Para os dispêndios, a equação é:

$$\mathrm{D} = \mathrm{CAPEX} - \mathrm{VR} + \mathrm{OPEX} + \mathrm{GT} + \mathrm{ABEX} \tag{4.7}$$

onde VR refere-se aos valores residuais, quando houver. O CAPEX corresponde aos dispêndios realizados com o objetivo de realizar o projeto e colocá-lo em operação, e é composto de investimentos não depreciáveis e depreciáveis. A Figura 4.3 indica alguns componentes do CAPEX.

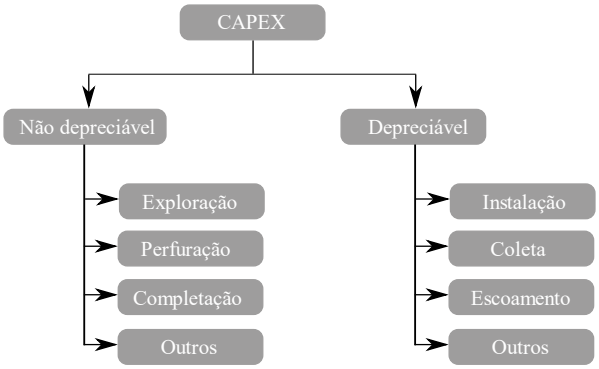


Figura 4.3 – CAPEX (não depreciável e depreciável).

Se alguns itens do CAPEX têm utilidade além da vida econômica do projeto, estes terão um valor residual precificado pelo mercado. Outra forma de calcular o valor residual de um bem, na falta do seu valor de mercado, é considerar que aquele é função da vida útil do bem, do tempo de uso e do valor de mercado quando novo. A Eq. (4.8) a seguir é uma expressão adequada para o cálculo do VR, em que

$$\mathrm{VR} = \mathrm{V}_{bn}\left(\frac{\mathrm{V}_{útil} - \mathrm{T}_{útil}}{\mathrm{V}_{útil}}\right) \tag{4.8}$$

onde V_{bn} é o valor do bem novo, $\mathrm{V}_{útil}$ é o tempo de vida útil e $\mathrm{T}_{útil}$ é o tempo de utilização do bem.

O OPEX é composto de todos os dispêndios necessários para manter o projeto em operação, e é subdividido em custos operacionais fixos e variáveis. Os custos fixos são aqueles que oneram o fluxo de caixa independentemente do nível de produção. Já os custos variáveis têm correlação direta com o nível de produção, a exemplo dos insumos químicos e outros gastos com os sistemas de injeção de água, separação de fluidos, descarte de águas produzidas etc. Uma equação simplificada para o OPEX seria:

$$\mathrm{OPEX} = c_{fixo} + c_{var} = c_{fixo} + \overbrace{c_{inj} + c_{sep} + c_{des} + \cdots}^{c_{var}} \tag{4.9}$$

onde o termo ($c_{inj} + c_{sep} + c_{des} + \cdots$) refere-se, respectivamente, ao custo de injeção de água, separação dos fluidos, custo de tratamento e descarte de águas produzidas etc. Outros custos podem ser classificados como variáveis, e devem ser incluídos nesse termo.

O termo GT (government take), último componente da Eq. (4.7), refere-se aos tributos governamentais, que são subdivididos em participações governamentais e impostos federais. No caso do Brasil, a tributação nas atividades de E&P se divide nas seguintes categorias:

- Compensações financeiras proporcionais à produção (*royalties*, COFINS e participação especial).
- Proporcionais ao lucro líquido (imposto de renda e contribuição social sobre o lucro líquido).
- Bônus fixos (bônus de assinatura, retenção de área ou parcela do proprietário da terra).

Desses tributos, podem ser ainda abatidos os créditos fiscais. A Figura 4.4 indica os tributos para o caso de contrato de concessão.

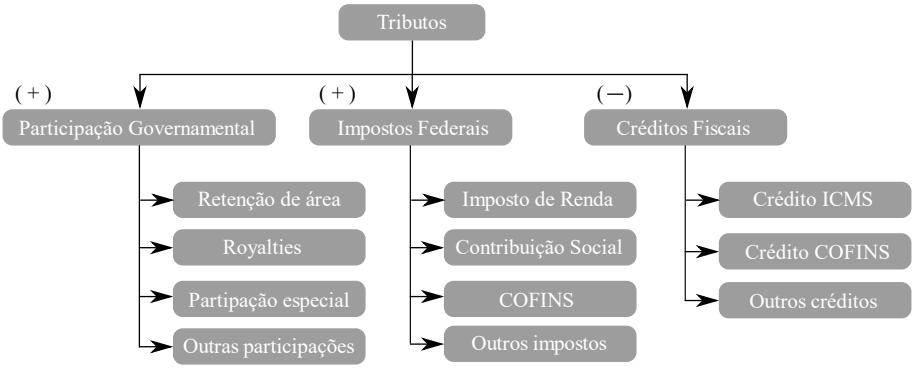


Figura 4.4 – Tributos governamentais (contrato de concessão).

O cálculo detalhado das participações governamentais, tributos e créditos fiscais, envolve detalhes que extrapolam o objetivo deste livro, uma vez que depende do *regime fiscal* que rege o projeto. Não obstante, os percentuais definidos nessa sistemática são uma boa aproximação dos casos reais. No contrato de concessão, por exemplo, as participações governamentais são: *royalties*, bônus de assinatura, participação especial e pagamento pela ocupação ou retenção de área.

Segundo Johnston (1994), no mundo há mais regimes fiscais do que países, dado que vários deles adotam dois ou mais regimes fiscais, como é o caso do Brasil. O parâmetro que determina os *royalties*, por exemplo, pode ser um simples percentual da produção ou função de outras variáveis, como a localização, lâmina d'água etc.

Os tributos e as compensações extraordinárias podem ser percentuais fixos ou variáveis em função da escala de produção. Outras diferenças podem estar relacionadas ao tratamento que se dá aos custos. Por exemplo, no caso de partilha de produção, tem-se o conceito de óleo custo (*cost oil*) e óleo lucro (*profit oil*, ou excedente em óleo).

No Brasil, os *royalties*, cobrados mensalmente e independentemente do regime fiscal, são calculados conforme a expressão a seguir:

$$0{,}05\left[\mathrm{N}_p p_{óleo} + \left(\mathrm{G}_p - \mathrm{G}_{inj}\right)p_{gás}\right] \leq \mathrm{ROY} \leq 0{,}15\left[\mathrm{N}_p p_{óleo} + \left(\mathrm{G}_p - \mathrm{G}_{inj}\right)p_{gás}\right] \tag{4.10}$$

onde N_p é a produção mensal dos líquidos, G_p é a produção mensal do gás, G_{inj} é a injeção mensal de gás, $p_{óleo}$ é o preço do óleo de referência e $p_{gás}$ o preço de referência do gás. Conforme Eq. (4.10), dependendo das condições de exploração e produção, o percentual dos *royalties* pode ser menor do que 15%, mas nunca inferior a 5%. Em geral aplica-se 10% em contrato de concessão e 15% para o contrato de partilha de produção.

Em função do grau de complexidade para o cálculo dos impostos, somado à depreciação de parte do CAPEX, é difícil estabelecer uma equação única para o fluxo de caixa líquido de um projeto de produção de petróleo. Não obstante, com algumas simplificações, pode-se deduzir, conforme o regime a que esteja subme-

tido o projeto, uma equação do VPL útil para quem atua na atividade de simulação de reservatórios para que se tenha a chance de avaliar, de forma expedita, a economicidade das diversas alternativas de drenagem do campo utilizando-se da equação do VPL do projeto, proposta neste capítulo.

Por fim, o ABEX, composto pelos custos de abandono a serem incorridos após o término do período de operação do projeto. Para projetos de desenvolvimento da produção de E&P, este processo abrange atividades como arrasamento de poços, abandono de linhas e de plataforma e recondicionamento ambiental. Esses custos são determinados por leis e regulamentações, que visam assegurar que as empresas responsáveis pelo projeto assumam a responsabilidade financeira pelas atividades de descomissionamento.

4.3. Indicadores Econômicos de Projeto

Alguns indicadores econômicos de projeto auxiliam os analistas na hora de decidir quais das alternativas de projetos serão selecionadas para uma carteira de investimento. Entre esses indicadores, além do VPL e TIR, estão: exposição financeira (EF), lucro unitário (LU), custo unitário de produção (CUP), custo unitário de investimento (CUI), custo unitário de operação (CUO), custo unitário de tributação (CUT) e índice de rentabilidade (IL).

A *exposição financeira* (EF) é um indicador que evidencia o risco econômico do projeto, e pode ser importante em tempos de restrição de caixa. Esse quantifica, em valor presente, o maior valor negativo do fluxo de caixa líquido, ou seja:

$$\mathrm{EF} = \min\{\text{ valor presente dos termos } \mathrm{FCL}_t\} \tag{4.11}$$

O *lucro unitário* (LU) expressa a remuneração do projeto por unidade de produção, ou seja:

$$\mathrm{LU} = \frac{\mathrm{VPL}}{\mathrm{VP}_{pec}} \tag{4.12}$$

onde VP_{pec} é o valor presente da *produção equivalente econômica* (PEC). A PEC é a quantidade de óleo, em valor presente, que a receita total do projeto pode comprar.

O *custo unitário de produção* (CUP) quantifica o custo total (dispêndios) do projeto por unidade produzida, para o qual o VPL é igual a 0, ou seja, considera-se, neste cálculo, os valores dos dispêndios com preços de todos os produtos (petróleo e derivados) que tornam o VPL nulo. A fórmula do CUP é

$$\mathrm{CUP} = \left.\frac{\mathrm{VP}_{dispêndios}}{\mathrm{VP}_{pec}}\right]_{\mathrm{VPL}=0} \tag{4.13}$$

onde $\mathrm{VP}_{dispêndios}$ é o valor presente de todos os dispêndios no *break-even point* (VPL = 0).

O *custo unitário de investimento* (CUI) é um indicador que quantifica o custo dos investimentos por unidade de produção, ou seja:

$$\mathrm{CUI} = \frac{\mathrm{VP}_{\mathrm{CAPEX}} - \mathrm{VP}_{\mathrm{VR}}}{\mathrm{VP}_{pec}} \tag{4.14}$$

onde $\mathrm{VP}_{\mathrm{CAPEX}}$ e $\mathrm{VP}_{\mathrm{VR}}$ são os valores presentes do CAPEX($\mathrm{I_D}$ +$\mathrm{I_{ND}}$) e do valor residual, respectivamente. Dado que os investimentos independem dos preços dos produtos, não é necessário avaliar seu valor na situação de VPL = 0.

O *custo unitário de operação* (CUO) é um indicador de projeto que quantifica os custos operacionais por unidade de produção. O procedimento de cálculo segue o mesmo adotado para o CUP, ou seja, adota os preços de produtos e derivados que anulam o VPL do projeto. A equação é:

$$\mathrm{CUO} = \left.\frac{\mathrm{VP}_{\mathrm{OPEX}}}{\mathrm{VP}_{pec}}\right]_{\mathrm{VPL}=0} \tag{4.15}$$

onde VP_{OPEX} é o valor presente do custo operacional. Ressalte-se que, além dos custos convencionais, a importação e exportação, gastos de P&D etc., devem ser considerados.

O *custo unitário de tributação* (CUT) é um indicador que quantifica o custo de todos os tributos por unidade de produção. Como os tributos dependem dos preços dos produtos, o CUT é avaliado na condição de VPL = 0 e obtido com o cálculo do CUP. A fórmula é:

$$\mathrm{CUT} = \frac{\mathrm{VP_{GT}}}{\mathrm{VP}_{pec}}\Bigg]_{\mathrm{VPL}=0} \tag{4.16}$$

onde VP_{GT} é o valor presente de todas as tributações, incluindo taxas e participações governamentais. Se todos os indicadores econômicos forem calculados corretamente, será observada a seguinte igualdade:

$$\mathrm{CUP} = \mathrm{CUI} + \mathrm{CUO} + \mathrm{CUT} \tag{4.17}$$

Já o *índice de lucratividade* (IL) é um indicador que quantifica o valor presente líquido gerado por unidade de investimento atualizado, ou seja:

$$\mathrm{IL} = \frac{\mathrm{VPL}}{\mathrm{VP_{CAPEX}}} \tag{4.18}$$

Como regra geral para esse indicador, se IL > 1 o projeto é aceito, e se IL ≤ 1 o projeto é rejeitado. Ele também é utilizado para ranquear projetos dentro do portfólio. O último indicador quantifica o valor presente líquido gerado por unidade de dispêndio total atualizado, cuja equação é:

$$\frac{\mathrm{VPL}}{\mathrm{VP}_{dispêndios}} \tag{4.19}$$

4.4. Contrato de Concessão

No contrato de concessão, o Estado concede à empresa, sob sua responsabilidade e risco, o direito de explorar e produzir petróleo por um determinado tempo em uma área definida por meio de um processo de licitação. A Figura 4.5 a seguir ilustra os termos do fluxo de caixa de um projeto de produção de petróleo sob o regime fiscal de concessão.

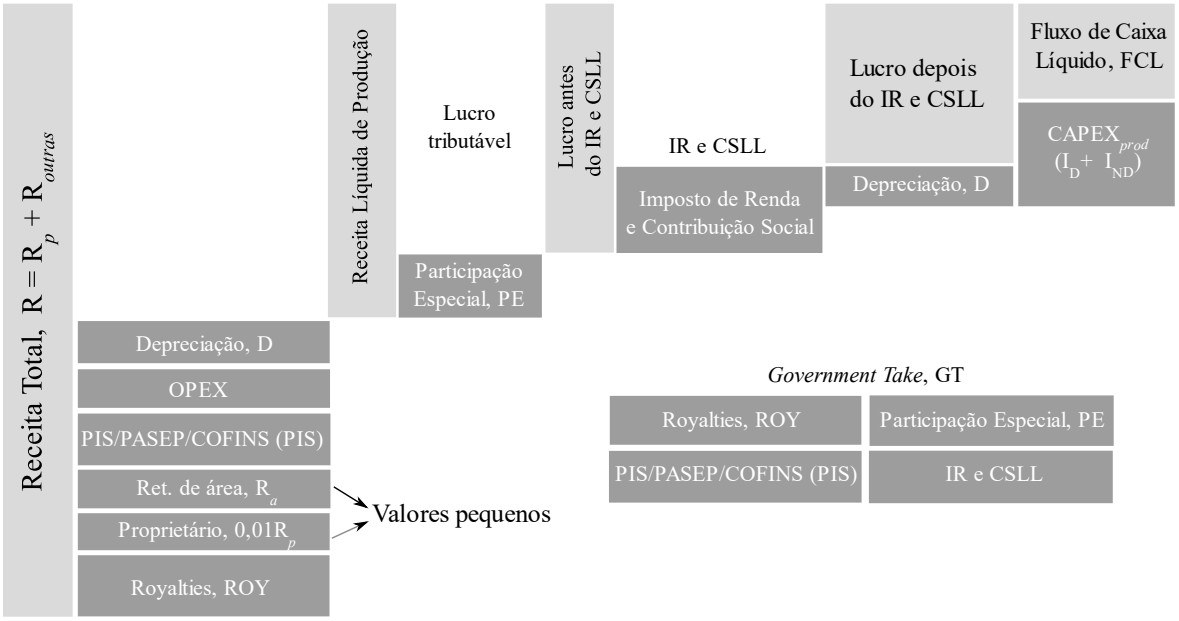


Figura 4.5 – Fluxo de caixa de projetos de produção sob regime fiscal de contrato de concessão.

No regime de concessão, a empresa concessionária tem a propriedade de todo o óleo e gás que venha a ser descoberto e produzido na área concedida. A compensação ao Estado, em caso de sucesso exploratório, dá-se na forma de tributos, royalties e outras apropriações extraordinárias, quando aplicáveis. A fase de exploração de um projeto offshore tem duração média de cinco a sete anos, podendo ser postergada caso necessário, mas ainda sujeita à aprovação da ANP. Já a fase de produção, geralmente, é entre 20 e 30 anos, podendo ser estendida em caso de acordo entre o concessionário e a agência reguladora.

A Eq. (4.20) a seguir é uma boa aproximação para o cálculo do VPL do fluxo de caixa do projeto:

$$\mathrm{FCL}_{con} = \overbrace{\left(\mathrm{R} - \mathrm{OPEX} - \mathrm{PIS} - \mathrm{ROY} - \mathrm{R}_a - 0{,}01\mathrm{R}_p - \mathrm{D} - \mathrm{PE}\right)}^{\text{Lucro tributável}} \cdot (1 - \mathrm{IR} - \mathrm{CSLL}) + \mathrm{D} - \overbrace{\mathrm{CAPEX}_{prod}}^{\mathrm{I_D}+\mathrm{I_{ND}}} \qquad (4.20)$$

onde $\mathrm{R} = \mathrm{R}_p + \mathrm{R}_{outras}$ são as receitas totais já descontados os custos sobre vendas, OPEX é o custo operacional, ABEX é o custo de abandono, PIS expressa as contribuições sociais (PIS, PASEP e COFINS), ROY são os *royalties*, D é a depreciação (tem efeito contábil para o cálculo do lucro tributável), PE é a participação especial, IR é o imposto de renda, CSLL é a contribuição social sobre o lucro líquido, $\mathrm{I_D}$ é o investimento depreciável e $\mathrm{I_{ND}}$ o não depreciável, compondo o CAPEX do desenvolvimento da produção. Vale ressaltar que o bônus de assinatura não é levado em consideração para o VPL do desenvolvimento da produção.

Quando o bloco é *offshore*, não incide a parcela de $0{,}01\mathrm{R}_p$, que é referente ao proprietário de terra em caso de campo *onshore* e, para simplificar, os termos aluguel de área R_a e $0{,}01\mathrm{R}_p$ podem ser desprezados. Considerando que a receita seja apenas da produção de produtos e derivados, a Eq. (4.20) fica reescrita como:

$$\mathrm{FCL}_{con} = \overbrace{\left(\mathrm{R} - \mathrm{OPEX} - \mathrm{PIS} - \mathrm{ROY} - \mathrm{D} - \mathrm{PE}\right)}^{\text{Lucro tributável}} \cdot (1 - \mathrm{IR} - \mathrm{CSLL}) + \mathrm{D} - \overbrace{\mathrm{CAPEX}_{prod}}^{\mathrm{I_D}+\mathrm{I_{ND}}} \qquad (4.21)$$

A participação especial, cobrada trimestralmente e incidente sobre a receita líquida de produção, é uma compensação financeira extraordinária nos casos de grande volume de produção ou de grande rentabilidade. Para efeito de apuração da participação especial, são aplicadas alíquotas progressivas[37] sobre a receita líquida da produção do campo no período-base. Ressalte-se ainda que, além das participações governamentais indicadas na Figura 4.5, há um bônus a ser pago no ato da assinatura do contrato (bônus de assinatura). A Tabela 4.1 a seguir resume as alíquotas referentes à participação governamental e aos tributos.

Tabela 4.1 – Alíquotas – Participações governamentais e tributos (contrato de concessão)

Tributos	Alíquotas	Observações
PIS PASEP COFINS	(PIS) 9,25%	PIS – Programa de Integração Social PASEP – Programa de Formação do Patrimônio do Serviço Público COFINS – Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social
CSLL	9%	Contribuição Social sobre o Lucro Líquido
IR	25%	Imposto de Renda de Pessoa Jurídica
PE		Decreto Nº. 2.705, de 03/08/1998
Royalties (ROY)	10%	Lei do petróleo 9.478, de 6 de agosto de 1997 (concessão)
Bônus de assinatura	Fixo	Parcela única a ser paga no ato da assinatura do contrato
Retenção de área	Fixo	Valor anual cobrado por km^2 a critério da ANP

[37] As alíquotas variam entre 10% e 40% de acordo com a sua localização, a lâmina d'água, o número de anos de produção e os respectivos volumes de produção fiscalizada. Além disso, há isenção da participação especial caso determinado volume não seja atingido de acordo com os critérios e características do campo.

No caso do Brasil, o monopólio de exploração e produção de petróleo foi flexibilizado em 1995 e ratificado com a Lei 9.478 de 6 de agosto de 1997 (lei do petróleo[38]). Essa lei estabeleceu o regime fiscal de concessão, em que o concessionário é uma empresa estatal ou privada (nacional ou de capital internacional) que apresenta, no ato do leilão, a melhor proposta conforme premissas do edital. Nos editais iniciais de contratos de concessão, por exemplo, o vencedor do leilão era o que apresentava a proposta de maior valor conforme regra a seguir:

$$\text{Proposta} = 0{,}4\text{BA} + 0{,}4\text{PEM} + (0{,}5\text{CL}_{exp} + 0{,}15\text{CL}_{prod}) \tag{4.22}$$

onde BA é o bônus de assinatura, que é o montante ofertado pelo licitante para obtenção da concessão, e PEM é o programa exploratório mínimo (sísmica, perfuração de poços etc.), que o operador se compromete a realizar durante a fase inicial do contrato. Os termos CL_{exp} e CL_{prod} são os percentuais dos investimentos totais aplicados em produtos e serviços nacionais na fase exploratória e desenvolvimento da produção, respectivamente, o chamado conteúdo nacional. Em suma, na licitação de áreas sob o regime de concessão, vence o consórcio ou empresa que conseguir melhor pontuação em bônus de assinatura[39] e no Programa Exploratório Mínimo – segundo os critérios definidos no edital.

4.5. Contrato de Partilha de Produção

No contrato de partilha, celebrado entre o Estado e uma empresa ou consórcio, o ente estatal participa das operações por meio de uma de suas empresas ou por um comitê operacional. O risco e os custos de exploração são da responsabilidade da contratada, que em caso de sucesso, reparte com o Estado os resultados da produção. Por outro lado, em caso de insucesso no descobrimento de hidrocarbonetos, não há participação nos custos de exploração pelo Estado ou reembolso do bônus de assinatura.

A parcela de óleo a ser partilhada, chamada de óleo lucro (*profit oil*) ou excedente em óleo, é obtida após reduzir, da receita bruta, o custo em óleo (*cost oil*), que corresponde aos custos e aos investimentos realizados pela contratada na execução das atividades de exploração, avaliação, desenvolvimento do campo, produção e desativação das instalações (abandono de campo), reconhecidos como custo em óleo pelos critérios do contrato e aprovados pelo comitê operacional e sua gestora (PPSA). O custo em óleo é apurado mensalmente e recuperado até determinado limite pré-definido em contrato em proporção à receita bruta[40].

Ensaio 4.1

O governo brasileiro passou a considerar, desde 2010, o regime fiscal de partilha de produção[41] para exploração e produção dos volumes de óleo da área denominada de polígono do pré-sal, sem deixar de honrar os contratos de blocos da mesma área já concedidos na época (aproximadamente 30%). Para administrar os contratos de partilha, foi criada, em 2010, uma empresa pública denominada PPSA (Pré-Sal Petróleo S.A).

Para fazer face às demandas de investimentos assumidos pela Petrobras voltados à exploração dos blocos já concedidos, o governo cedeu uma parcela de óleo em troca de títulos da dívida pública (cinco bilhões de barris). Toda a operação resultou na subscrição de novas ações em um processo de capitalização de R$120 bilhões oriundos de duas fontes:

- Compra de ações no valor de R$75 bilhões por parte do governo, utilizando-se dos títulos públicos resgatados.

[38] Lei que flexibilizou o monopólio do petróleo exercido pela União. Instituiu o Conselho Nacional de Política Energética (órgão que define os blocos objetos de leilões ligado ao Ministério de Minas e Energia) e a Agência Nacional de Petróleo (ANP) como órgão regulador da indústria do petróleo, seus derivados e biocombustíveis. Esta lei revogou a Lei nº 2004 de 1953 (lei que criou a Petrobras).

[39] O valor do bônus está associado a expectativa das empresas quanto ao potencial produtivo dos blocos disputados e ao grau de competição pela área na rodada de licitação.

[40] Quando não há receita suficiente no período corrente para recuperar os gastos reconhecidos, é criado um saldo de custo em óleo a recuperar para ser consumido nos períodos subsequentes. Eventual saldo positivo da conta de custo em óleo ao final do prazo contratual não gerará direito a indenizações ou restituições aos contratados.

[41] Lei nº 12.351/2010 – instituiu o regime de partilha de produção e o fundo social. O primeiro leilão da área estratégica do pré-sal foi realizado em outubro de 2013, referente ao atual campo de Libra.

- R$45 bilhões por parte de investidores.

Essa capitalização possibilitou investimentos e um alívio no nível de endividamento da empresa. Essa cessão legal (lei 12.276/2010), mais conhecida pelo termo *cessão onerosa*, tornou-se um regime fiscal específico do qual somente a Petrobras é participante. Mais exatamente, trata-se de um marco regulatório extraordinário decorrente da maior capitalização já ocorrida no mundo corporativo até então. Com efeito, a participação acionária do governo, ao fim do processo de capitalização, passou de 38% para 48% do total dos ativos da Petrobras.

Seguindo o exemplo de outros países, o governo instituiu um fundo de recursos petrolíferos[42] na mesma ocasião da edição da lei de partilha da produção, denominado de fundo social. Os recursos dos *royalties* e participações especiais devidas à União são integralmente revertidos para esse fundo, para despesas em programas sociais. Outros destinos dos recursos de fundos petrolíferos verificados em alguns países são:

- Correção de flutuações nas receitas da produção devidas às variações do preço do petróleo (fundo de estabilização).
- Gerações futuras, permitindo-lhes um benefício social de um recurso não renovável (poupança), e
- Financiamento de contas do governo (fins orçamentários).

O governo, por intermédio do Ministério de Minas e Energia, vem celebrando contratos de partilha de produção diretamente com a Petrobras (sem licitação[43]) ou mediante leilão com um consórcio, cabendo à Petrobras exercer ou não a opção como operadora com participação mínima de 30%. O vencedor do leilão é quem oferece uma proposta mais vantajosa em termos de excedente de óleo para a União. O Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) é quem define os parâmetros técnicos e econômicos dos contratos quanto ao cálculo do excedente em óleo para a União, respeitando-se um percentual mínimo. O prazo de vigência do contrato é de 35 anos e são previstos, a exemplo dos contratos de concessão, cláusulas do programa exploratório mínimo (PEM) e conteúdo local.

A Figura 4.6 a seguir ilustra os termos do fluxo de caixa de um projeto de produção de petróleo para os contratos de partilha da produção.

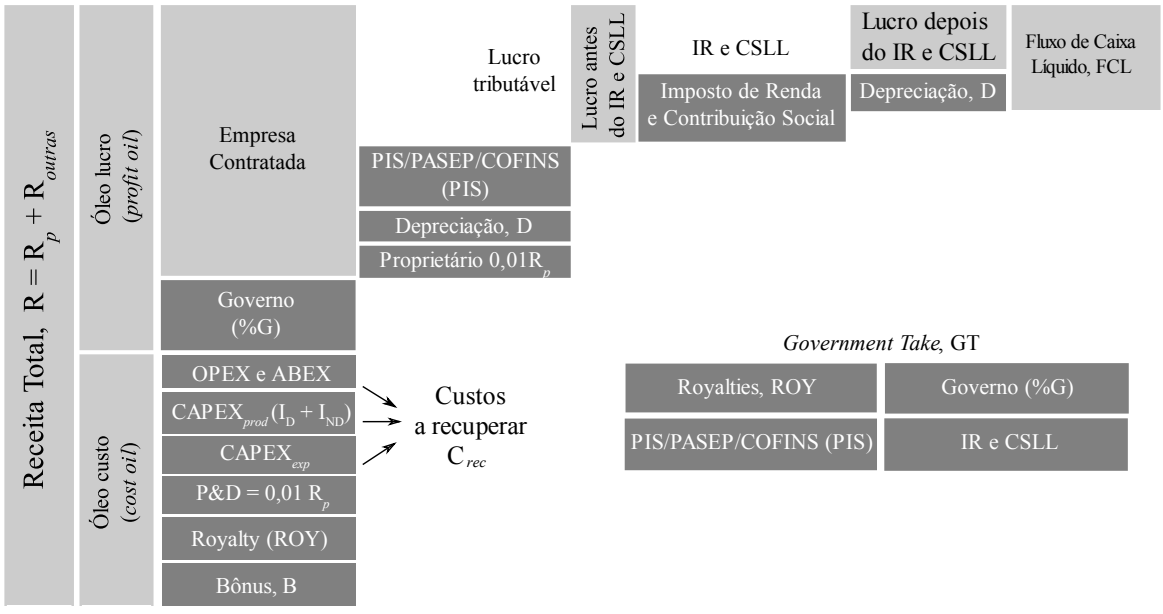


Figura 4.6 – Fluxo de caixa de projetos de produção sob regime fiscal de partilha de produção.

[42] Exemplos de outros fundos petrolíferos: *Alaska Permanent Fund, Norwegian State Petroleum Fund, Alberta Heritage Savings Fund, Oman's State General Reserve Fund*.

[43] A Petrobras, quando contratada diretamente ou no caso de ser a vencedora isolada da licitação, deverá constituir consórcio com a PPSA. Esse critério vale também para os demais consórcios. A PPSA indica a metade dos integrantes do comitê operacional, inclusive o seu presidente, cabendo aos demais consorciados a indicação dos outros integrantes.

A Eq. (4.23) a seguir é uma boa aproximação para o cálculo do VPL do fluxo de caixa do projeto em regime de partilha:

$$\mathrm{FCL}_{part} = [(1-\mathrm{G})\overbrace{(\mathrm{R}-\mathrm{ROY}-\mathrm{B}-\mathrm{C}_{rec})}^{\text{óleo lucro}} - \mathrm{D} - \mathrm{PIS})] \cdot (1 - \mathrm{IR} - \mathrm{CSLL}) + \mathrm{D} \quad (4.23)$$

onde G é o percentual de óleo excedente devido ao governo, e C_{rec} é o custo em óleo a ser recuperado ($CAPEX_{exp}$ + $CAPEX_{prod}$ + OPEX + ABEX). Os *royalties*, P&D e o bônus de assinatura, dentre outros custos indicados na lei de partilha, não fazem parte do custo em óleo. Observe ainda que a tributação incide apenas sobre a parcela da empresa que lhe cabe por contrato, ou seja, sobre o valor (1 - G) do chamado óleo excedente ou óleo lucro. Vale ressaltar que não há incidência de participação especial PE para os contratos de partilha. Observe ainda que foram desprezados valores insignificantes na Eq. (4.23).

O percentual da receita total a ser recuperado é uma variável de contrato, bem como o percentual de partilha G. Por exemplo, para o contrato de exploração do campo de Libra, o percentual G foi de 41,65% e o custo a ser recuperado é de no máximo 50% do faturamento bruto para os anos 1 e 2; para os anos seguintes, o custo a ser recuperado é de no máximo 30%, ou seja:

$$\mathrm{CAPEX}_{exp} + \mathrm{CAPEX}_{prod} + \mathrm{OPEX} + \mathrm{ABEX} \leq \mathrm{C}_{rec} \leq 0{,}5\mathrm{R}\ (\text{ano 1 e 2}) \text{ e } 0{,}3\mathrm{R}\ (\text{ano 3 em diante}) \quad (4.24)$$

A parcela GT, no regime de partilha, se restringe ao bônus de assinatura, aos *royalties* e à parcela do óleo excedente objeto da partilha, além dos tributos legais relativos às contribuições sociais (PIS, PASEP e COFINS), IR e CSLL. É importante registrar que o direito da contratada à apropriação do custo em óleo só é exigível em caso de descoberta comercial.

Como indica a lei, o pagamento de até 1% ($0{,}01R_p$) da receita da produção aos proprietários da terra onde se localiza o bloco não pode compor a parcela do óleo custo. Essa parcela, a do proprietário de terra, se aplica também aos casos de partilha de produção[44], embora nenhum bloco *onshore*, até o momento, tenha sido definido como área estratégica sujeita aos contratos de partilha.

Extinto o contrato de partilha da produção, a contratada fará a remoção dos equipamentos e bens que não sejam objeto de reversão, ficando a contratada obrigada a reparar ou indenizar os danos causados por suas atividades e praticar atos de recuperação ambiental determinados pelas autoridades competentes. Esse é o mesmo tratamento para o caso de contrato de concessão.

4.6. Métrica de Projeto e Número Índice

Em geral, as operadoras de petróleo dispõem de métricas de CAPEX e OPEX para a fase inicial de avaliação de alternativas de projetos, momento em que os custos não estão suficientemente precificados para um cálculo consistente do VPL. Para os casos em que o analista não tem nenhum dado (valores cotados em mercados, por exemplo), as métricas podem ser de grande utilidade. Outro recurso, útil para atualização de valores de CAPEX e OPEX de projeto, são os números índices da indústria do petróleo. Entre esses índices estão o UCCI, UOCI, DCCI, NACI e UII.

4.6.1. Métrica de projeto

Desde 1987 a Independent Project Analysis (IPA) publica modelos de custos de sistemas e subsistemas para projetos de exploração e desenvolvimento de campos de petróleo. São modelos de regressão linear baseados

[44] De acordo com a lei 12.351/2010, o governo pode vir a definir, futuramente, áreas estratégicas, região de interesse para o desenvolvimento nacional (incluindo campos de terra) caracterizada pelo baixo risco exploratório e elevado potencial de produção de petróleo.

em dados históricos de projetos ao redor do mundo. A Eq. (4.25) a seguir, a título de exemplo, indica uma métrica para um projeto de desenvolvimento da produção de um campo *offshore* com LDA > 300 (lâmina d'água):

$$Y = -262 + 96{,}8X^{0{,}6} \qquad (\sigma = 262{,}19) \tag{4.25}$$

onde Y, a variável dependente, é o custo total de desenvolvimento do campo em milhões de dólares $MM (arranjo submarino, facilidades de superfície e poços exceto sistema de exportação), e a variável independente X é a produção equivalente econômica nominal, expressa pela produção total de hidrocarbonetos em MM boe prevista no projeto (ver Figura 4.7). Essas métricas são atualizadas de tempos em tempos.

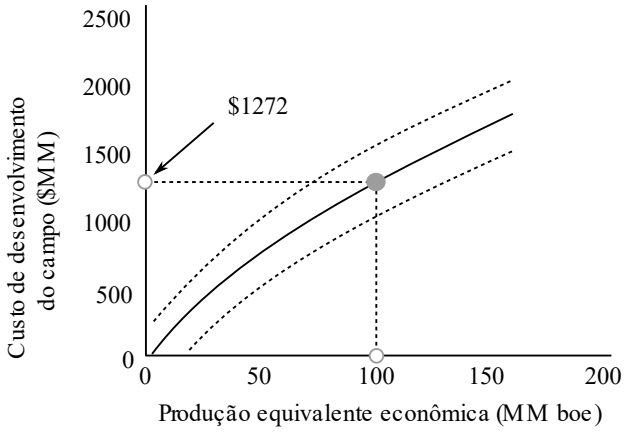


Figura 4.7 – Métrica de projeto – Exemplo (IPA).

4.6.2. Número índice

A IHS-CERA, empresa de consultoria americana especializada em assessorar governos e empresas privadas do mercado de energia (petróleo, gás, carvão etc.), criou números índices de mercado que refletem a evolução dos custos de equipamentos, materiais, operação e manutenção da indústria do petróleo.

Os índices Upstream Capital Costs Index (UCCI) e Upstream Operating Costs Index (UOCI), por exemplo, referem-se ao CAPEX e OPEX, respectivamente, que traduzem a evolução dos custos de equipamentos, instalações, materiais, pessoal qualificado e não qualificado empregado na construção e manutenção de um portfólio geograficamente diversificado de 28 projetos do setor *upstream* (*onshore*, *offshore*, gasodutos e GNL). Já o Downstream Capital Costs Index (DCCI), equivalente ao UCCI, reflete a evolução dos custos de equipamentos e serviços de uma cesta de 40 projetos de construção de plantas de refino e de petroquímica.

Além desses, a IHS-CERA publica o North American Cost Index (NACI) e o Upstream Innovation Index (UII). O primeiro acompanha a evolução dos custos de investimento de capital empregado na construção de poços convencionais e não convencionais em águas profundas do Golfo do México. O segundo foi criado para avaliar o impacto do custo de inovação, seja o aumento da eficiência operacional, melhores práticas ou para cobrir lacunas em relação ao *benchmark*. Este último, UII, foi lançado em 2014 e os demais (UCCI, UOCI, DCCI e NACI), em 2000.

4.7. VPL de Projetos – Desenvolvimento da Produção

Esta primeira proposição de VPL de projetos é de natureza analítica, que consiste em uma formulação com cinco variáveis fundamentais: preço da *commodity*, taxa mínima de atratividade, investimento, custo operacional, curva de produção de óleo e participação governamental. A proposição do VPL do fluxo de caixa do projeto segue a Eq. (4.26) a seguir:

$$\mathrm{VPL} = -\mathrm{CAPEX}_{prod} + (1 - \mathrm{GT}) \sum_{t=1}^{n} \frac{365(p_{t,óleo} - \mathrm{OPEX})\mathrm{Q}_t}{(1 + \mathrm{TMA})^t} \tag{4.26}$$

onde CAPEX_{prod} é o investimento total para o desenvolvimento da produção desembolsado no ano zero, GT é o percentual da participação governamental (%), $p_{t,óleo}$ é o preço do óleo em $/bbl no tempo, OPEX são os custos operacionais expressos em $/bbl, Q_t é a vazão média expressa em boe/dia, TMA é a taxa mínima de atratividade, *t* é o ano fiscal e *n* é o número de períodos fiscais (ano).

Note que a primeira condição para um VPL > 0 é ter ($p_{t,óleo}$ - OPEX)>0 e, quanto maior GT e/ou a TMA, menor o VPL do projeto. O OPEX é estimado pela seguinte equação:

$$\mathrm{OPEX} = \mathrm{c_{fixo}} + \mathrm{c_{var}} = \mathrm{c_{fixo}} + \overbrace{\mathrm{c_{inj}} + \mathrm{c_{sep}} + \mathrm{c_{des}} + \cdots}^{\mathrm{c_{var}}}, \tag{4.27}$$

que é a mesma indicada na Eq. (4.9). A curva de produção de óleo e as demais curvas de injeção e produção de água estão representadas na Figura 4.8 a seguir:

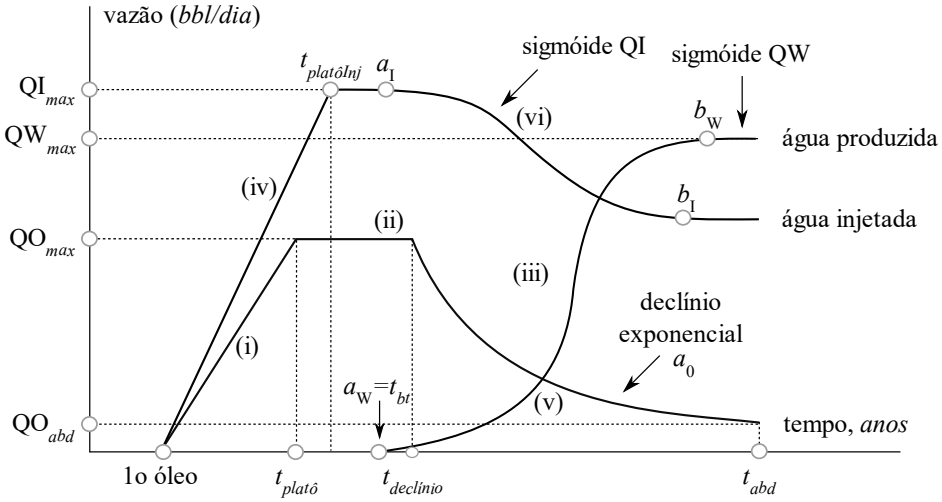


Figura 4.8 – Esquema de curvas de produção de fluidos.

Conforme se vê no esquema da Figura 4.8, o modelo contempla seis funções lineares para designar as curvas necessárias ao cálculo do fluxo de caixa do projeto, onde:

(i) Função linear crescente desde o início da produção de óleo até o platô.

(ii) Função linear constante de manutenção do platô de produção de óleo.

(iii) Função exponencial para o declínio de produção de óleo.

(iv) Função linear crescente para o início de injeção de água até o seu valor máximo.

(v) Função sigmoide para a produção de água a partir da irrupção até o abandono.

(vi) Função sigmoide para a injeção de água a partir da vazão máxima até o abandono.

Todos os parâmetros para as curvas indicadas na Figura 4.8 (óleo, gás, injeção e produção de água) são variáveis que podem ser ajustadas com um modelo de curvas típicas geradas em simulação de reservatórios. A vantagem, para um cálculo expedito do VPL, é gerar uma distribuição de frequência de VPL do projeto realizando simulação Monte Carlo com aquelas variáveis, prescindindo que essa mesma distribuição seja feita com simulação de reservatórios. É claro que o VME não é o mesmo, mas é uma boa aproximação.

4.7.1. Curva de produção de óleo

A estratégia para a curva hipotética de produção de óleo (curvas i, ii e iii), por exemplo, atende às seguintes recomendações:

- Data do primeiro óleo em três anos após a declaração de comercialidade ($t = 0$).
- Crescimento linear da produção a partir de uma vazão nula até um platô de produção QO_{max} em bbl/dia, alcançado no tempo $t_{platô}$.
- Produção estável no platô durante ($t_{declínio}$ - $t_{platô}$), e
- Curva de declínio exponencial da produção com taxa igual a a_0 (declínio a partir do platô de produção até QO_{abd} em t_{abd}).

Desse modo, as três curvas que compõem a produção de óleo, $Q_{t,óleo}$, são:

$$\text{(i)}\ \ t \times \frac{QO_{max}}{(t_{platô} - t_{1o\ óleo})} \rightarrow \left(t_{1o\ óleo} @\ t_{platô}\right) \rightarrow\ N_{p1} = 0{,}5 \times QO_{max} \times (t_{platô} - t_{1o\ óleo}) \tag{4.28}$$

$$\text{(ii)}\quad QO_{max} \rightarrow \left(t_{platô} @\ t_{declínio}\right) \rightarrow N_{p2} = QO_{max} \times \left(t_{declínio} - t_{platô}\right) \tag{4.29}$$

$$\text{(iii)}\ QO_{max} e^{-a_0(t - t_{declínio})} \rightarrow (\ t_{declínio} @ t_{abd}) \rightarrow N_{p3} = \frac{QO_{max} - QO_{abd}}{a_0} \tag{4.30}$$

onde a_0 é a taxa de declínio (t^{-1}), $Q_{t,óleo}$ é a vazão de óleo em bbl/dia, $t_{platô}$ é o tempo para o qual a produção de óleo é máxima, $t_{declínio}$ é o tempo para o início do declínio da produção de óleo, t_{abd} é o tempo para o abandono do campo e QO_{abd} é a vazão de óleo em t_{abd}. A produção acumulada de óleo é $N_p = N_{p1} + N_{p2} + N_{p3}$.

4.7.2. Curva de injeção de água

Para o perfil de injeção de água, o modelo analítico segue uma função linear crescente até atingir a vazão de platô (QI_{max}), ou seja:

$$QI_t\left(t_{1o\ óleo} @ t_{platôInj}\right) = t \times \frac{QI_{max}}{(t_{platôInj} - t_{1o\ óleo})} \tag{4.31}$$

A partir da vazão de platô, segue uma função sigmoide, conforme se vê a seguir:

$$QI_{abd} + (QI_{max} - QI_{abd}) \rightarrow t = t_{platôInj} < a_I \tag{4.32}$$

$$QI_{abd} + (QI_{máx} - QI_{abd}) \times \left[1 - 2\left(\frac{t - t_{platôInj}}{b_I - t_{platôInj}}\right)^2\right] \rightarrow a_I \leq t \leq \frac{a_I + b_I}{2} \tag{4.33}$$

$$QI_{abd} + (QI_{máx} - QI_{abd}) \times \left[2\left(\frac{t - t_{platôInj}}{b_I - t_{platôInj}}\right)^2\right] \rightarrow (a_I + b_I)/2 \leq t \leq b_I \tag{4.34}$$

$$QI_{abd} \rightarrow b_I \leq t \leq t_{abd} \tag{4.35}$$

onde a_I e b_I são os parâmetros da função sigmoide, QI_{abd} é a vazão de injeção de água em t_{abd} e $t_{platôInj}$ é o tempo para o qual a injeção de água é máxima.

4.7.3. Curva de produção de água

Para as curvas de produção de água, $QW_t(0@t_{abd})$, segue-se o seguinte modelo:

$$0 \rightarrow 0 \leq t \leq a_{\mathrm{W}} = t_{bt} \tag{4.36}$$

$$\mathrm{QW}_{max} \times \left[2 \times \left(\frac{t - t_{bt}}{b_{\mathrm{W}} - t_{bt}}\right)^2\right] \rightarrow \ t_{bt} \leq t \leq (t_{bt} + b_W)/2 \tag{4.37}$$

$$\mathrm{QW}_{max} \times \left[1 - 2 \times \left(\frac{t - t_{bt}}{b_{\mathrm{W}} - t_{bt}}\right)^2\right] \rightarrow (t_{bt} + b_{\mathrm{W}})/2 \leq t \leq b_{\mathrm{W}} \tag{4.38}$$

$$\mathrm{QW}_{max} \rightarrow b_{\mathrm{W}} \leq t \leq t_{abd} \tag{4.39}$$

onde a_{W} e b_{W} são os parâmetros da função sigmoide, QW_t é a produção de água em bbl/dia e t_{bt} é o tempo de irrupção de água nos poços produtores (*breakthrough*).

4.7.4. Curva de produção de gás

A vazão de gás $\mathrm{Q}_{t,gás}$ é função da razão gás/óleo, ou seja, $\mathrm{Q}_{t,gás} = \mathrm{Q}_{t,óleo} \times \mathrm{RGO}$, onde a RGO é expressa em m^3 *std* de gás/m^3 *std* de óleo. Com efeito, a produção acumulada de gás é $\mathrm{G}_p = \mathrm{RGO} \times \mathrm{N}_p$. Desse modo, pode-se calcular Q_t, expresso em boe/dia, utilizando-se a equação a seguir:

$$\mathrm{Q}_t(\mathrm{boe/dia}) = \mathrm{Q}_{t,óleo}(\mathrm{bbl/dia}) + 6{,}3 \times [\mathrm{Q}_{t,gás}(m^3/\mathrm{dia})/1000] \tag{4.40}$$

4.7.5. CAPEX – Plataforma

O CAPEX_{plat}, valor a ser investido para o desenvolvimento da produção, pode ser representado pela seguinte métrica:

$$\mathrm{CAPEX}_{plat} = k_1 \times \frac{1}{1000}\max\left[\mathrm{Q}_{t,óleo} + \mathrm{QI}_t + \mathrm{QW}_t\right] + k_2 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 5 \quad k_2 = 400\ (\mathrm{M}_1) \\ k_1 = 8 \quad k_2 = 600\ (\mathrm{M}_2) \\ k_1 = 10 \quad k_2 = 700\ (\mathrm{M}_3) \end{cases} \tag{4.41}$$

onde $\mathrm{Q}_{t,óleo}$ é a vazão de óleo, QW_t é a vazão de produção de água e QI_t é a vazão de injeção de água, reportadas em m^3/dia. Os valores k_1 e k_2 são parâmetros de ajustes que reportam o cenário econômico (menor custo da plataforma M_1, custo intermediário M_2 e maior custo M_3). Uma segunda opção é utilizar o modelo de Hayashi (2006), cuja expressão é:

$$\mathrm{CAPEX}_{plat} = 417 + \frac{1}{1000}\left[16{,}4\mathrm{QO}_{max} + 3{,}15(\mathrm{QI}_{max} + \mathrm{QW}_{max})\right] + 0{,}1n_p \tag{4.42}$$

onde n_p é o número de poços, sendo que $\mathrm{CAPEX}_{prod} = \mathrm{CAPEX}_{inicial} + \mathrm{CAPEX}_{plat} + c_{poço}$, em que o último termo é o custo médio de poços. Na falta de modelos, pode-se utilizar métricas de CAPEX da IPA.

Com essa proposição, é possível simular diversas variáveis técnicas e econômicas de interesse do analista de projeto, com o platô de produção da plataforma, a taxa de declínio do campo, o preço das *commodities*, a vazão de produção de água etc.

4.8. VPL de Projetos – Esforço Simultâneo de Exploração e Produção

Esta proposição de avaliação econômica expedita, publicada por Nilssen e Nystad (1986) e reavaliada por Marques *et al*. (2007), refere-se a um projeto de exploração e produção de petróleo. Esses autores examinaram uma função-objetivo que maximiza o esforço simultâneo de exploração com o desenvolvimento da produção. A função-objetivo proposta segue a Eq. (4.43):

$$\max_{\mathrm{B},t_{\mathrm{E}},k} \mathrm{VPL} \cong \mathrm{EXP}_{esforço} + \mathrm{PROD}_{esforço} \tag{4.43}$$

onde

$$\mathrm{EXP}_{esforço} \cong -\int_0^{t_\mathrm{E}} \mathrm{CAPEX}_{exp} e^{-it} dt \tag{4.44}$$

e

$$\mathrm{PROD}_{esforço} \cong \left[\int_0^{\mathrm{T}} [p(t_\mathrm{E} + t)q(t) - \mathrm{OPEX}]e^{-it} dt - \mathrm{CAPEX}_{prod}\right] e^{-it} \tag{4.45}$$

onde B é o esforço exploratório acumulado, isto é, o número de poços perfurados, k é uma razão da reserva recuperável ou provada expressa em % por ano, t_E é o tempo de exploração, CAPEX_{exp} é o custo de exploração ou de esforço exploratório expresso em $/ano, T é o tempo de produção de óleo desde o início da produção até o momento em que o custo operacional é maior que o retorno, $p(t_\mathrm{E} + t)$ é o preço do óleo desde o início da exploração até o tempo t contado a partir da produção e i é a taxa de atratividade anual. Note que a variável t representa o tempo de produção de óleo a partir do início da produção e t_E é o tempo de exploração. A variável B, opcionalmente, pode ser representada em metros perfurados.

O VPL do empreendimento é a receita auferida da venda do óleo produzido pelo preço estimado, descontados os investimentos exploratórios, custos de desenvolvimento e custos operacionais. Algumas das premissas do modelo em (4.43) são:

- Nenhum desenvolvimento ou produção se inicia sem que o período de exploração esteja concluído e todo o esforço de desenvolvimento da produção se dará tão logo termine o período de exploração, de forma instantânea.
- O volume de reserva é função crescente do esforço exploratório.
- O custo de exploração é uma função crescente do esforço exploratório.
- O preço é uma função crescente exponencialmente, baseado em uma taxa fixa de crescimento até atingir um limite em que se dá a substituição do óleo por outras fontes alternativas mais baratas[45].

Como em todo processo de produção, também é assumido que a atividade de exploração e de desenvolvimento da produção tenha um comportamento de economia de escala. Em geral, a produção evolui de zero até um platô de produção e depois declina até atingir um *cut-off* de produção. Aqui a ideia é que o esforço exploratório seja entendido como todas as operações de construção de poços visando maximizar a reserva a ser produzida. Dessa forma, seguindo a primeira premissa, a produção se inicia em um platô e mantém-se constante até certo tempo, seguida de uma curva de declínio exponencial.

É necessário avaliar algumas equações separadamente para explicitar melhor o modelo indicado em (4.43). O volume da reserva, por exemplo, está relacionado com o esforço da exploração. Para tornar o modelo mais realista, há o desafio de se encontrar uma curva que represente a reserva provada Q em função da reserva provável Q_{max} e que seja uma função monotônica crescente do esforço exploratório (número de poços B). Considerando-se Q_{max} o total de óleo provável da acumulação, uma correlação entre Q e Q_{max} pode ser representada pela Eq. (4.46) a seguir:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_{max}(1 - e^{-a_\mathrm{Q}\mathrm{B}}) \tag{4.46}$$

desde que atenda às condições necessárias para uma função monotônica, ou seja, $\mathrm{Q}'(\mathrm{B}) > 0$, $\mathrm{Q}''(\mathrm{B}) < 0$ e $\mathrm{Q}'(0) = 0$. O índice a_Q é uma medida de produtividade da exploração expresso em poço^{-1}. Um valor alto de a_Q significa que mais petróleo é descoberto com o mesmo esforço exploratório. É assumido que o custo de explorar um poço cresça à mesma taxa do esforço exploratório, de forma linearmente dependente.

[45] O termo é "*backstop technology*". É uma restrição interessante, considerando que as operadoras estão vivenciando processos de transição energética, optando por produção de energia limpa em detrimento da energia fóssil.

A utilização da mesma taxa de crescimento tem como objetivo simplificar as simulações. Nada impede que essas taxas sejam diferentes ou ponderadas por outras variáveis. A relação linear adotada para o custo de exploração dá-se conforme Eq. (4.47) a seguir:

$$\mathrm{CAPEX}_{exp} t_{\mathrm{E}} = a_{\mathrm{E}} \mathrm{B} + \frac{b_{\mathrm{E}} \mathrm{B}}{t_{\mathrm{E}}} \tag{4.47}$$

ou

$$\mathrm{CAPEX}_{exp} / \mathrm{A} = a_{\mathrm{E}} + b_{\mathrm{E}} \mathrm{A} \tag{4.48}$$

onde a_{E} e b_{E} são parâmetros de custo de exploração e A = B/t_{E} é a razão do esforço de exploração medido em poço/ano. O preço do óleo cresce de forma exponencial até um valor máximo, conforme sugere a relação da Eq. (4.49) a seguir:

$$p(t) = \min(p_0 e^{a_p t}, p_{max}) \tag{4.49}$$

onde p_0 é o preço inicial, a_p é a taxa de crescimento e p_{max} é o preço máximo. Nessa proposição, o preço do óleo cresce exponencialmente até atingir um valor máximo, de forma que, a partir daí, o mercado inicia a substituição do produto por uma energia alternativa de menor preço, como por exemplo eólicas *offshore*.

Como já referido, a produção de petróleo exibe um comportamento de economia de escala. Isso reflete diretamente na função custo de desenvolvimento. Uma equação adequada seria:

$$\mathrm{CAPEX}_{prod} = a_{\mathrm{D}} (k\mathrm{Q})^{b_{\mathrm{D}}} \tag{4.50}$$

onde kQ é o platô de produção de óleo, a_{D} e b_{D} descrevem a tecnologia de produção. Observe que para um dado platô de produção, um alto valor de a_{D} implica um alto custo de tecnologia e um baixo valor representa um baixo custo de tecnologia em $/bbl.

A variável b_{D} varia no intervalo de (0, 1) e representa a economia de escala. Quando b_{D} é igual a 1 não há economia de escala, e quanto menor b_{D} maior a economia de escala. Nesse modelo, a produção de cada poço se mantém constante em um platô até que seja produzido um percentual da reserva disponível G. Decorrido esse tempo t_1, a produção começa a declinar exponencialmente. A Eq. (4.51) representa esse modelo:

$$q(t) = k\mathrm{Q} \rightarrow 0 < t \leq t_1 \tag{4.51}$$

cujo fator de recuperação da reserva até o tempo t_1 é calculado pela Eq. (4.52) a seguir, que relaciona as variáveis t_1,Q e k:

$$\mathrm{G} = \left[\int_0^{t_1} q(t) dt \right] / \mathrm{Q} = k t_1 \Leftrightarrow t_1 = \mathrm{G}/k \tag{4.52}$$

Quando o platô de produção se mantém alto por muito tempo, a produção cai rapidamente durante a fase de declínio. Considerando um declínio da produção teoricamente infinito, a igualdade expressa pela Eq. (4.53) é verdadeira, ou seja:

$$\int_0^{\infty} k\mathrm{Q} e^{-\delta t} dt = (1 - \mathrm{G})\mathrm{Q} \tag{4.53}$$

Resolvendo essa igualdade, obtém-se:

$$\delta = k/(1 - \mathrm{G}) \tag{4.54}$$

que representa a equação de comportamento de um reservatório de óleo em declínio exponencial de produção. Veja que as seguintes relações são também verdadeiras:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \mathrm{G}} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \delta}{\partial k} > 0 \tag{4.55}$$

Quando o resultado da produção se iguala ao custo operacional, o campo para de produzir. Considerando que o tempo para o *cut-off* seja T, então a igualdade a seguir deve ser satisfeita para o cálculo do custo operacional.

$$\text{OPEX} = p(\text{T} + t_{\text{E}})q(\text{T}) \tag{4.56}$$

Nesta modelagem, admite-se que o custo operacional seja proporcional ao custo de desenvolvimento de produção conforme a Eq. (4.57)

$$\text{OPEX} = a_o \text{CAPEX}_{prod} \tag{4.57}$$

onde a_0 é uma constante que expressa, em %, a eficiência do custo operacional. Note que o custo operacional não é reduzido quando o campo entra em declínio de produção. Conforme já explicitado, a produção é descrita em dois períodos conforme a Eq. (4.58) e (4.59) a seguir,

$$q(t) = k\text{Q} \qquad \text{se} \qquad 0 < t \leq t_1 \tag{4.58}$$

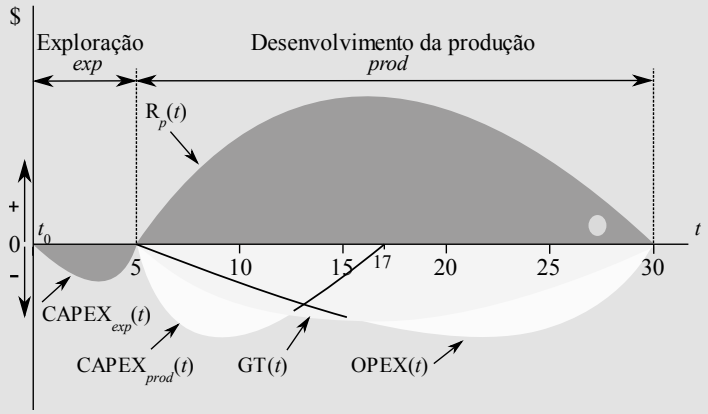
$$q(t) = k\text{Q}e^{-\frac{k}{1-\text{G}}(t-t_1)} \quad \text{se} \quad t_1 < t \leq \text{T} \tag{4.59}$$

que representam, respectivamente, a vazão de produção durante o platô e declínio. As três variáveis dependentes são B, t_{E} e k. A solução que maximiza a função objetivo em (4.43) pode ser obtida por meio de qualquer metodologia de otimização.

Segue uma alternativa de otimização: variar uma delas dentro de um range mantendo-se as duas outras fixas. A ordem inicial seria manter os valores de B e t_{E} constantes e variar o valor de k dentro de um range. Com isso determina-se o valor de k que maximiza a função objetivo. Em seguida fixa-se um novo valor para t_{E} e varia-se o valor de k novamente. Assim, para cada valor de B haverá uma combinação de t_{E} e k que maximiza a função VPL. Por último, varia-se cada valor de B e repete-se todo o processo de busca dos valores de t_{E} e k que maximizam a Eq. (4.43). Haverá ao final uma combinação de B, t_{E} e k que maximiza a função VPL, solução do problema.

Ensaio 4.2

Considere, como distração, a hipótese de perfuração de um poço no campo de Baleia. Em caso de sucesso exploratório, as receitas da produção de óleo e os dispêndios envolvidos seguem as curvas contínuas de fluxo de caixa indicadas na figura a seguir:



Onde:

- $\text{CAPEX}_{exp}(t)$ – dispêndio de capital na fase exploratória (sísmica, perfuração de poços pioneiros e de delimitação, avaliação etc.).

- $CAPEX_{prod}(t)$ – dispêndio de capital na fase de desenvolvimento da produção (plataformas, sistema submarino, poços de produção e injeção etc.).
- $GT(t)$ – participações governamentais (*royalties*, aluguel de área, participações especiais, impostos, taxas etc.).
- $OPEX(t)$ – custos operacionais (sistema de separação de óleo e gás, tratamento de águas produzidas, manutenção, pessoal etc.).
- $R_p(t)$ – receitas da produção auferidas com a venda do óleo e gás produzidos já descontados os custos sobre vendas.

Com essas curvas hipotéticas é possível elaborar uma expressão para o valor presente líquido de um projeto de E&P. Mais exatamente, uma expressão para o o $VPL_{E\&P}(i, t_0)$, onde t_0 é o tempo inicial da fase exploratória, ou seja:

$$\mathrm{VPL}_{\mathrm{E\&P}}(i,t_0) = \mathrm{VPL}_{exp}(i,t_0) + \mathrm{VPL}_{prod}(i,t_0)$$

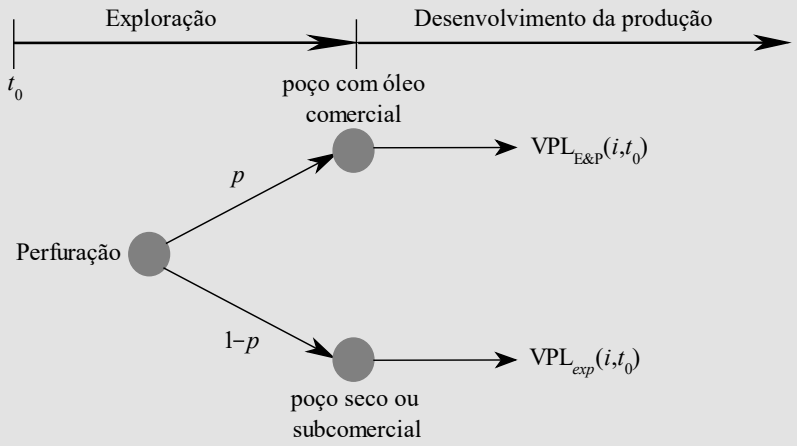
onde

$$\mathrm{VPL}_{exp}(i,t_0) = -\int_0^5 \mathrm{CAPEX}_{exp}(t)e^{-it}dt$$

e

$$\mathrm{VPL}_{prod}(i,t_0) = \left\{\int_5^{30}\left[\mathrm{R}_p(t) - \mathrm{OPEX}(t) - \mathrm{GT}(t)\right]e^{-it}dt - \int_5^{17}\mathrm{CAPEX}_{prod}(t)e^{-it}dt\right\}e^{-5i}$$

Considerando um índice de sucesso exploratório p, o VPL do projeto (E&P) é tratado como $VME_{E\&P}$, *valor médio esperado*. Esse é um valor médio que se espera para o VPL do projeto caso sejam realizadas tentativas exploratórias independentes. Como se sabe, só haverá investimento na fase de desenvolvimento da produção quando o resultado exploratório indicar potencialidade econômica da descoberta. Desse modo, considerando um índice de sucesso p para a fase exploratória, os dois resultados possíveis serão conforme indicados no esquema da figura a seguir:



Assim, a expressão para o $VME_{E\&P}$ deve ser construída considerando as probabilidades de ocorrência de sucesso da fase de exploração, logo a equação

$$\mathrm{VME}_{\mathrm{E\&P}}(i,t_0) = p\mathrm{VPL}_{\mathrm{E\&P}}(i,t_0) + (1-p)\mathrm{VPL}_{exp}$$

expressa o valor médio esperado do projeto de E&P.

4.9. Problemas Propostos

Problema 4.1 – Segue uma sugestão de valores, considerando três cenários econômicos, para serem aplicados na primeira proposição, a do VPL de projetos (desenvolvimento da produção).

Tabela 4.2 – Sugestão de dados – VPL de projetos (desenvolvimento da produção)

Variável	Otimista	Referência	Pessimista	Unidade
Preço do óleo, $p_{0,óleo}$	104	80	56	$/bbl
Preço do gás, $p_{0,gás}$	9,1	7,0	4,9	$/MM Btu
Taxa mínima de atratividade, TMA	8,4	12,0	15,6	%
Componente do $CAPEX_{prod}$				
Investimentos iniciais, $CAPEX_{inicial}$	84	120	156	$MM
Custo da plataforma, $CAPEX_{plat}$	M_1	M_2	M_3	$MM
Custo médio por poço, $c_{poço}$	42	60	78	$MM/poço
Componente do OPEX				
Custo fixo, c_{fixo}	24,5	35,0	45,5	$MM/ano
Custo variável, c_{var}				
Separação de fluidos, c_{sep}	4,2	6,0	7,8	$/bbl
Injeção de água, c_{inj}	2,8	4,0	5,2	$/bbl
Tratamento e descarte de água, c_{des}	2,1	3,0	3,9	$/bbl

Problema 4.1 – Como na proposição anterior, segue uma sugestão de valores indicados na Tabela 4.3 para programação do modelo VPL de Projetos – Esforço Simultâneo de Exploração e Produção.

Tabela 4.3 – Sugestão de valores – VPL de projeto (esforço simultâneo de exploração e produção)

Variável	Descrição da Variável	Valor	Unidade
Q_{max}	Reserva provável	716,86	MM bbl
a_Q	Índice de produtividade da exploração	0,05	por poço
a_E	Parâmetro do custo unitário de exploração	15	$MM/poço
b_E	Coeficiente da sensibilidade da atividade de exploração	3	$MM/poço^2
r	Taxa de desconto	12%	% *a.a.*
p_0	Preço inicial	30	$/bbl
a_p	Taxa de crescimento do preço do óleo	0,83%	% *a.a.*
P_{max}	Preço máximo do óleo	60	$/bbl
a_D	Parâmetro do custo da fase de desenvolvimento	83.173,12	$/bbl
b_D	Economia de escala	0,7	–
G	Produção acumulada até o início do declínio	60%	%
a_o	Eficiência do custo operacional	10%	%

TOMO II

5 Teoria da Decisão e da Preferência
6 Métricas de Risco e Precificação de Ativos
7 A Moderna Teoria de Investimento

5

TEORIA DA DECISÃO E DA PREFERÊNCIA

A incerteza é uma margarida cujas pétalas nunca acabam de desfolhar.
Mário Vargas Llosa

A teoria da decisão e da preferência contempla diversas metodologias de apoio à tomada de decisão, seja sobre investimentos em projetos ou quaisquer outras implicações da vida profissional. Essas ferramentas, em geral, demandam etapas lógicas e ações sequenciadas, de tal sorte que o decisor tenha diante de si as alternativas de menores riscos. Em um processo decisório, é imprescindível avaliar se todos os passos que antecedem a decisão final foram suficientemente explorados, ainda que tal estratégia não seja uma garantia de sucesso.

Em um ambiente de variáveis técnicas e econômicas bem definidas, a prática usual é adotar uma regra simples para o problema de decisão. Como primeira tarefa, calcula-se o valor presente do fluxo de caixa dos retornos gerados pelo projeto (receitas) e, em seguida, calcula-se o valor presente do fluxo de caixa dos valores requeridos para desenvolver e manter o projeto (dispêndios). Finalmente, determina-se a diferença entre os dois valores, obtendo-se o valor presente líquido do projeto, o VPL. Caso positivo, segue-se em frente com o investimento.

Como não há uma "bola de cristal" que possa prever o resultado de um projeto, pode-se ao menos atentar para algumas metodologias que ajudam o decisor, expondo-o ao menor risco possível. Um bom analista, antes de recomendar uma decisão importante, irá explorar as ferramentas disponíveis na corporação, não se pautando apenas no VPL do projeto, mesmo sendo esse o critério mais recomendado (ver Figura 5.1).



Figura 5.1 – Metodologias de apoio à tomada de decisão de investimento (indústria do petróleo).

5.1. Risco e Incerteza

Alguns autores têm procurado distinguir o termo risco do termo incerteza. A abordagem clássica, de Knight (1921), refere-se ao risco quando a possibilidade de um evento é representada por uma probabilidade conhecida, ao passo que a incerteza surge quando a chance de ocorrência de um evento tem probabilidade desconhecida ou indeterminada. O termo incerteza tem uma conotação mais neutra, sendo apropriado para um estudo econômico. Já o risco tem, frequentemente, uma conotação negativa, enfatizando o lado indesejável da incerteza.

Outro modo de distinguir é associar o termo incerteza à medida da variância e o termo risco à volatilidade, que é a razão entre o desvio padrão e o valor esperado. Já para alguns autores, o elemento risco nunca está dissociado de questões concernentes à incerteza. Por esse motivo, costumam não distinguir risco de incerteza, usando os dois termos indiferentemente para expressar ideias semelhantes.

A fim de distinguir risco e incerteza na prática, considere dois projetos A e B para uma taxa mínima de atratividade de 10%. Admita que a taxa interna de retorno do projeto A varie entre 20% e 30% e do projeto B oscile entre 5% e 15%, conforme ilustrado na Figura 5.2.

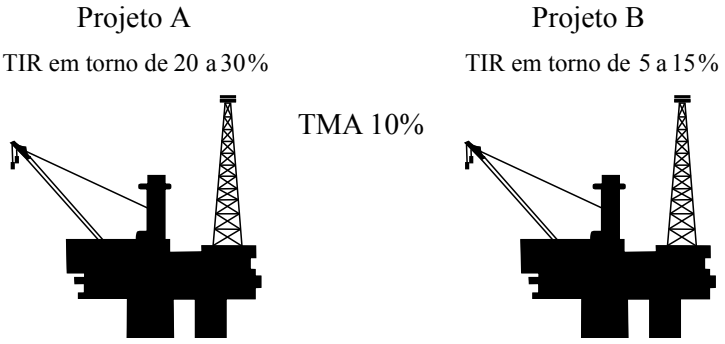


Figura 5.2 – Diferença prática entre risco e incerteza.

Note que em ambos os projetos existe um grau de incerteza, um range de variação da TIR de 10%. Não obstante, há uma distinção importante entre os dois projetos. O projeto A, mesmo na pior das hipóteses, apresenta uma taxa de retorno superior à taxa mínima de atratividade, ao passo que o projeto B, ocorrendo a pior hipótese, gera um retorno indesejável para a empresa, menor que a taxa mínima de atratividade. Assim, o projeto B envolve incerteza e risco, enquanto o projeto A envolve apenas incerteza. Pode-se dizer que todo risco envolve incerteza, mas a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem toda incerteza envolve risco.

5.2. Fontes de Incertezas

Em princípio, todas as variáveis de mercado são fontes de incertezas econômicas. Exemplos são as taxas de desconto, a demanda, a oferta etc. Outras fontes são os custos, especialmente os de bens de capital, cuja demanda acompanha o preço dos produtos, como os custos de sonda de perfuração e plataforma de produção de petróleo em períodos de valorização da *commodity*.

Outro tipo de incerteza é chamado de incerteza técnica, como por exemplo, projetos que utilizam novas tecnologias, em que a incerteza está presente não só no custo de aquisição, como também no custo de instalação e manutenção. Outros exemplos de incertezas técnicas são o volume de hidrocarbonetos de uma jazida, a produção de óleo e gás, o custo ou o benefício de um projeto de P&D ou o grau de aceitação do público quanto ao lançamento de um novo produto.

Outra fonte de incerteza clássica na indústria de extração mineral diz respeito à geologia. Esta pode ser classificada também como incerteza técnica, tais como as feições geológicas (lito fácies), a continuidade hidráulica e as propriedades da rocha e do fluido (permeabilidade, porosidade, pressão capilar etc.).

Além dessas fontes de incertezas, existem as de natureza política. Em muitos países, por exemplo, a atividade de petróleo é exercida por empresas estatais que, em geral, têm direção escolhida segundo critérios políticos alinhados com o grupo que comanda o país. Nesses casos, o risco das decisões em projetos de grande repercussão, tomadas sem a devida análise econômica, é maior. Nos países com instituições democráticas consolidadas e que prezam pela economia de mercado, essas incertezas tendem a não repercutir tanto quanto naqueles onde esses princípios não são valorizados.

Além da política de governo, há incertezas quanto ao aparato jurídico-fiscal adotado em cada país, sobretudo os tributos exigíveis. Como se sabe, embora mudanças de leis sejam sempre necessárias de tempos

em tempos, a alta frequência de decretos, normas e alterações no arcabouço de regulação, reflete insegurança jurídica e é levada em consideração nos grandes investimentos.

Outras incertezas derivadas da política de governo são as greves dos trabalhadores, a política salarial, os conflitos internos, guerras etc. Ainda relacionadas às leis, existem as incertezas de ordem ambiental. As exigências legais de proteção ambiental são importantes para qualquer análise de projeto de produção de petróleo. Por fim, as incertezas ambientais não controláveis, como as catástrofes e o clima. Como se vê, a lista é ampla, o que dificulta mensurar, ou mesmo prever, minimamente, o impacto de cada fonte de incerteza no resultado do projeto.

5.3. Metodologias

As primeiras sistematizações para o problema da decisão e da preferência foram propostas por Luce e Raiffa (1957), Pratt (1964), Howard (1966), Keeney e Raiffa (1976), Cozzolino (1977b) e Ross (1978), dentre outros. Nessas sistematizações, tais autores valeram-se dos volumes publicados por Neumann e Morgenstern (1944), Wald (1947, 1950) e Savage (1954), como atesta Raiffa (2002) em um depoimento pessoal de como a teoria da decisão e da preferência iniciou e evoluiu.

São muitas as metodologias que abordam os riscos e as incertezas dos investimentos em projetos, em geral difíceis de serem estruturados para o mundo real. Galli *et al.* (1999), por exemplo, cita três abordagens metodológicas em seu trabalho de comparação:

- Árvore de decisão.
- Simulação Monte Carlo.
- Opções reais[46].

A primeira, sistematizada por Luce e Raiffa, considera as alternativas de VPL, ou qualquer outro indicador de retorno do projeto, com suas chances de ocorrência. Essa metodologia explora o teorema de Bayes para maximizar os retornos, determinando o valor da informação e o valor da flexibilidade do projeto, VDI e VDF, respectivamente.

A segunda, simulação Monte Carlo, desenvolvida por John von Neumann e Stanislaw Ulam durante a II Guerra Mundial, mais do que uma metodologia, é uma ferramenta que se revela poderosa nos processos decisórios. A técnica Monte Carlo, aplicada para decisão em projetos, pode ser resumida em cinco etapas:

- Construção de um modelo preditivo identificando tanto a variável dependente a ser prevista, que em geral é algum dos indicadores de retorno, como as variáveis independentes (variáveis de predição).
- Identificação das variáveis independentes relevantes, ou seja, aquelas que causam impactos significativos nos indicadores de retorno.
- Avaliação da existência de correlações entre as variáveis relevantes.
- Estimação das distribuições de probabilidade das variáveis independentes, utilizando-se de dados históricos ou, na falta destes, determinando um intervalo de valores possíveis e atribuindo probabilidades de ocorrência para cada uma das variáveis.
- Simulações para obtenção de resultados do modelo preditivo, combinando valores aleatórios das variáveis independentes, mas respeitando suas correlações, se houver. As simulações devem ser realizadas diversas vezes de modo a gerar uma função de probabilidade do indicador de retorno do projeto, o *payoff*.

[46] A teoria das opções reais é explorada em detalhes no **Capítulo 7**.

Já a terceira metodologia, opções reais, tornou-se popular com os trabalhos de Dixit e Pindyck (1994), Trigeorgis (1995) e Copeland e Antikarov (2001), a qual considera que um projeto real é similar a uma opção financeira. Ou seja, é um direito do investidor realizar o projeto, e não uma obrigação imediata, podendo escolher postergá-lo, expandir, reduzir ou abandoná-lo a um custo predeterminado, chamado de preço de exercício, o qual é exercido durante certo tempo, denominado de período de exercício.

Em todas essas metodologias o ponto de convergência é o tratamento estocástico dado às variáveis independentes do fluxo de caixa do projeto, uma vez que não podem ser estimadas com exatidão. É importante ressaltar que, em se tratando de variáveis econômicas, as metodologias se tornam mais consistentes se as variáveis independentes forem tratadas com modelos estocásticos capazes de evidenciar fatos estilizados[47] da economia.

5.4. Processo Decisório

Um processo decisório básico, recomendado para os investimentos em projetos de produção de petróleo sob condições de incertezas, é composto das seguintes etapas:

- Identificar as oportunidades durante a elaboração e duração do projeto.
- Avaliar cada alternativa – a prática mostra que o tempo investido na avaliação é mais importante que a escolha da ferramenta ou do método de solução do problema.
- Quantificar as incertezas das variáveis de interesse do fluxo de caixa – provavelmente a etapa mais difícil em um processo de decisão. Recomenda-se a cooperação de especialistas com o apoio de *softwares* na parametrização das diversas distribuições de frequência das variáveis relevantes.
- Calcular o valor ou a utilidade esperada de cada alternativa – a árvore de decisão e a simulação Monte Carlo são algumas das ferramentas tradicionais[48]. O método utilizado é o valor ou a utilidade média esperada das diversas alternativas com suas respectivas chances de ocorrência.
- Desenvolver um modelo de decisão – utilizar árvores de decisão, diagramas ou desenvolver outra ferramenta qualquer que possibilite equacionar corretamente o problema.
- Reavaliar o problema e decidir pela melhor alternativa – é importante reavaliar se o fluxo de caixa está suficientemente detalhado para o nível de importância da decisão a ser tomada.
- Realizar uma análise após a decisão tomada – tão importante quanto analisar os cenários e as alternativas antes de se tomar uma decisão, é reavaliar a decisão já de posse dos resultados (lições aprendidas).

Em qualquer etapa do processo decisório, a despeito de excelentes *softwares* e sofisticadas metodologias, o risco intrínseco não é reduzido. Não obstante, é possível minimizar a exposição do decisor ao risco com métodos quantitativos e metodologias eficazes, resultando em ganho para a empresa.

5.5. Árvore de Decisão

A árvore de decisão é uma ferramenta útil para tratar um problema, seja a respeito de um projeto de produção de petróleo ou um processo qualquer que demande uma decisão. Tal ferramenta facilita a comunicação do problema, podendo resultar em menor esforço de convencimento dos demais membros da equipe envolvida no processo decisório.

Uma árvore de decisão consiste em nós relativos às decisões, chances de ocorrência e pontos terminais conectados por ramos. Os três tipos de nós de uma árvore são:

[47] Um fato estilizado é uma aproximação teórica de um fenômeno observado empiricamente.

[48] Alguns métodos de planejamento experimental são úteis na simulação Monte Carlo: hipercubo latino, Plackett-Burman, Box-Wilson, Box-Behnken etc.

- Nó de decisão – é representado por um quadrado e são ações controladas por quem toma decisões.
- Nó de chance de ocorrência – representado por um círculo e são variáveis ou ações não controladas por quem toma decisões.
- Nó terminal – representada por um ramo não conectado. São pontos finais onde os valores são indicados.

Qualquer problema, independentemente de sua complexidade, pode ser analisado com uma árvore de decisão. As possibilidades de combinação entre nós de decisão, chances de ocorrências e nós terminais são infinitas. A depender do problema, o desenho da árvore é estruturado para permitir que sejam adicionadas algumas informações nos ramos da árvore, de forma a facilitar o entendimento do problema a ser analisado, como por exemplo, valores de aditivos de projetos, tempo, recursos de capital, custos, restrições etc.

Por convenção, uma árvore de decisão é construída da esquerda para a direita ou de cima para baixo. As probabilidades em cada ramo representam as chances de ocorrência a partir de um ramo anterior de um nó de decisão. Os valores indicados nos terminais da árvore ou em qualquer ramo representam os valores presentes na data do nó de decisão inicial.

Uma árvore de decisão é mais bem explicada por meio de um exemplo. Para tanto, considere a compra de um posto de combustível em uma pequena cidade e admita três situações possíveis para uma variável de mercado que impacta fortemente o lucro do posto, a saber:

- Alta demanda, implicando elevado lucro.
- Média demanda, resultando pequeno lucro.
- Baixa demanda, revelando prejuízo.

Considere também que, diante do conhecimento do mercado, se possam atribuir probabilidades e valores monetários para os benefícios em cada situação, conforme a Tabela 5.1 a seguir:

Tabela 5.1 – Informações sobre o posto de combustível

Eventos	Probabilidade	Benefício
Alta demanda	10%	+$200
Média demanda	30%	+$100
Baixa demanda	60%	–$50

Com esses dados, o diagrama da árvore de decisão para o problema do posto de combustível seria algo equivalente ao indicado na Figura 5.3 a seguir.

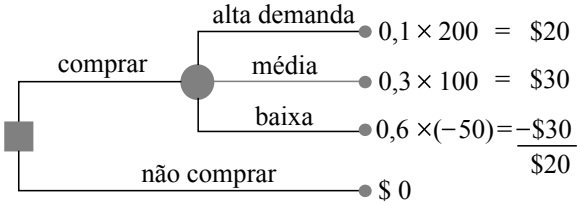


Figura 5.3 – Árvore de decisão – Posto de combustível.

O ramo "não comprar" tem valor $0 e o ramo "comprar" conduz a um VME positivo igual a $20. Assim, a Figura 5.3 pode ser reduzida a uma árvore de decisão de apenas um nó, cuja decisão, nesse caso, é comprar (ver Figura 5.4).

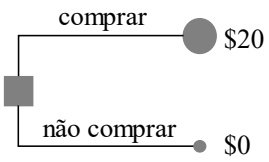


Figura 5.4 – Redução da árvore de decisão da Figura 5.3.

Para a representação gráfica de uma sequência de alternativas, deve-se, primeiramente, definir as variáveis relevantes e seu inter-relacionamento. Essa é a fase determinística, em que se distingue *variáveis de controle* de *variáveis de estado*.

- Variáveis de controle – são aquelas que dependem de quem decide, por exemplo: preço de venda, volumes de vendas etc.
- Variáveis de estado – são aquelas que condicionam fortemente o resultado. Quem decide não tem controle sobre elas, como por exemplo, a variação do dólar, nível de preço, demanda etc. Tais variáveis são chamadas de *estado da natureza*.

Observe outro exemplo mais complexo de uma árvore de decisão relacionada ao estudo para instalação de uma montadora de carro elétrico no mercado brasileiro. O sucesso dependerá da reação dos competidores e da política de imposto do governo. As variáveis de controle são:

- Três níveis de preço – p_1, p_2 e p_3 .
- Dois níveis de produção – Q_1 e Q_2.

Pode-se, por enquanto, representar o problema de decisão conforme o diagrama da Figura 5.5 a seguir:

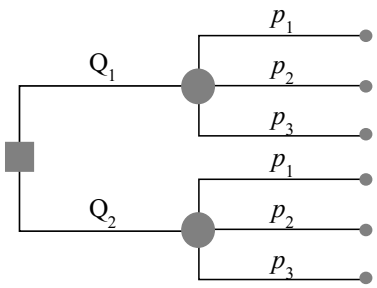


Figura 5.5 – Árvore de decisão parcial – lançamento de um carro elétrico.

As variáveis de controle podem ser combinadas resultando em seis alternativas, conforme a Tabela 5.2 a seguir:

Tabela 5.2 – Alternativas da árvore de decisão – Figura 5.5.

1	2	3	4	5	6
p_1Q_1	p_2Q_1	p_3Q_1	p_1Q_2	p_2Q_2	p_3Q_2

As variáveis de estado são: ação dos concorrentes, onde l = instala montadora semelhante e l' = não instala e decisão do governo, onde x = incentiva com redução de impostos e x' = não incentiva. Essas variáveis de estado podem ser combinadas, resultando em quatro eventos:

- $E_1 = lx$ (concorrente instala montadora e governo incentiva redução de impostos).
- $E_2 = l'x$ (concorrente não instala e governo incentiva).

- $E_3 = lx'$ (concorrente instala e governo não incentiva).
- $E_4 = l'x'$ (concorrente não instala e governo não incentiva).

Combinando as seis alternativas da Tabela 5.2 e os quatro eventos possíveis, chega-se à árvore indicada na Figura 5.6 a seguir:

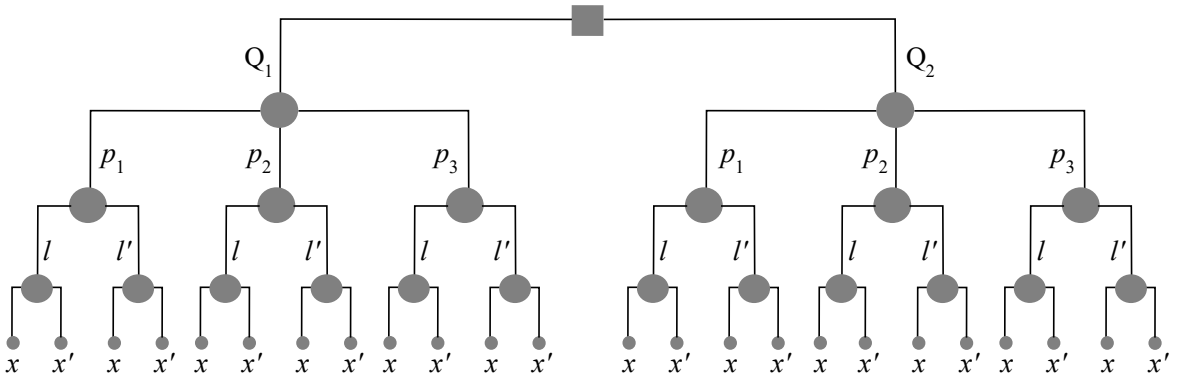


Figura 5.6 – Árvore de decisão – instalação de uma montadora de carro elétrico no mercado brasileiro.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.1 – Considere a instalação de uma pequena refinaria de biocombustível no interior do Ceará, onde se pode escolher produzir Q_1 = 100 mil m³/ano ou Q_2 = 50 mil m³/ano de biocombustível à base de grãos de mamona. As variáveis de estado são a instalação de outra pequena refinaria de biocombustível à base de grãos de soja pelo concorrente e uma política de incentivo do governo com as seguintes probabilidades de ocorrência:

- Concorrente instala refinaria – 20%.
- Governo incentiva – 30%.

Os VPL's dos pontos terminais são: $Q_1lx = 100$, $Q_1lx' = -200$, $Q_1l'x = 200$, $Q_1l'x' = 0$, $Q_2lx = 50$, $Q_2lx' = -5$, $Q_2l'x = 150$ e $Q_2l'x' = 20$.

Solução

De acordo com os valores dos pontos terminais, chega-se a seguinte árvore de decisão conforme a Figura 5.7.

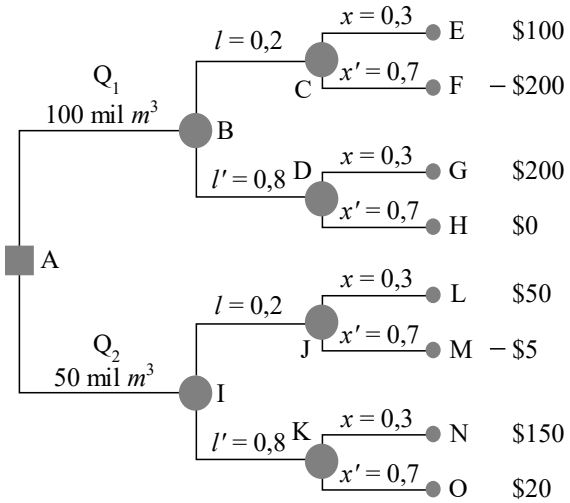


Figura 5.7 – Árvore de decisão – Exemplo 5.1.

Os cálculos para as probabilidades conjuntas e valores monetários esperados nos pontos terminais da árvore estão na Tabela 5.3 a seguir:

Tabela 5.3 – Probabilidades, VPL e VME

Pontos	Probabilidade, *p*	VPL	VME
E	0,3	100	30
F	0,7	−200	−140
G	0,3	200	60
H	0,7	0	0
L	0,3	50	15
M	0,7	−5	−3,5
N	0,3	150	45
O	0,7	20	14

Com os dados da Tabela 5.3, calculam-se os valores esperados dos nós de chance C, D, J e K, resultando:

$$\begin{cases} \text{VME}_\text{C} = 30 - 140 = -110 \\ \text{VME}_\text{D} = 60 + 0 = 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{VME}_\text{J} = 15 - 3{,}5 = 11{,}5 \\ \text{VME}_\text{K} = 45 + 14 = 59 \end{cases} \tag{5.1}$$

Com esses dados determinam-se os valores esperados dos últimos dois nós de chance, B e I, logo,

$$\begin{cases} \text{VME}_\text{B} = 0{,}2(-110) + 0{,}8 \times 60 = 26 \\ \text{VME}_\text{I} = 0{,}2(11{,}5) + 0{,}8 \times 59 = 49{,}5 \end{cases} \tag{5.2}$$

Finalmente, chega-se à seguinte simplificação:

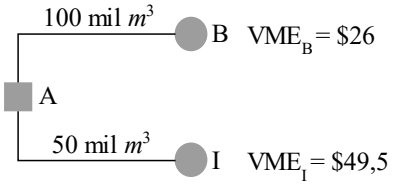


Figura 5.8 – Árvore de decisão final.

A escolha, portanto, deve recair sobre uma produção Q_2 = 50 mil m^3/ano de biocombustível à base de mamona (VME_1 = $49,5), já que essa alternativa apresenta o maior valor monetário esperado.

▪▪▪▪▪▪

5.6. Valor da Informação

A metodologia do valor da informação vem sendo explorada desde a década de 1950, por Marschak (1950) e outros autores. Nos anos 1960, os livros clássicos de Howard (1966) e Raiffa e Keeney (1993) contribuíram com axiomas teóricos e aplicações práticas envolvendo decisões com múltiplos objetivos e técnicas modernas de VDI. Para esse tópico, foram adaptadas algumas notas de aulas do professor Marco Antônio Guimarães Dias, que ministrou o curso de VDI na Petrobras durante um longo tempo.

Inicialmente, é importante ressaltar que o VDI é calculado *ex-ante*, pois busca-se saber se vale a pena investir ou não na informação antes de desembolsar qualquer recurso para obtê-la. Alguns exemplos de aplicação dessa metodologia são:

- Antes de perfurar um poço, é vantajoso investir em aquisição de dados de reservatório (ADR)?
- Compensa investir em um teste de longa duração (TLD)?
- Um levantamento sísmico complementar, ainda que não garanta a informação perfeita, se justifica economicamente antes de realizar a perfuração de um poço?

São questões como essas, ou semelhantes, que a metodologia de VDI busca solucionar. A metodologia do valor da informação avalia o benefício de coletar informação adicional para reduzir ou eliminar incertezas em um contexto de tomada de decisão específico. Existem, portanto, dois tipos clássicos de informação:

- Informação perfeita – quando a informação revela o verdadeiro estado da natureza da variável de interesse (cenário, tamanho de reserva etc.). Trata-se da informação mais valiosa que se pode obter.
- Informação imperfeita – quando a informação reduz a incerteza. É o tipo de informação que gera distribuições posteriores com variância média menor que a variância da distribuição a priori.

5.6.1. Informação perfeita

Todas as empresas de petróleo gostariam de encontrar um meio para saber o resultado prévio da exploração de um poço de petróleo. Tal informação seria bastante valiosa, já que ela é perfeita. Esse valor, o da informação perfeita, pode ser calculado pelo método do valor esperado, conforme é mostrado no exemplo a seguir envolvendo o conceito de opções reais.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.2 – Admita uma proposta de *contrato de risco* para perfurar um poço de petróleo. Para participar da concorrência desse contrato, deve-se pagar antecipadamente uma quantia no valor de $2. Em caso de desistência, perde-se o valor pago pela opção de concorrer. Se a perfuração resultar em um poço produtor, a empresa terá um lucro líquido igual a $100. Caso contrário, isto é, se a perfuração resultar em um poço seco, o prejuízo será de $20. As informações geológicas estimam que exista 40% de chance de se encontrar petróleo.

Solução

O primeiro passo é definir um diagrama com as informações disponíveis (ver Figura 5.9 a seguir).

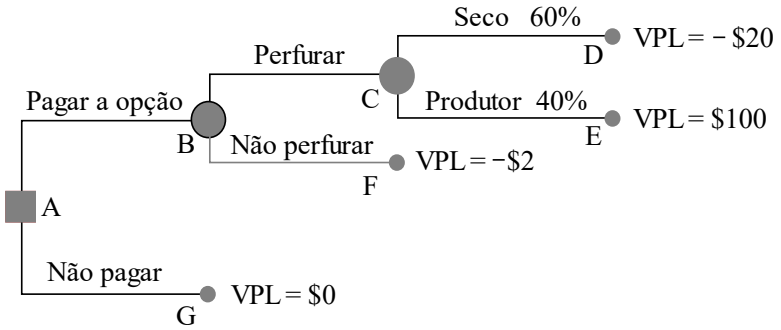


Figura 5.9 – Árvore de decisão – Exemplo 5.2.

Os pontos terminais do diagrama da Figura 5.9 apresentam os seguintes resultados:

- G – não pagar a opção, resultando um valor monetário nulo $0.
- F – pagar a opção e desistir de furar, resultando em prejuízo de –$2.
- D – poço seco, implicando um prejuízo de –$20, já incluído o pagamento da opção.
- E – poço produtor, resultando lucro líquido de $100, já incluído o pagamento da opção.

De acordo com os dados, o VME do ponto C resulta

$$\text{VME}_\text{C} = 0{,}6 \times (-20) + 0{,}4 \times 100 = 28 \tag{5.3}$$

O nó de decisão B pode ser reduzido, então, para o seguinte diagrama:

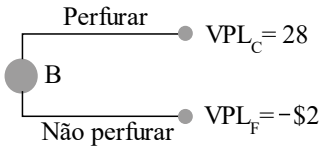


Figura 5.10 – Nó de decisão B do diagrama da Figura 5.9.

Optando pelo maior valor monetário entre C e F, o nó A se reduz para:

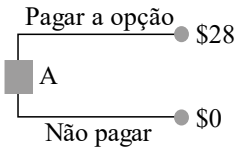


Figura 5.11 – Nó de decisão A do diagrama da Figura 5.9.

A melhor decisão, portanto, é pagar a opção e perfurar o poço, arriscando encontrar petróleo. Pode-se então fazer a seguinte pergunta: qual seria o preço que a empresa estaria disposta a pagar pela informação perfeita, aquela que indicaria se tem ou não petróleo? Se a informação perfeita indicar a presença de petróleo, a empresa logicamente decidirá perfurar. Caso contrário, a empresa não pagaria nem a opção. Assim, o diagrama de decisão com a informação perfeita seria o seguinte:

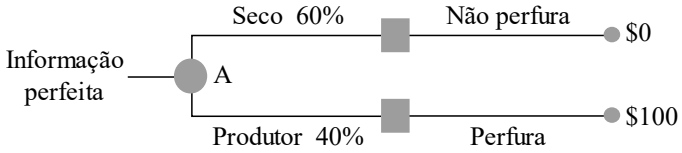


Figura 5.12 – Diagrama com informação perfeita.

O valor monetário esperado no ponto A resultaria:

$$\text{VME}_\text{A} = 0{,}4 \times 100 + 0{,}6 \times 0 = \$40 \tag{5.4}$$

O valor esperado da decisão teria um acréscimo de $12, passando de $28 para $40. Esse acréscimo devido à informação perfeita corresponde exatamente ao valor máximo que a empresa estaria disposta a pagar pelo direito de "ler a bola de cristal". Não faz sentido, pelo critério do VME, pagar qualquer valor da informação perfeita superior a $12, pois a vantagem advinda dela não existiria.

▪▪▪▪▪▪

5.6.2. Informação imperfeita

No mundo dos negócios, a "bola de cristal" não está disponível, mas, de uma maneira geral, se conseguem informações imperfeitas mais ou menos precisas. Suponha, com base no Exemplo 5.2, que a empresa

resolva comprar informações sobre a área a ser perfurada com levantamento sísmico na região. Esse levantamento pode indicar maior ou menor chance de se encontrar petróleo com um nível de erro estimado. Admita também que a confiabilidade no levantamento sísmico seja possível de se estimar, resultando, por exemplo, nos valores da Tabela 5.4 a seguir.

Tabela 5.4 – Confiabilidade da informação sísmica

Estado da natureza	Sísmica indica	
	Tem petróleo	Não tem petróleo
Tem petróleo	90%	10%
Não tem petróleo	30%	70%

A Tabela 5.4 indica que, se realmente tiver petróleo o levantamento sísmico tem 90% de chance de confirmar e, se não houver petróleo, a confiabilidade cai para 70%. Assim, o diagrama deve ser ampliado para:

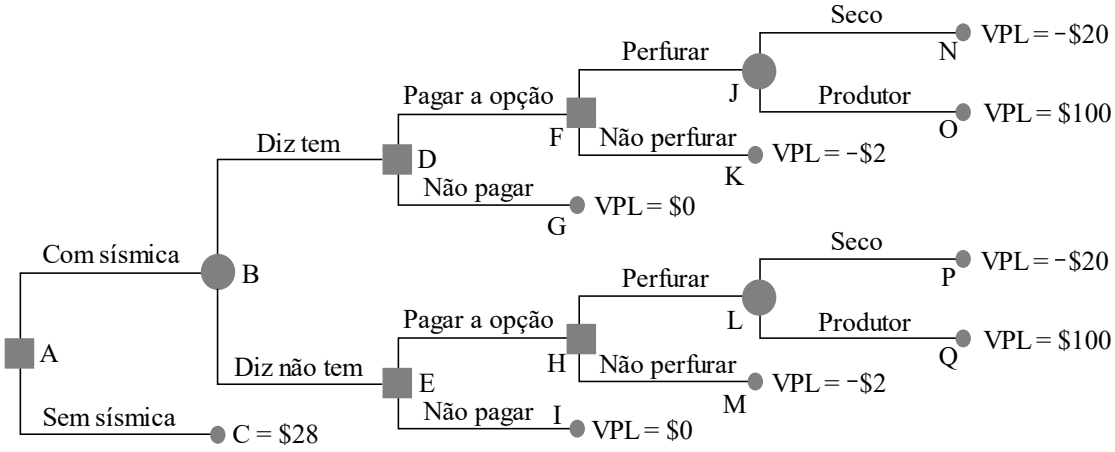


Figura 5.13 – Diagrama ampliado com informação imperfeita.

Como se pode observar, as probabilidades correspondentes ao levantamento sísmico foram consideradas (tem óleo ou não tem). É necessário, também, considerar as *probabilidades condicionais*, como ter ou não ter petróleo no caso de a sísmica afirmar "tem ou não tem petróleo". Aplica-se, neste caso, o teorema de Bayes.

O teorema de Bayes mostra a relação entre a probabilidade condicional e sua inversa. É um teorema utilizado quando se deseja conhecer a probabilidade, por exemplo, de ocorrer A dado que B tenha ocorrido ou quando se quer determinar a probabilidade de ocorrer B dado que A tenha ocorrido. Esse teorema é também um tipo de inferência estatística, em que as incertezas são modificadas periodicamente após observações de novos dados ou resultados.

A estatística bayesiana é utilizada, com frequência, em problemas de decisão de perfuração de poços, seja devido aos resultados de outros poços perfurados ou de informações advindas de novas sondagens das geociências. Para o problema em questão, um modo prático de apresentar essas probabilidades é por meio de um quadro, conforme segue:

Tabela 5.5 – Teorema de Bayes aplicado à informação imperfeita

Estado da natureza	Sísmica indica		Marginais
	tem petróleo	não tem petróleo	
E_1 = tem petróleo	0,9×40 = 36	40 – 36 = 4	40
E_2 = não tem petróleo	0,3×60 = 18	60 – 18 = 42	60
Marginais	54	46	100

Assim, a probabilidade de a sísmica dizer "tem petróleo" é de 54%, e o complemento 46% é a probabilidade de dizer "não tem petróleo". Assumindo S = sísmica diz tem petróleo e $\bar{S}$ = sísmica diz não tem petróleo, resulta:

- Probabilidade de ter petróleo se a sísmica diz que tem: $p(E_1/S) = 36/54 = 0{,}67$; $p(E_2/S) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$.
- Probabilidade de ter petróleo se a sísmica diz que não tem: $p(E_1/S) = 4/46 = 0{,}09$; $p(E_2/S) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Considerando a informação imperfeita da sísmica, resulta a árvore de decisão indicada na Figura 5.14 a seguir:

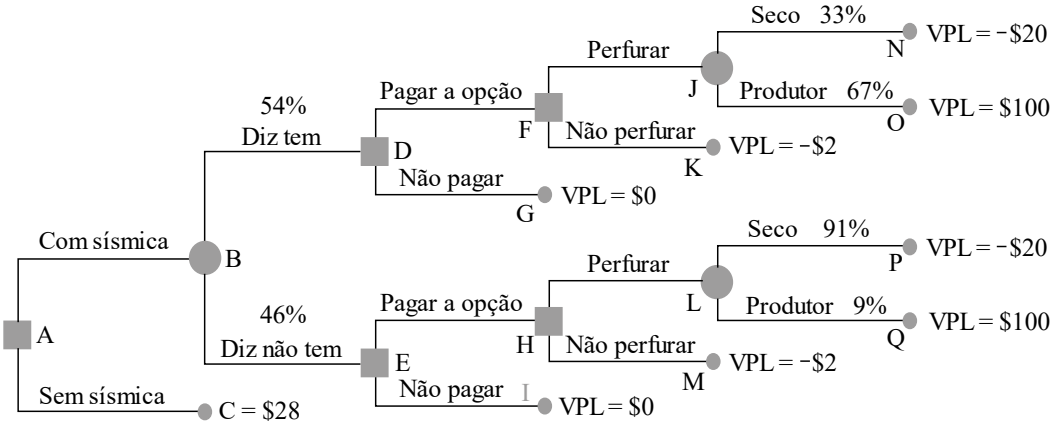


Figura 5.14 – Diagrama com informação imperfeita da sísmica.

Seguindo a metodologia, o valor esperado para o ponto J da Figura 5.14 é:

$$\mathrm{VME_J} = 0{,}33(-20) + 0{,}67 \times 100 = \$60 \tag{5.5}$$

Do confronto entre os valores monetários dos pontos J = $60 e K = –2, deve-se levar para o nó F o maior desses dois valores, ou seja, $\mathrm{VMF_F} = \$60$. O valor monetário do ponto G é nulo. Do confronto entre os pontos F e G resulta o valor monetário do ponto D, o próprio valor do ponto F, ou seja, $\mathrm{VME_D} = 60$.

Segue-se então o confronto dos pontos D e E. Como o ponto E pertence ao ramo inferior da árvore, isso obriga primeiro resolvê-lo. Calcula-se, então, o valor esperado do ponto L, ou seja:

$$\mathrm{VME_L} = 0{,}91(-20) + 0{,}09 \times 100 = \$ - 9 \tag{5.6}$$

Do confronto entre o ponto L e M, resulta

$$\mathrm{VME_L} = -9 < \mathrm{VME_M} = -2 \tag{5.7}$$

Leva-se, portanto, para o ponto H o maior desses valores, ou seja –$2 (não perfurar). Diante do valor esperado do ponto I ser nulo, portanto, maior que –$2, o valor para o ponto E resulta nulo, ou seja, $\mathrm{VME_E} = 0$. Agora se pode calcular o valor monetário esperado do ponto B e confrontá-lo com o ponto C.

$$\mathrm{VME_B} = 0{,}54 \times 60 + 0{,}46 \times 0 = \$32 \tag{5.8}$$

O valor monetário do ponto B é maior do que o valor monetário esperado para o ponto C, cujo $\mathrm{VME_C} = 28$. O valor monetário esperado do ponto C corresponde ao ramo "não comprar o levantamento sísmico", calculado anteriormente. Pode-se então chegar finalmente ao ponto de origem A com o maior valor monetário entre os pontos B = $32 e C = $28, resultando $\mathrm{VME_A} = 32$.

Observe que, neste caso, em que foi utilizado o levantamento sísmico (informação imperfeita), o valor esperado passou a ser de $32, superior ao valor calculado sem a informação adicional, que é de $28. A diferença 32 – 28 = $4 representa o valor máximo que a empresa deverá pagar pela informação imperfeita.

5.7. VDI Aplicada em Projeto de Produção

Neste item, de forma simplificada, é aplicada a metodologia do VDI em um exemplo desenvolvido pelo professor Marco Antônio sobre um projeto de desenvolvimento da produção. A decisão a ser tomada diz respeito à capacidade da de ser alocada para o desenvolvimento de uma reserva petrolífera. No caso em questão, têm-se as probabilidades do estado da natureza quanto ao tamanho das reservas (pequena, intermediária e grande), e os respectivos VPLs de projetos da UEP (pequena, intermediária ou grande) para cada cenário de reserva. A Tabela 5.6 a seguir resume esses valores.

Tabela 5.6 – VPL's de projetos de produção de uma UEP para cada cenário de reserva ($ MM)

Tamanho da reserva	Chance	VPL de cada alternativa para cada cenário de reserva		
		UEP grande	UEP intermediária	UEP pequena
Reserva grande	30%	420	300	200
Reserva intermediária	40%	100	180	100
Reserva pequena	30%	–20	40	80
	E(VPL) ou VME	160	174	124

Observe que, sem informação adicional, o maior VME é de $174 MM, ou seja

$$\text{VME} = 0{,}3 \times 300 + 0{,}4 \times 180 + 0{,}3 \times 40 = 174 \tag{5.9}$$

A melhor decisão é, portanto, alocar uma UEP intermediária. Agora, com informação adicional quanto ao tamanho da reserva, a decisão ótima dependerá da informação revelada. Por exemplo, se a informação revelada for de reserva grande, a decisão ótima é alocar uma UEP grande (VPL igual a $420 MM). Se a informação revelada for de reserva intermediária, a decisão ótima recai sobre uma UEP intermediária (VPL igual a $180 MM) e, se reserva pequena, uma UEP pequena (VPL igual a $80 MM).

A questão, no entanto, é que não se sabe qual informação será revelada. É possível, entretanto, determinar qual o valor máximo que se pode pagar por ela, sabendo a priori as probabilidades de estado da natureza quanto ao tamanho da reserva. Em outras palavras, o valor médio esperado com a informação perfeita é

$$\text{VME} = 0{,}3 \times 420 + 0{,}4 \times 180 + 0{,}3 \times 80 = 222 \tag{5.10}$$

Note que o VME é de $222 MM se a informação revelada for perfeita. Para a informação perfeita, nesse caso, seu valor máximo é de 222 – 174 = $48 MM. Se o custo para obter a informação perfeita for, por exemplo, de $20 MM, seu benefício, portanto, será

$$\text{Benefício} = \overbrace{\text{Valor da informação perfeita}}^{\$\,48} - \overbrace{\text{custo de obtenção}}^{\$\,20} = \$\,28 \tag{5.11}$$

No entanto, uma informação enseja sempre algum grau de confiabilidade, que pode ser alto, médio ou baixo. Supondo que a confiabilidade da informação seja conforme a indicada a seguir.

Tabela 5.7 – Confiabilidade da informação

Tamanho da reserva	Chance	Confiança	VPL de cada alternativa para cada cenário de reserva		
			UEP grande	UEP intermediária	UEP pequena
Reserva grande	30%	70% (RG)	420	300	200
		20% (RI)			
		10% (RP)			
Reserva intermediária	40%	15% (RG)	100	180	100
		70% (RI)			
		15% (RP)			
Reserva pequena	30%	10% (RG)	–20	40	80
		20% (RI)			
		70% (RP)			

De acordo com a Tabela 5.7, a confiança da informação é tal que, para uma reserva grande, a informação confirma que, de fato, é grande em 70% das vezes; diz ser intermediária em 20% das vezes e pequena em 10% das vezes. Sabe-se, a priori, o estado da natureza quanto ao tamanho das reservas, ou seja, 30% delas são grandes, 40% são intermediárias e 30% são pequenas.

Note que, ao analisar uma reserva para emitir um laudo informativo sobre o volume, não se conhece o tamanho dela. Pode-se então obter as probabilidades a posteriori de posse da informação, ainda que imperfeita. Em outras palavras, pode-se obter as probabilidades condicionadas à informação. Para tanto, recomenda-se o quadro auxiliar a seguir.

Tabela 5.8 – Quadro auxiliar de probabilidades condicionais e marginais

	Diz RG	Diz RI	Diz RP	Marginais
RG	0,70×30 = 21	0,20×30 = 6	0,10×30 = 3	30
RI	0,15×40 = 6	0,70×40 = 28	0,15×40 = 6	40
RP	0,10×30 = 3	0,20×30 = 6	0,70×30 = 21	30
Marginais	30	40	30	100

De acordo com a última coluna da Tabela 5.8, em 100 acumulações, 30 delas são reservas grandes, 40 são reservas intermediárias e 30 são pequenas. Com base na Tabela 5.7, das 30 acumulações de reservas grandes, a informação dirá que, de fato, é grande em 70% das vezes, ou seja, 0,70×30 = 21 vezes.

Das 40 acumulações de reservas intermediárias, a informação dirá que a reserva é grande em 15% das vezes, ou seja, 0,15×40 = seis vezes, e das 30 acumulações de reservas pequenas a informação dirá que a reserva é grande em 10% das vezes, ou seja, 0,10×30 = três vezes.

Com isso, determinam-se as probabilidades condicionadas à informação. Por exemplo, as probabilidades de uma reserva ser grande, intermediária ou pequena, dado que a informação diz ser grande são, respectivamente,

$$p(\text{RG}|\text{RG}) = \frac{21}{30} = 0{,}70 \quad p(\text{RI}|\text{RG}) = \frac{6}{30} = 0{,}20 \quad p(\text{RP}|\text{RG}) = \frac{3}{30} = 0{,}10 \tag{5.12}$$

Por outro lado, as probabilidades de uma reserva ser grande, intermediária ou pequena, dado que a informação diz ser intermediária são, respectivamente,

$$p(\text{RG}|\text{RI}) = \frac{6}{40} = 0{,}15 \qquad p(\text{RI}|\text{RI}) = \frac{28}{40} = 0{,}70 \qquad p(\text{RP}|\text{RI}) = \frac{6}{40} = 0{,}15 \tag{5.13}$$

Por fim, as probabilidades de uma reserva ser grande, intermediária ou pequena, dado que a informação diz ser pequena são, respectivamente,

$$p(\text{RG}|\text{RP}) = \frac{3}{30} = 0{,}10 \qquad p(\text{RI}|\text{RP}) = \frac{6}{30} = 0{,}20 \qquad p(\text{RP}|\text{RP}) = \frac{21}{30} = 0{,}70 \tag{5.14}$$

Como a decisão é *ex-ante*, é necessário conhecer o VME de cada alternativa de UEP. Ainda com base na Tabela 5.7, para o cenário de uma reserva grande, o VME de uma UEP grande com informação é de

$$\text{VME}_{\text{UEP(G)}} = 0{,}70 \times 420 + 0{,}20 \times 100 + 0{,}10 \times (-20) = 312 \tag{5.15}$$

Para o cenário de uma reserva intermediária, o VME de uma UEP grande com informação é de

$$\text{VME}_{\text{UEP(G)}} = 0{,}15 \times 420 + 0{,}70 \times 100 + 0{,}15 \times (-20) = 130 \tag{5.16}$$

E para o cenário de uma reserva pequena, o VME de uma UEP grande com informação é de

$$\text{VME}_{\text{UEP(G)}} = 0{,}10 \times 420 + 0{,}20 \times 100 + 0{,}70 \times (-20) = 48 \tag{5.17}$$

Fazendo o mesmo mecanismo para os demais tamanhos de UEP, resultam os VMEs indicados na Tabela 5.9 a seguir:

Tabela 5.9 – VMEs de projetos para cada cenário de reserva com informação ($ MM)

Tamanho da reserva	Chance	VME de cada alternativa em cada cenário de reserva		
		UEP grande	UEP intermediária	UEP pequena
Reserva grande	30%	312	250	168
Reserva intermediária	40%	130	177	112
Reserva pequena	30%	48	94	96

Portanto, com informação, ainda que imperfeita, o VME final é de:

$$\text{VME} = 0{,}3 \times 312 + 0{,}4 \times 177 + 0{,}3 \times 96 = \$193 \text{ MM} \tag{5.18}$$

Nesse caso, o valor da informação imperfeita é de 193 – 174 = $19 MM. Logo, o benefício resulta:

$$\text{Benefício} = \overbrace{\text{Valor da informação imperfeita}}^{\$\,19} - \overbrace{\text{custo de obtenção}}^{\$\,20} = -\$\,1 \text{ MM} \tag{5.19}$$

É claro que, em tese, o custo da informação imperfeita é sempre menor que a informação perfeita, já que o VME do projeto com informação perfeita é também maior, $222 MM contra $193 MM.

5.7.1. Distribuição a priori e a posteriori

É importante distinguir, na aplicação da metodologia de VDI, as distribuições das variáveis de interesse antes e depois de obtida a informação. Assim, têm-se as seguintes convenções:

- Distribuição a priori – representa, em forma de distribuição de probabilidades, todo o conhecimento inicial que o tomador de decisão tem de uma variável aleatória.

- Distribuição a posteriori – é a distribuição atualizada com a nova informação. Ela expressa o que é conhecido da variável depois de considerar o dado informado.

No caso da informação perfeita, a distribuição a priori somada à informação revela o cenário verdadeiro. Se a informação é imperfeita, segue que a distribuição a priori somada à informação resulta uma distribuição a posteriori. A propriedade é a de que a informação sempre reduz, ou pelo menos não aumenta, a variância média das distribuições posteriores. No entanto, algumas distribuições a posteriori podem ter variâncias maiores do que a da distribuição a priori (a média que é menor).

5.7.2. Aplicação do VDI

Um procedimento prático para calcular o VDI é dividi-lo em duas etapas. Primeiro se calcula o valor da informação perfeita e depois aplica-se um fator de penalidade baseado em levantamentos estatísticos para compensar o fato de a informação ser imperfeita. Desse valor se debita o custo de obtenção da informação, e assim se obtém o seu valor líquido. Se esse valor for positivo, o investimento em informação é recomendado. Se negativo ou próximo de zero, é melhor não investir. Se houver mais de uma alternativa de investimento em informação, aquela que resultar em maior valor líquido da informação, desde que positivo, deve ser a alternativa recomendada.

O VPL de um projeto de desenvolvimento da produção sem a informação é o valor médio esperado da decisão a priori. Esse é o valor esperado do VPL da alternativa caso não se invista em informação e, caso o VPL esperado seja positivo, investe-se no desenvolvimento do campo. Caso o VPL esperado seja negativo, deve-se usar o valor zero para essa opção. Portanto,

$$\mathrm{VME}_{a\ priori} = \max[\mathrm{E}(\mathrm{VPL}_{sem\ informação}), 0] \tag{5.20}$$

Com efeito, sem informação e como não se sabe o cenário real, deve-se usar a alternativa de desenvolvimento que maximiza o valor esperado. Na falta de um estudo específico de alternativa ótima, sugere-se usar o cenário médio da distribuição a priori para o desenvolvimento, pois o valor esperado minimiza o erro do dimensionamento do sistema de produção. Assim procedendo, o erro é menor em termos econômicos para todos os cenários diferentes do cenário médio. Em um cenário favorável, o sistema é restrito, pois o investimento é aquém do ótimo, enquanto em um cenário desfavorável, o sistema é superdimensionado, uma vez que o investimento é além do ótimo.

5.7.3. Critérios para aplicação do VDI

Para que a informação tenha valor econômico, a oportunidade de investimento em informação deve obedecer a três critérios:

- Relevância – tem de existir a incerteza sobre algum parâmetro que seja importante para a tomada de decisão. Geralmente, quanto maior a incerteza, ou seja, quanto maior a variância da distribuição a priori, maior é o VDI.
- Materialidade – a informação só tem valor se contiver potencial para mudar decisões futuras.
- Economicidade – o benefício da informação tem de superar o custo de adquiri-la.

5.7.4. Medida de aprendizagem

O cálculo da informação perfeita é relativamente simples, mesmo para muitos cenários. O problema é o valor da informação imperfeita. Quando a informação é imperfeita, ela não revela o verdadeiro estado da natureza da variável aleatória, e sim uma distribuição a posteriori ou condicional. No método bayesiano, geralmente são usadas árvores de decisão complexas, resultando em um número elevado de operações mesmo para o caso de três cenários. Além disso, as probabilidades condicionais à informação são calculadas com o

teorema de Bayes, que demandam a parametrização da função probabilidade inversa, a chamada função de verossimilhança, uma medida de confiabilidade da informação.

Esse procedimento, além de difícil, torna quase impossível as auditorias em análises de valor da informação. Dias (2005) propõe uma medida de aprendizagem para representar o *grau de informatividade* (grau de confiança) de uma informação imperfeita, que prescinde da estimativa da função de verossimilhança e não demanda nenhum cálculo de VPL adicional ao que já está disponível com a informação perfeita. Além disso, o problema é simplificado considerando que o VDI é uma função linear dessa medida de aprendizagem.

A ideia é simples. O VDI com informação imperfeita é um valor que está compreendido entre dois extremos, o da informação irrelevante em que o VDI é zero (valor mínimo) e o da informação perfeita, em que o VDI é máximo. Como o cálculo do VDI para informação perfeita é simples, para estimar o VDI da informação imperfeita basta estimar um único parâmetro adicional, que é o valor da medida de aprendizagem. A medida de aprendizagem proposta é a redução percentual esperada de variância de obtida com a informação . Assim, resulta

$$\eta^2(\mathrm{X}|\mathrm{S}) = \frac{\mathrm{Var}(\mathrm{X}) - \mathrm{E}[\mathrm{Var}(\mathrm{X}|\mathrm{S})]}{\mathrm{Var}(\mathrm{X})} \tag{5.21}$$

Mais precisamente, o numerador da Eq. (5.21) expressa a redução absoluta entre a variância a priori e a média das variâncias posteriores com a informação S. Dividindo-se pela variância a priori, a medida de aprendizagem revela a redução percentual da variância. Pode-se provar que o numerador é também igual a Var[E(X|S)] e, portanto, η^2 nunca é negativo. Isso implica que, ainda que haja aumento de alguma variância, a média das variâncias posteriores nunca é maior que a variância a priori.

5.8. Função Utilidade

Historicamente, credita-se a Pascal e Fermat as primeiras proposições sobre a teoria de decisão, em 1654, com argumentos de que todas as decisões deveriam ser baseadas nos valores esperados das alternativas disponíveis, ou seja:

$$decisão \Leftrightarrow \mathrm{E}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \tag{5.22}$$

onde p_i são as probabilidades de ocorrência de cada alternativa a_i. Por exemplo, imagine um jogo de moeda cujo ingresso seja de \$1, em que se paga \$10 na ocorrência de cara e perde-se \$6 na hipótese de ocorrer coroa. O valor médio esperado desse jogo é

$$\mathrm{VME} = 0{,}5 \times 10 + 0{,}5 \times (-6) = 5 - 3 = \$2 \tag{5.23}$$

Tal jogo é atrativo, uma vez que seu valor esperado é positivo e igual a \$2, e mesmo subtraindo o custo, resulta em um valor positivo. O que ocorre na prática, porém, é que nem sempre esse jogo é aceito. Essa decisão, na verdade, envolve outros tipos de variáveis que refletem o risco.

Admita, por exemplo, que o jogo citado seja oferecido a um cidadão que tenha exatamente no seu bolso \$6, e que essa quantia está destinada à compra de um remédio para o filho, que se encontra febril. Tal pessoa pode não aceitar esse jogo porque sua perda em utilidade é maior que seu ganho, apesar de vantajoso sob o aspecto probabilístico. Nota-se, portanto, que o princípio indicado na Eq. (5.22) é frágil como critério para toda e qualquer decisão.

Coube a Bernoulli (1738)[49] demonstrar essa fragilidade propondo a solução do paradoxo de São Petersburg. Esse paradoxo consiste em um jogo em que se lança uma moeda até resultar cara. Se o resultado acontecer

[49] Existem fragmentos publicados por Daniel Bernoulli, ver Bernoulli (1954).

no primeiro lançamento, o jogo paga \$1; se no segundo paga \$2. Se o resultado ocorrer no terceiro lançamento, o jogo paga \$4, e assim por diante. Com efeito, se resultar cara no lançamento n, paga-se o equivalente a 2^{n-1}. Note que a probabilidade de se obter cara no enésimo lançamento de uma moeda confiável é $1/2^n$, ou seja:

$$p(\text{1a. cara no lance } n) = p(\text{coroa no 1}) \times p(\text{coroa no 2}) \times \ldots \times p(\text{cara no lance } n) = \frac{1}{2^n} \tag{5.24}$$

com isso, o valor esperado desse jogo é

$$\text{E}(jogo) = \$1 \times \frac{1}{2} + \$2 \times \frac{1}{4} + \$4 \times \frac{1}{8} + \ldots + \$2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{2} + \ldots = \infty \tag{5.25}$$

O resultado implica, ao menos teoricamente, que qualquer pessoa racional participaria deste jogo independentemente do valor do bilhete, uma vez que o resultado esperado é infinito. No entanto, na prática não é o que ocorre. No primeiro instante em que o bilhete pago não resultar um retorno positivo, o jogador tende a desistir de mais uma tentativa, embora se assim o fizesse indefinidamente, o resultado esperado seria compensador.

Com essa solução, Bernoulli escreveu uma sentença afirmando que "homens prudentes não se pautam invariavelmente pelo princípio da esperança matemática". Assim, Cramer (1728) e Bernoulli (1738) publicaram, mesmo com precária construção axiomática, os primeiros modelos de função utilidade como resultado da solução do paradoxo de São Petersburg. Bernoulli sugeriu que as atitudes e os sentimentos de cada indivíduo em relação às consequências monetárias são diferentes, propondo uma forma de avaliar o jogo com a seguinte expressão:

$$u(jogo) = u(1) \cdot \frac{1}{2} + u(2) \cdot \frac{1}{4} + \ldots + u(2^{n-1}) \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(2^{n-1})}{2^n} \tag{5.26}$$

onde $u(x)$ é a *função utilidade* e x é uma variável aleatória independente. Se a função utilidade $u(\cdot)$ difere de indivíduo para indivíduo, então a utilidade do jogo $u(jogo)$ refletirá valores diferentes, e esses resultados divergirão também da expectativa matemática do jogo.

5.8.1. A teoria utilitarista

A teoria utilitarista foi propagada pelo jurista inglês Bentham (1823), que despertou a curiosidade de economistas em reexaminar a função utilidade indicada por Cramer (1728) e Bernoulli (1738). Somente em 1944, em um trabalho genial, Neumann e Morgenstern (1944)[50] sistematizaram a teoria da decisão com base na função utilidade. Para esses autores, a utilidade esperada de um prospecto, também chamado de jogo ou loteria, é representada por seus possíveis resultados e suas respectivas utilidades. Até então, a teoria da preferência era tratada de modo objetivo e coerente com a visão clássica da probabilidade, que presumia que os indivíduos compartilhavam da mesma percepção de uma distribuição para um dado prospecto. A moderna teoria dos jogos, similar à teoria da decisão, mas com a ressalva de que o custo e o benefício de cada opção dependem da decisão dos competidores e cooperadores, também teve início com os trabalhos de Neumann e Morgenstern (1944).

Uma década depois da primeira publicação de Neumann e Morgenstern (1944), Savage (1954) propôs uma revisão da teoria questionando a objetividade com que a preferência do investidor era tratada, afirmando que ela é uma expressão numérica que indica a propensão por parte de quem toma decisões. Savage (1954) demonstrou que a preferência individual na presença de incerteza pode ser caracterizada por uma utilidade esperada de um prospecto, ou seja:

$$\text{VME}^{\text{A}} \text{ é preferível a } \text{VME}^{\text{B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} u_{inv.}^{\text{A}}(\text{VPL}_i^{\text{A}}) p_i^{\text{A}} > \sum_{j=1}^{n} u_{inv.}^{\text{B}}(\text{VPL}_j^{\text{B}}) p_j^{\text{B}} \tag{5.27}$$

[50] De acordo com Fishburn (1989), a obra de Neumann e Morgenstern (1944) foi popularizada rapidamente com os trabalhos de Marschak (1950), Weldon (1950), Strotz (1953) e Luce e Raiffa (1957).

onde u é a função utilidade do investidor cujo argumento é o VPL do prospecto. Assim, na proposição de Savage, mais abrangente que a de Neumann e Morgenstern, as probabilidades subjetivas e a função utilidade aparecem como um par de preferências individuais, o que permite elaborar tantas curvas de função utilidade quantas são as preferências individuais de cada investidor.

5.8.2. Determinação simplificada de curvas da função utilidade

Um dos trabalhos pioneiros em aplicação da função utilidade na indústria do petróleo foi publicado por Grayson em 1960. Desde então, diversos autores publicaram artigos considerando a preferência das pessoas por dinheiro. Nesse item é apresentado um procedimento simples de von Neumann e Morgenstern (1953), que propuseram um processo de duas etapas para determinar a função utilidade de um decisor.

- Inicialmente se estabelece as utilidades para dois valores monetários quaisquer. A utilidade do evento mais desejável (valor A) tem valor mais alto do que a utilidade do evento menos desejável (valor B). É possível demonstrar que os resultados não dependem dos valores A e B escolhidos nessa etapa.
- A segunda etapa fica para quem decide escolher entre a certeza de um valor monetário (valor C) e um jogo, em que os resultados possíveis são os dois valores monetários A e B.

Para entender melhor o segundo passo, pergunta-se a quem decide se ele prefere a certeza do valor C ou um jogo em que exista a probabilidade de ganhar A e a probabilidade (1 - p) de perder B. Tentam-se vários valores de p até achar aquele ao qual o entrevistado é indiferente entre a certeza de C e o jogo. Essa deve ser a utilidade esperada de C, que é igual à utilidade esperada do jogo.

Imagine que se queira levantar a curva de utilidade de uma pessoa. Para definir a escala vertical são escolhidos, primeiramente, dois pontos quaisquer arbitrários na escala de utilidades, por exemplo: um valor monetário zero com utilidade igual a zero, ou seja $u(0) = 0$, e outro valor monetário igual a 100 com utilidade igual a 100, ou seja $u(100) = 100$. Com esses pontos, pode-se agora perguntar à pessoa entrevistada quanto ela pagaria, no máximo, para entrar em um jogo, como por exemplo, o do lançamento de uma moeda em que as chances de receber \$100 ou nada sejam iguais. Suponha que a resposta seja \$30 unidades monetárias. Assim, o ponto equivalente da curva de utilidade pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$u(30) = 0{,}5 \times u(100) + 0{,}5 \times u(0) = 50 \tag{5.28}$$

Têm-se agora três pontos da curva. Pode-se prosseguir com a entrevista perguntando quanto a pessoa pagaria, no máximo, para jogar com chances iguais de receber \$30 ou zero. Se a resposta for \$10 tem-se que:

$$u(10) = 0{,}5 \times u(30) + 0{,}5 \times u(0) = 25 \tag{5.29}$$

Com esses pontos estima-se uma curva conforme a indicada na Figura 5.15 a seguir.

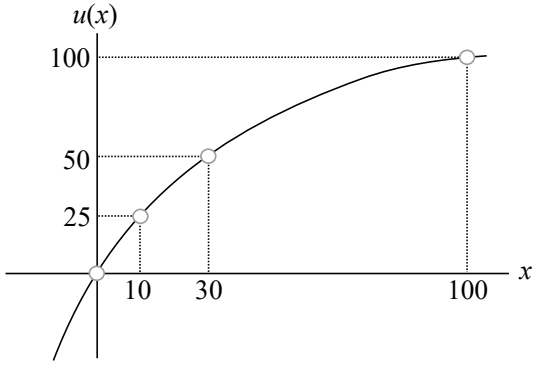


Figura 5.15 – Exemplo de curva da função utilidade obtida com entrevista.

Como se vê, a função utilidade atribui um número para cada resultado possível de um evento incerto. Tal número pode ser interpretado como um índice de satisfação relativa que o indivíduo terá se aquele resultado realmente ocorrer. A escala vertical representa esse índice de satisfação relativa por determinada quantidade de dinheiro. É adimensional e sua magnitude é arbitrária. O ponto zero ou a origem dessa escala pode ser interpretado como um ponto de indiferença. Os valores positivos significam o aumento da satisfação ou do desejo por diferentes quantias. Os valores negativos refletem as insatisfações ou os receios pelas perdas de diferentes quantidades de dinheiro. A escala horizontal é expressa por unidades monetárias, podendo representar o valor presente líquido de um projeto ou outros *payoffs* de um investimento.

5.8.3. Tipos de função utilidade

A curva de preferência de um investidor pode apresentar diversos formatos (ver Figura 5.16).

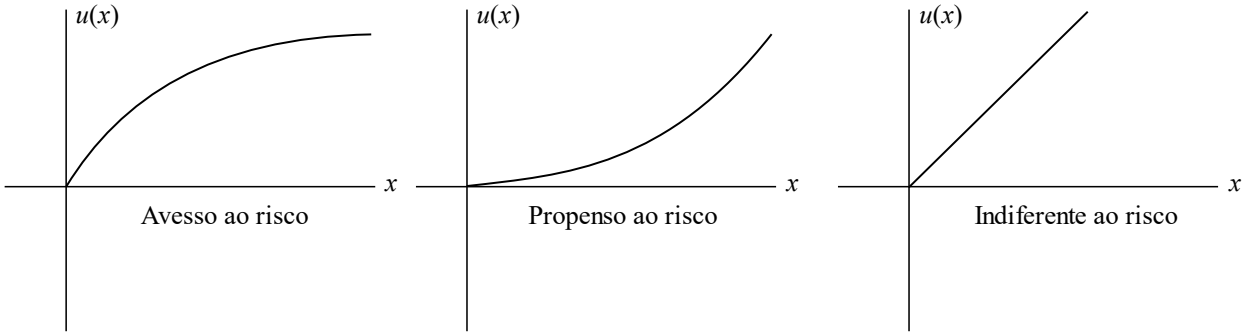


Figura 5.16 – Curvas da função utilidade para diversos tipos de investidores.

As curvas côncavas são de investidores moderados ou avessos ao risco, e quanto maior a concavidade, maior a aversão. As convexas caracterizam aqueles que têm propensão ao risco e, quando a função utilidade de um investidor é uma linha reta, significa que ele tem atitude indiferente em relação ao dinheiro.

Note que a curva simplesmente representa atitudes individuais frente aos resultados incertos, como ganhar ou perder dinheiro. Não cabe qualquer interpretação crítica quanto a curva ser correta ou incorreta. A curva de preferência ou função utilidade de cada indivíduo é instável e se altera com o tempo em função da idade, da experiência, do estado psicológico, do estado da riqueza etc. A teoria da preferência e da utilidade relativiza, em última análise, as mensurações de riscos oriundas da teoria da probabilidade.

5.8.4. Axiomas da escolha

Antes de apresentar os axiomas de escolha de Neumann e Morgenstern (1953), faz-se necessária a definição de três notações:

- Se um tomador de decisão prefere P_X a P_Y ou é indiferente a ambos, então $P_X \geq P_Y$.
- A notação $P_X > P_Y$ denota que o tomador de decisão tem preferência estrita a P_X.
- Se um tomador de decisão é indiferente a ambos, então $P_X \approx P_Y$.

Para expor os axiomas, considere que Ω seja o conjunto de todos os prospectos ou loterias, e qualquer elemento $P \in \Omega$ seja uma escolha possível. Assim, os axiomas de escolha podem ser resumidos da seguinte forma:

- Consequência: para todo P_X, $P_Y \in \Omega$, se tanto $P_X \geq P_Y$ ou $P_Y \geq P_X$ ou ambos, então $P_X \approx P_Y$.
- Transitividade: se $P_X \geq P_Y$ e $P_Y \geq P_Z$, então $P_X \geq P_Z$.
- Continuidade arquimediana: se $P_X, P_Y, P_Z \in \Omega$ são tais que $P_X > P_Y > P_Z$, então existe um $\alpha, \beta \in (0,1)$ tal que $\alpha P_X + (1 - \alpha)P_Z > P_Y$ e $P_Y > \beta P_X + (1 - \beta)P_Z$.

- Independência: para todo P_X, P_Y, $P_Z \in \Omega$ e qualquer $\alpha \in (0,1)$, então $P_X \geq P_Y$ se e somente se $\alpha P_X + (1 - \alpha)P_Z \geq \alpha P_Y + (1 - \alpha)P_Z$.

Com esses axiomas pode-se concluir que a função utilidade tem a seguinte propriedade linear

$$u[\alpha P_X + (1 - \alpha)P_Y] = \alpha u(P_X) + (1 - \alpha)u(P_Y) \perp \alpha \in (0,1) \text{ e } P_X, P_Y \in \Omega \quad (5.30)$$

Mais ainda, se u_1 e u_2 são duas funções utilidades com mesma ordem de preferência, então $u_2 = au_1 + b$ onde $a > 0$ e b são coeficientes.

Não obstante os axiomas de escolha publicados por Neumann e Morgenstern (1953), algumas contradições começaram a surgir. Por exemplo, já em 1956, Maurice Allais formulou um problema de dois jogos expondo-o para que Savage propusesse uma solução. Nesse problema, cada jogo envolvia dois pares de loterias, o que mais tarde ficou conhecido como o paradoxo de Allais (ver Tabela 5.10).

Tabela 5.10 – Paradoxo de Allais – axioma de escolha

Jogo 1				Jogo 2			
Loteria A		Loteria B		Loteria C		Loteria D	
Chance	Resultado	Chance	Resultado	Chance	Resultado	Chance	Resultado
100%	\$1 MM	89%	\$1 MM	11%	\$1 MM	10%	\$5 MM
		10%	\$5 MM	89%	Nada	90%	Nada
		1%	Nada				

Para cada jogo, Maurice Allais pedia que Savage fizesse sua escolha dentre as duas loterias. Para o jogo 1, por exemplo, a loteria A resultava uma certeza de \$1 MM, enquanto a loteria B resultava \$1 MM, \$5 MM e nada, com chances de 89%, 10% e 1%, respectivamente. Savage revelou preferência pela loteria A no jogo 1 e pela loteria D no jogo 2. Com esse resultado, Maurice Allais demonstrou que Savage havia violado o axioma da independência. Esse axioma possivelmente seja o mais polêmico da teoria da utilidade esperada.

Curiosamente, a escolha de Savage é também a escolha da maioria dos indivíduos. Nesse caso, tem-se que:

- Jogo 1 (loteria A é preferível à loteria B), então

$$1{,}00 \times u(\$1) > 0{,}89 \times u(\$1) + 0{,}10 \times u(\$5) + 0{,}01 \times u(\$0) \quad (5.31)$$

e

- Jogo 2 (loteria D é preferível à loteria C), então

$$0{,}11 \times u(\$1) + 0{,}89 \times u(\$0) < 0{,}10 \times u(\$5) + 0{,}90 \times u(\$0) \quad (5.32)$$

De acordo com o axioma da independência, se for subtraída ou adicionada uma mesma proposição de resultados para ambas as loterias de um jogo, a escolha não deve se alterar. Por exemplo, subtraindo um resultado de ganhar nada com chance 89% para as loterias C e D, a Eq. (5.32) seria reescrita do seguinte modo:

$$0{,}11 \times u(\$1) < 0{,}10 \times u(\$5) + 0{,}01 \times u(\$0) \quad (5.33)$$

Ora, $0{,}11 \times u(\$1) = 1{,}00u(\$1) - 0{,}89u(\$1)$, que substituindo na Eq. (5.33) resulta

$$1{,}00 \times u(\$1) - 0{,}89u(\$1) < 0{,}10 \times u(\$5) + 0{,}01 \times u(\$0) \quad (5.34)$$

ou

$$1{,}00 \times u(\$1) < 0{,}89u(\$1) + 0{,}10 \times u(\$5) + 0{,}01 \times u(\$0) \quad (5.35)$$

que, por sua vez, contradiz a Eq. (5.31).

5.9. Equivalente Certo

Imagine agora um jogo em que se tem chances iguais de ganhar $1 mil ou nada. O valor monetário esperado é, portanto, de $500. É quase certo que a maioria das pessoas aceitaria trocar a chance de jogar para receber uma quantia igual a $500. Acredita-se, ainda, que muitos ficariam satisfeitos em receber apenas $300 ou até $200 certos, em lugar de arriscar a ganhar $1 mil ou ficar sem nada.

Isso sugere a pergunta: até que valor alguém ficaria satisfeito em receber como quantia garantida em lugar de jogar? Esse valor é denominado de equivalente certo, E_c. Evidentemente os indivíduos têm diferentes equivalentes certos para o mesmo jogo, como reflexos do fato das pessoas reagirem diferentemente diante do risco. Quando o equivalente certo é inferior ao valor monetário esperado da alternativa, diz-se que o tomador de decisão é avesso ao risco. De outro modo, uma pessoa é dita propensa ao risco quando o equivalente certo é superior ao valor monetário esperado. A pessoa é considerada indiferente ao dinheiro quando existe a igualdade entre o equivalente certo e o valor monetário esperado. Assim, tem-se as seguintes relações:

$$\overbrace{E_c < VME}^{avesso} \qquad \overbrace{E_c > VME}^{propenso} \qquad \overbrace{E_c = VME}^{indiferente} \tag{5.36}$$

Esses conceitos foram introduzidos inicialmente por Pratt (1964) e Arrow (1965), tomando como base a teoria da preferência de Neumann e Morgenstern (1944). Por exemplo, para o caso de um projeto de E&P com apenas dois resultados possíveis (VPL´s), a utilidade esperada é o somatório das utilidades de cada resultado multiplicado pela sua probabilidade de ocorrência. Nesse caso, seria

$$E(u) = pu(VPL_s) + (1-p)u(VPL_f) \tag{5.37}$$

onde p é a probabilidade de sucesso, VPL_s é o valor presente líquido no caso de sucesso e VPL_f é o valor presente líquido no caso de insucesso (falha).

A diferença entre o equivalente certo e o valor esperado de um projeto é o prêmio de risco. Em outras palavras, o equivalente certo de um projeto é o valor que o tomador de decisão está disposto a receber para desistir do projeto (ver Figura 5.17).

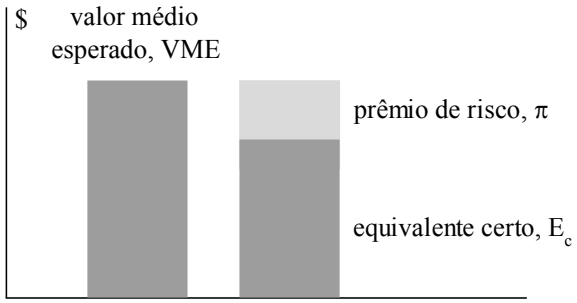


Figura 5.17 – Equivalente certo e prêmio de risco.

Considere agora um projeto de E&P com resultados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Denotando $\ddot{x}$ uma consequência provável do projeto (VPL, por exemplo), tem-se que a consequência esperada de $\ddot{x}$ é

$$E(\ddot{x}) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{5.38}$$

A utilidade esperada do projeto é, por analogia,

$$E[u(\ddot{x})] = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \tag{5.39}$$

Assim, por definição, o equivalente certo é um valor $\hat{x}$ de tal modo que sua utilidade represente, para quem decide, a mesma utilidade esperada do projeto, ou seja,

$$u(\hat{x}) = \mathrm{E}[u(\ddot{x})] \tag{5.40}$$

Para quem toma a decisão é indiferente receber o valor $\hat{x}$ ou desistir do projeto. Se as consequências do projeto de E&P, por exemplo, forem definidas por uma distribuição de frequência $f(x)$, então o equivalente certo é obtido pela integração

$$u(\hat{x}) = \mathrm{E}[u(\ddot{x})] = \int u(x)f(x)dx \tag{5.41}$$

De acordo com os axiomas, duas funções utilidades u_1 e u_2 são estrategicamente equivalentes, escritas como $u_1 \sim u_2$, se e somente se, elas exibirem o mesmo *ranking* de preferência para quaisquer dois projetos. Isso implica, por consequência, que u_1 e u_2 têm o mesmo equivalente certo. Assim, é fácil demonstrar que, se $u_1(x)$ é igual à $a + bu_2(x)$ para quaisquer valores de x com a e b constantes, então $u_1 \sim u_2$. Essa demonstração ficará a cargo do leitor, utilizando-se do fato de que $\mathrm{E}(a + bx) = a + b\mathrm{E}(x)$.

5.9.1. Participação ótima em carteira de projetos

De acordo com Raiffa e Keeney (1993), se a função utilidade é do tipo exponencial, ou seja $u(x) = -e^{-cx}$(onde c é o nível de aversão ao risco) e $\hat{x}$ é o equivalente certo de um dado projeto $\ddot{x}$, então $\hat{x} + x_0$ é o equivalente certo de um projeto $\ddot{x} + x_0$. Para demonstrar essa propriedade admita-se, por hipótese, que $\hat{x}$ * seja o equivalente certo do projeto $\ddot{x} + x_0$. Desse modo, segue que

$$-e^{-c\hat{x}*} = \mathrm{E}[u(\ddot{x} + x_0)] \tag{5.42}$$

Aplicando a definição em (5.40) no lado esquerdo da Eq. (5.42), resulta:

$$-e^{-c\hat{x}*} = \mathrm{E}[-e^{-c(\ddot{x}+x_0)}] = \mathrm{E}[e^{-cx_0}(-e^{-c\ddot{x}})] = e^{-cx_0}\mathrm{E}[(-e^{-c\ddot{x}})] \tag{5.43}$$

lembrando que $\mathrm{E}(ax) = a\mathrm{E}(x)$ para a constante. Considerando-se que $\hat{x}$ é o equivalente certo do projeto $\ddot{x}$, então, por definição, pode-se afirmar que

$$-e^{-c\hat{x}} = \mathrm{E}[-e^{-c\ddot{x}}] \tag{5.44}$$

Substituindo a Eq. (5.44) na Eq. (5.43), obtém-se

$$-e^{-c\hat{x}*} = e^{-cx_0}(-e^{-c\hat{x}}) = -e^{-c(\hat{x}+x_0)} \tag{5.45}$$

Portanto, por semelhança, $\hat{x}* = \hat{x} + x_0$ é o equivalente certo do projeto $\ddot{x} + x_0$, conforme admitido por hipótese.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.3 – Admita que a função utilidade de um investidor em projetos de E&P siga um comportamento do tipo exponencial. Considere também uma carteira com dois projetos cuja probabilidade do resultado (VPL) do primeiro projeto é p e do segundo é $1 - p$. Formule funções genéricas para o que se pede:

- A utilidade esperada para uma carteira de dois projetos com dois possíveis resultados, VPL_1 e VPL_2.
- Uma função para o equivalente certo.
- A participação ótima (%) nessa carteira.

Solução

Seja x o valor esperado do VPL da carteira de projetos. Tomando a função exponencial e aplicando a definição da utilidade esperada, resulta

$$u(x) = -e^{-cx} \Leftrightarrow \mathrm{E}[u(\mathrm{VPL})] = -pe^{-c\mathrm{VPL}_1} - (1-p)e^{-c\mathrm{VPL}_2} \tag{5.46}$$

O equivalente certo $\hat{x}$ da carteira, de acordo com a definição dada pela Eq. (5.40), é a solução da proposição a seguir:

$$e^{-c\hat{x}} = [pe^{-c\mathrm{VPL}_1} + (1-p)e^{-c\mathrm{VPL}_2}] \tag{5.47}$$

resolvendo para $\hat{x}$, chega-se a

$$\hat{x} = -\frac{1}{c}\ln[pe^{-c\mathrm{VPL}_1} + (1-p)e^{-c\mathrm{VPL}_2}] \tag{5.48}$$

A participação é um percentual único sobre cada um dos projetos, a qual resulta em um percentual sobre a carteira de projetos. Desse modo, pode-se reescrever a Eq. (5.48) como

$$\hat{x} = -\frac{1}{c}\ln\left(pe^{-cm\mathrm{VPL}_1} + (1-p)e^{-cm\mathrm{VPL}_2}\right) \tag{5.49}$$

onde *m* é o nível de participação nos projetos 1 e 2.

A participação ótima se dá onde a derivada da função do equivalente certo com respeito a *m* é zero. Portanto, derivando a Eq. (5.49) com respeito a *m*, resulta

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial m} = 0 \rightarrow m_{ótimo} = \frac{\ln\left(-\frac{p\mathrm{VPL}_1}{(1-p)\mathrm{VPL}_2}\right)}{c(\mathrm{VPL}_1 - \mathrm{VPL}_2)} \tag{5.50}$$

ou

$$c = \frac{\ln\left(-\frac{p\mathrm{VPL}_1}{(1-p)\mathrm{VPL}_2}\right)}{m_{ótimo}(\mathrm{VPL}_1 - \mathrm{VPL}_2)} \tag{5.51}$$

Note que, quando se define o nível ótimo de participação $m_{ótimo}$ em uma carteira de projeto, define-se também o nível de aversão ao risco .

▪▪▪▪▪▪

Como já referido, um investidor avesso ao risco é aquele que opta por um comportamento conservador, preferindo um valor garantido a ter que correr o risco em um projeto, ainda que o valor esperado deste seja maior que o valor garantido. Em outras palavras, a utilidade do valor esperado de um prospecto para quem tem aversão ao risco é maior que a utilidade esperada do projeto, ou seja,

$$u[\mathrm{E}(\ddot{x})] > \mathrm{E}[u(\ddot{x})] \tag{5.52}$$

Se um projeto apresentar uma probabilidade *p* para um resultado x_1 e probabilidade 1 - *p* para um resultado x_2, um tomador de decisão é avesso ao risco se

$$u[px_1 + (1-p)x_2] \geq pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \tag{5.53}$$

ou, generalizando, se

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \tag{5.54}$$

para *n* resultados possíveis. A condição dada pela Eq. (5.53) é suficiente para garantir uma curva côncava para a função utilidade $u(x)$. Em outras palavras, a utilidade do valor esperado de um prospecto só é maior que a utilidade esperada do projeto se a função utilidade for côncava. Se o prospecto for do tipo 50–50%, a Eq. (5.52) é reescrita como

$$\overbrace{u\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)}^{\text{utilidade do valor esperado}} \geq \overbrace{\frac{1}{2}u(x_1)+\frac{1}{2}u(x_2)}^{\text{utilidade esperada}} \tag{5.55}$$

Para complementar, um tomador de decisão é propenso ao risco sempre que

$$u[\mathrm{E}(\ddot{x})] \leq \mathrm{E}[u(\ddot{x})] \tag{5.56}$$

e indiferente quando

$$u[\mathrm{E}(\ddot{x})] = \mathrm{E}[u(\ddot{x})] \tag{5.57}$$

A Tabela 5.11 a seguir resume o comportamento do investidor em relação ao risco.

Tabela 5.11 – Função utilidade – comportamento do investidor

Comportamento do investidor	Equação 1	Equação 2
Avesso ao risco (côncava)	$u[\mathrm{E}(\ddot{x})] \geq \mathrm{E}[u(\ddot{x})]$	$u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$
Propensão ao risco (convexa)	$u[\mathrm{E}(\ddot{x})] \leq \mathrm{E}[u(\ddot{x})]$	$u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$
Indiferente ao risco (reta)	$u[\mathrm{E}(\ddot{x})] = \mathrm{E}[u(\ddot{x})]$	$u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$

. . . . . .

Exemplo 5.4 – Admita que um investidor deseje conhecer o equivalente certo de um projeto de E&P que tenha 50%–50% de chance de ocorrência entre dois possíveis VPL's. Elabore uma tabela indicando alguns valores de *prêmio de risco* em função do *coeficiente de aversão ao risco* considerando que a função utilidade deste investidor segue um comportamento do tipo exponencial.

Solução

De acordo com o enunciado, o resultado esperado do projeto é $\ddot{x} = (\mathrm{VPL}_1 + \mathrm{VPL}_2)/2$ e, de acordo com a definição dada pela Eq. (5.40), o equivalente certo $\hat{x}$ é a solução de

$$-e^{-c\hat{x}} = -\frac{e^{-c\mathrm{VPL}_1} + e^{-c\mathrm{VPL}_2}}{2} \tag{5.58}$$

resolvendo, chega-se a

$$\hat{x} = \frac{1}{c}[\ln 2 - \ln(e^{-c\mathrm{VPL}_1} + e^{-c\mathrm{VPL}_2})] \tag{5.59}$$

A Tabela 5.12 a seguir indica os valores do equivalente certo e o prêmio de risco para alguns valores de *c*. Note que para cada valor de *c* foram adotados três pares de possíveis resultados do espaço de consequência (ou espaço de avaliação). Lembrando ainda que, conforme Figura 5.17, o prêmio de risco π é a diferença entre o valor médio esperado e o equivalente certo, ou seja

$$\pi(\ddot{x}) = \bar{x} - \hat{x} \tag{5.60}$$

Tabela 5.12 – Equivalente certo e prêmio de risco

Constante, c	VPL_1	VPL_2	E(ẍ)	$\hat{x}$	Prêmio de risco, π
0,5	15,00	20,00	17,50	16,23	1,27
0,5	20,00	30,00	25,00	21,37	3,63
0,5	25,00	40,00	32,50	26,39	6,11
1,0	15,00	20,00	17,50	15,69	1,81
1,0	20,00	30,00	25,00	20,69	4,31
1,0	25,00	40,00	32,50	25,69	6,81

As curvas indicadas na Figura 5.18 a seguir foram elaboradas com dois possíveis resultados de um projeto de E&P com probabilidades 50%–50% ($VPL_1 = VPL_2 = 5$), tomando como referência a função utilidade do tipo exponencial, $u(x) = -e^{-cx}$. Fica claro que, à medida que o equivalente certo aumenta, diminui o prêmio de risco.

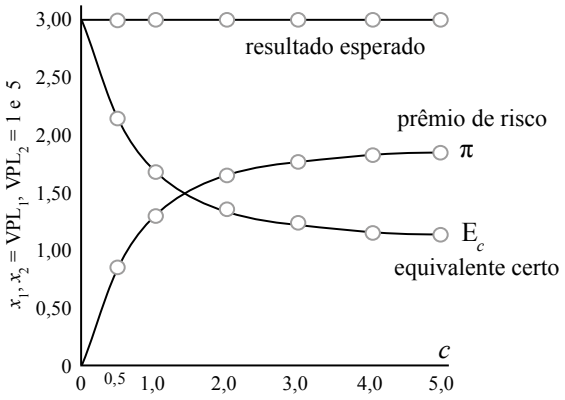


Figura 5.18 – Prêmio de risco, equivalente certo e resultado esperado.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.5 – Admita que a função definida por $u(x) = 0{,}25x^2$ seja uma boa aproximação da função utilidade dos gestores frente aos investimentos de projetos do pré-sal, em que x é o retorno dos projetos (VPL). Admitindo-se que o retorno de cada projeto seja diretamente proporcional ao número de poços perfurados, cuja taxa de sucesso seja de 50%, indique por meio de um gráfico o valor esperado, o equivalente certo e o prêmio de risco para dois projetos x_1 e x_2 com quatro e oito poços, respectivamente.

Solução

Por simplificação, utiliza-se uma taxa de proporcionalidade igual à unidade. Assim, o retorno esperado é

$$\bar{x} = \frac{4+8}{2} = 6 \tag{5.61}$$

De acordo a Eq. (5.55), a utilidade esperada é igual a

$$\frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2) = \frac{1}{2}u(0{,}25 \times 4^2) + \frac{1}{2}u(0{,}25 \times 8^2) = 10 \tag{5.62}$$

Logo, seguindo a Eq. (5.40), resulta a igualdade

$$0{,}25(\hat{x})^2 = 10 \tag{5.63}$$

Resolvendo, o equivalente certo é $\hat{x}$ = 6,32 e o prêmio de risco é igual a 6,32 – 6,00 = 0,32. Veja a solução gráfica na Figura 5.19 a seguir.

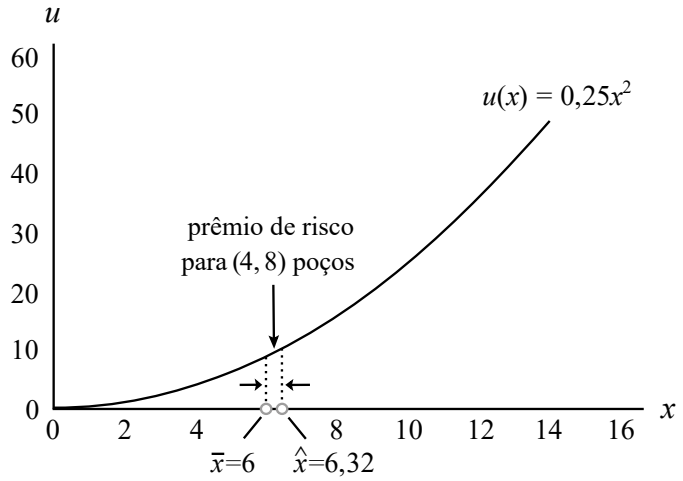


Figura 5.19 – Função utilidade de propensão ao risco.

▪▪▪▪▪▪

5.9.2. Coeficiente de aversão ao risco

As curvas de preferência são descritas por funções analíticas não decrescentes, uma vez que todos os investidores, em princípio, desejam sempre mais a menos. Dito de outra forma, independentemente das características pessoais de um investidor, sua função utilidade apresenta a primeira derivada maior ou igual a 0 em todo o espaço do domínio, ou seja, $u'(x) \geq 0$, onde $x \in \mathrm{R}$.

Arrow (1965) propôs uma medida para avaliar a aversão ao risco de um investidor com função utilidade $u(x)$, denominando-a de *medida de aversão ao risco*. Essa medida é obtida pela divisão entre a derivada segunda e a derivada primeira da função $u(x)$, conforme segue:

$$r(x) = -\frac{\partial^2 u(x)/\partial x^2}{\partial u(x)/\partial x} \tag{5.64}$$

Opcionalmente, por questão de praticidade, pode-se expressar a medida com a seguinte formulação:

$$r(x) = -\frac{d \ln u'(x)}{dx} \tag{5.65}$$

É uma medida útil para indicar como varia o comportamento de quem decide em relação ao risco, tendo em vista o valor monetário x. Para o caso da função utilidade do tipo exponencial, essa medida independe de x, uma vez que

$$r(x) = -\frac{\partial^2(-e^{-ax})/\partial x^2}{\partial(-e^{-ax})/\partial x} = a \tag{5.66}$$

Quando o resultado da medida é uma constante, denomina-se de *coeficiente de aversão ao risco* ou *fator de risco*. No entanto, para algumas funções utilidade, a medida de aversão ao risco depende do valor monetário em jogo. Por exemplo, para uma função do tipo potência $u(x) = x^{-a}/a$, a medida de aversão depende do valor

monetário em jogo, uma vez que $r(x) = (a + 1)/x$. Nesse caso, a função decresce à medida que aumenta o valor monetário x.

A Tabela 5.13, com base em Raiffa e Keeney (1993), apresenta alguns exemplos de função utilidade com medida de aversão ao risco decrescente e que podem ser exploradas em projetos de E&P.

Tabela 5.13 – Funções utilidade com fator de risco decrescente

$u(x)$	restrição	$r(x)$	range
In $(x + b)$	–	$1 / (a + b)$	$x > -b$
$(x + b)^c$	$0 < c < 1$	$- (c - 1) / x + b$	$x \geq -b$
$(x + b)^{-c}$	$c > 0$	$(c + 1) / (x + b)$	$x \geq -b$
$x + c\log(a + b)$	$c > 0$	$c / [(x + b)(x + c + b)]$	$x > -b$
$-e^{-ax} - be^{-cx}$	$a, b, c > 0$	$(a^2e^{-ax} + bc^2e^{-cx}) / (ae^{-ax} + bce^{-cx})$	todo x
$-e^{-ax} + bx$	$a, b > 0$	$a^2e^{-ax} / (ae^{-ax} + b)$	todo x

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.6 – Determine a função de aversão ao risco de um investidor que apresente a seguinte função utilidade $u(x) = a - be^{-cx}$.

Solução

As derivadas primeira e segunda são, respectivamente, $u'(x) = cbe^{-cx}$ e $u''(x) = - c^2be^{-cx}$. Logo, a função de aversão ao risco é:

$$r(x) = \frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-c^2be^{-cx}}{cbe^{-cx}} = c \tag{5.67}$$

Esse resultado era esperado, uma vez que as funções $u(x) = a - be^{-cx}$ e $u(x) = e^{-cx}$ e são estrategicamente equivalentes, portanto, exibem o mesmo coeficiente de aversão ao risco.

▪▪▪▪▪▪

Considere agora que x_0 seja a decisão inicialmente assumida por um investidor para um dado atributo X de um projeto, e admita que seja somado a x_0 outro resultado do mesmo atributo de outro projeto $\ddot{x}$, com um pequeno range de variação cuja esperança $E(\ddot{x})$ seja igual a 0, e seja π o prêmio de risco desse investidor para $x_0 + \ddot{x}$. Com nessas considerações, tomando a definição do equivalente certo em (5.40), chega-se à seguinte igualdade:

$$u(x_0 - \pi) = \mathrm{E}[(u(x_0 + \ddot{x})] \tag{5.68}$$

Aplicando a fórmula de Taylor para os dois lados da Eq. (5.68), resulta

$$u(x_0 - \pi) = u(x_0) - \pi u'(x_0) + \overbrace{\frac{\pi^2}{2!}u''(x_0) + \ldots}^{\text{ordem superior}} \tag{5.69}$$

e

$$\mathrm{E}[u(x_0 + \ddot{x})] = u(x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{E}[\ddot{x}^2]u''(x_0) + \overbrace{\frac{1}{3!}\mathrm{E}[\ddot{x}^3]u'''(x_0) + \ldots}^{\text{ordem superior}} \tag{5.70}$$

Desconsiderando os termos de ordem superior, chega-se à seguinte aproximação:

$$-\pi u'(x_0) \approx \frac{1}{2}\mathrm{E}[\ddot{x}^2]u''(x_0) \tag{5.71}$$

Ora, $\mathrm{E}[\ddot{x}^2]$ é a variância σ_x^2 do projeto $\ddot{x}$, uma vez que $\mathrm{E}(\ddot{x}) = 0$. Logo,

$$\pi(x_0, \ddot{x}) \approx \frac{1}{2}\sigma_x^2 r(x_0) \tag{5.72}$$

onde $r(x_0)$ é definida pela Eq. (5.64).

A Eq. (5.72) pode ser traduzida assim: como primeira aproximação, para um investidor com uma posição inicial x_0, seu prêmio de risco em um projeto $\ddot{x}$ de pequeno porte (pequeno range) com consequência esperada $\mathrm{E}(\ddot{x})$ igual a 0 é $r(x_0)$ vezes a metade da variância do projeto $\ddot{x}$ ou, dito de outra forma, a aversão ao risco $r(x_0)$ é duas vezes o prêmio de risco por unidade de variância do projeto $\ddot{x}$.

5.9.3. Tolerância ao risco

Uma analogia interessante com a Química foi publicada por Cozzolino (1977b). Ele usou a mesma equação de energia de ativação de reação proposta por Arrhenius, em 1889, para indicar o equivalente certo, denominando-o de *valor ajustado ao risco*. Nesse trabalho, Cozzolino fez um paralelo entre o coeficiente de aversão ao risco e a tolerância ao risco, *risk tolerance* (RT).

A *tolerância ao risco* pode ser interpretada como o inverso da medida de aversão ao risco. A analogia é interessante pelo fato do termo RT representar também o produto da constante do gás R com a temperatura absoluta T na fórmula de Arrhenius, por meio da qual afirma que, a uma dada temperatura T, a taxa de decaimento determinada pelo estado de energia de ativação E_1 é proporcional a

$$p_s e^{-\mathrm{E}_1/\mathrm{RT}} \tag{5.73}$$

onde p_s é a probabilidade de a reação ocorrer seguindo um caminho determinado pelo estado de energia E_1. De modo semelhante, a taxa de decaimento determinada pelo estado de energia E_2 é, portanto, proporcional a

$$p_f e^{-\mathrm{E}_2/\mathrm{RT}} \tag{5.74}$$

Considerando apenas dois caminhos possíveis, ou seja, $p_s + p_f = 1$, a taxa total de decaimento é proporcional a $p_s e^{-\mathrm{E}_1/\mathrm{RT}} + p_f e^{-\mathrm{E}_2/\mathrm{RT}}$. Se o decaimento for determinado por um estado de energia de ativação equivalente, denominada de RAV, chega-se à seguinte relação

$$\mathrm{RAV}e^{-/\mathrm{RT}} = p_s e^{-\mathrm{E}_1/\mathrm{RT}} + p_f e^{-\mathrm{E}_2/\mathrm{RT}} \tag{5.75}$$

Cozzolino propôs uma formulação para o cálculo do RAV (*risk adjusted value*) fazendo um paralelo dos estados de energia E_1 e E_2 com dois resultados possíveis de um prospecto, conforme ilustra a Figura 5.20 a seguir:

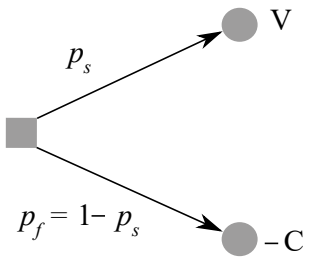


Figura 5.20 – Analogia – Cozzolino (1977b).

onde V é o resultado esperado com probabilidade de sucesso p_s e C, o custo esperado com probabilidade p_f = 1 - p_s. Fazendo $E_1 = mV$ e $E_2 = -mC$, e tomando a Eq. (5.75), chega-se na igualdade

$$\mathrm{RAV} = -\mathrm{RT}\ln(p_s e^{-m\mathrm{V}/\mathrm{RT}} + p_f e^{m\mathrm{C}/\mathrm{RT}}) \tag{5.76}$$

onde m é o nível de participação.

Comparando a Eq. (5.76) com a Eq. (5.49), percebe-se que o valor ajustado ao risco, na fórmula de Cozzolino, representa o equivalente certo, e a tolerância ao risco é o inverso do coeficiente de aversão ao risco. Dessa forma, tomando como referência a solução dada pela Eq. (5.50), para um dado valor de RT, a participação ótima seria

$$m_{ótimo} = \frac{\mathrm{RT}}{(\mathrm{V}+\mathrm{C})}\ln\left(\frac{p_s\mathrm{V}}{p_f\mathrm{C}}\right) \tag{5.77}$$

Substituindo na Eq. (5.76) chega-se ao valor ajustado ao risco máximo, ou seja

$$\mathrm{RAV}_{max} = -\mathrm{RT}\ln\left(p_s\left(\frac{p_f\mathrm{C}}{p_s\mathrm{V}}\right)^{\mathrm{V}/(\mathrm{V}+\mathrm{C})} + p_f\left(\frac{p_s\mathrm{V}}{p_f\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}/(\mathrm{V}+\mathrm{C})}\right) \tag{5.78}$$

Com a Eq. (5.76), pode-se deduzir uma expressão para o cálculo do nível de participação m_0 que anula o valor ajustado ao risco, ou seja,

$$p_s e^{-m_0\mathrm{V}/\mathrm{RT}} + p_f e^{m_0\mathrm{C}/\mathrm{RT}} = 1 \tag{5.79}$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (5.79) por exp(m_0V/RT), resulta

$$p_f e^{m_0(\mathrm{V}+\mathrm{C})/\mathrm{RT}} + p_s - e^{m_0\mathrm{V}/\mathrm{RT}} = 0 \tag{5.80}$$

sob a condição $0 \leq m_0 \leq 1$.

Outros tipos de curvas, além da exponencial ou tipo potência para a função utilidade, podem ser investigadas e utilizadas para o gerenciamento do risco. Lerche e Mackay (1999), por exemplo, exploraram o cálculo do valor ajustado ao risco com uma curva de preferência com coeficiente de aversão proporcional a 1 - tanh(E_1/RT). A justificativa é que, sob a hipótese da curva hiperbólica, há maior estabilidade no gerenciamento de risco em cenários de perdas elevadas se comparada com a exponencial. Dito de outra forma, o valor ajustado ao risco, nesse caso, é maior para um mesmo nível de participação, o que reduz o prêmio de risco.

Assim, tomando a função hiperbólica e procedendo conforme indicado nas Eq. (5.73) a (5.76), chega-se à seguinte expressão para o RAV:

$$\mathrm{RAV} = -\mathrm{RT}\ln[\,p_s(1-\tanh(\,m\mathrm{V}/\mathrm{RT}) + p_f(1-\tanh(\,-m\mathrm{C}/\mathrm{RT})] \tag{5.81}$$

ou

$$\mathrm{RAV} = -\mathrm{RT}\ln[\,1 - p_s\tanh(\,m\mathrm{V}/\mathrm{RT}) - p_f\tanh(\,-m\mathrm{C}/\mathrm{RT})] \tag{5.82}$$

Observe que o procedimento pode ser generalizado, conforme indica Lerche e Mackay (1999). Para um fator de risco proporcional a 1 - H(E_1/RT) , em que H é uma função não decrescente, a formulação geral para o cálculo do valor ajustado ao risco é

$$\mathrm{RAV} = -\mathrm{RT}\ln[\,1 - p_s\mathrm{H}(m\mathrm{V}/\mathrm{RT}) - p_f\mathrm{H}(-m\mathrm{C}/\mathrm{RT})] \tag{5.83}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.7 – Imagine uma operadora de petróleo em uma parceria para compra do direito de exploração de uma área a ser concedida. Admita-se, por hipótese, que os dados contidos na Tabela 5.14 a seguir sejam oriundos de uma estratégia de produção em caso de sucesso exploratório.

Tabela 5.14 – Fluidos produzidos e injetados

Tempo	$Q_{óleo}$	W_{prod}	W_{inj}	Tempo	$Q_{óleo}$	W_{prod}	W_{inj}
(ano)	(m^3/dia)	(m^3/dia)	(m^3/dia)	(ano)	(m^3/dia)	(m^3/dia)	(m^3/dia)
Início de 2009	0	0	0	2025	4.391	3.979	10.028
2010	2.268	0	2.184	2026	4.020	4.384	9.873
2011	5.999	0	6.277	2027	3.693	4.752	9.786
2012	9.305	0	11.497	2028	3.306	5.100	9.640
2013	10.154	0	13.790	2029	3.013	5.455	9.548
2014	10.234	0	13.811	2030	2.776	5.797	9.536
2015	10.219	0	13.772	2031	2.531	6.089	9.530
2016	10.093	17	13.695	2032	2.258	6.397	9.483
2017	9.576	235	13.409	2033	2.094	6.662	9.482
2018	9.137	536	13.124	2034	1.946	6.907	9.516
2019	8.394	937	12.660	2035	1.793	7.134	9.549
2020	7.460	1.508	11.906	2036	1.620	7.346	9.557
2021	6.630	2.100	11.221	2037	1.467	7.536	9.545
2022	6.055	2.643	10.878	2038	1.352	7.709	9.540
2023	5.499	3.150	10.666	2039	1.273	7.872	9.569
2024	4.898	3.575	10.345	Final de 2039	4.391	3.979	10.028

Para essa análise, considere que o FLC do projeto de desenvolvimento da produção, sob regime fiscal de concessão, seja calculado conforme a Eq. (4.21) – ver **Capítulo 4**. Admita que o $CAPEX_{prod}$ seja representado pelo custo da plataforma e mais 18 poços (produção e injeção) previstos para a estratégia de drenagem do campo ao custo de \$75 MM cada. A depreciação do investimento refere-se apenas à plataforma e contabilizada pelo método linear a partir do segundo ano de produção por um período de dez anos. Para o custo da plataforma, considere

$$\text{CAPEX}_{plat}(\$\text{MM}) = (3{,}2609\text{Q}_{max}/1000) + 365{,}5026 = \text{I}_\text{D} \tag{5.84}$$

onde Q_{max} é a máxima vazão diária atingida com as correntes de óleo e água produzidas em m^3/dia. O $CAPEX_{plat}$ é desembolsado inteiramente no ano de 2009 e o $CAPEX_{poço} = I_{ND}$ ao final do primeiro ano de produção, ou seja, início de 2010.

Considere que o OPEX, além de uma parcela fixa não depreciável, seja representado por mais três componentes: custo de separação de fluidos, tratamento da água produzida e injeção de água, calculados conforme se vê a seguir:

$$\text{OPEX}(\$/ano) = \overbrace{\$14/bbl_{óleo}}^{separação\ de\ fluidos} + \overbrace{\$3/bbl}^{tratamento\ de\ água\ produzida} + \overbrace{\$2/bbl}^{injeção\ de\ água} + \text{I}_\text{ND} \tag{5.85}$$

onde I_{ND} é igual a \$100 MM incorridos no ano de 2009 em título de investimento inicial em logística, estudos de reservatórios etc. A receita R é oriunda apenas da produção de óleo e o VPL do projeto deve ser calculado com base na seguinte equação:

$$\text{VPL} = \sum_{t=0}^{30} \frac{\text{FCL}_t}{(1 + \text{TMA})^t} \tag{5.86}$$

onde TMA é a taxa mínima de atratividade adotada pela operadora (considerar vetores de valores ao final de cada período anual). Lembrando ainda que, para cômputo do fluxo de caixa, o custo de *descomissionamento* (abandono) é alocado no ano de 2037 (dois anos antes do término da produção de campo). Os parâmetros econômicos para o cálculo do fluxo de caixa estão indicados na Tabela 5.15:

Tabela 5.15 – Parâmetros econômicos – Exemplo 5.7

Parâmetros	Valor
Preço do óleo	$ 60/bbl
TMA	10%
Imposto de renda, IR	25%
PIS/PASEP/COFINS (PIS)	9,25%
Contribuição social, CSLL	9%
Royalties, ROY	15%
Custo de abandono (não depreciável)	5% do CAPEX_{plat}

Utilize o esquema para o valor ajustado ao risco conforme indicado na Figura 5.21 a seguir:

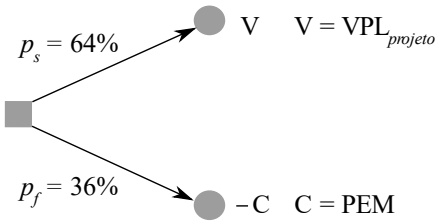


Figura 5.21 – Esquema de nó indicando os valores de sucesso e falha.

onde p_s é a probabilidade em caso de sucesso na exploração do campo e p_f é a probabilidade de falha. Os custos afundados em caso de falha são os destinados ao PEM, que é de 5% do CAPEX_{prod} (valor presente em 2009).

Com base em todas as premissas e dados, determine o que se pede:

O valor presente líquido do projeto em caso de sucesso exploratório.

- Construir um gráfico do valor ajustado ao risco *versus* nível de participação no projeto para vários *níveis de tolerância ao risco* da operadora, utilizando-se um nível de participação $m \in (0 \text{ a } 1)$ e adotando-se uma função utilidade do tipo exponencial, Eq. (5.76).
- Considerando que os níveis de tolerância ao risco da operadora sejam de 0,5 a 5 vezes o valor do PEM, e que ela planeja entrar com 40% na parceria, determine o *equivalente certo* a ser pago pela operadora nesse leilão, com base no nível de tolerância máxima.

Solução

Inicialmente, chama-se a atenção do leitor para o cálculo da participação especial PE, que nesse exemplo, conforme dados de produção da Tabela 5.14, resulta isenção. O VPL do projeto é de $1.232,42 MM e o gráfico do valor ajustado ao risco *versus* nível de participação na parceria está indicado na Figura 5.22.

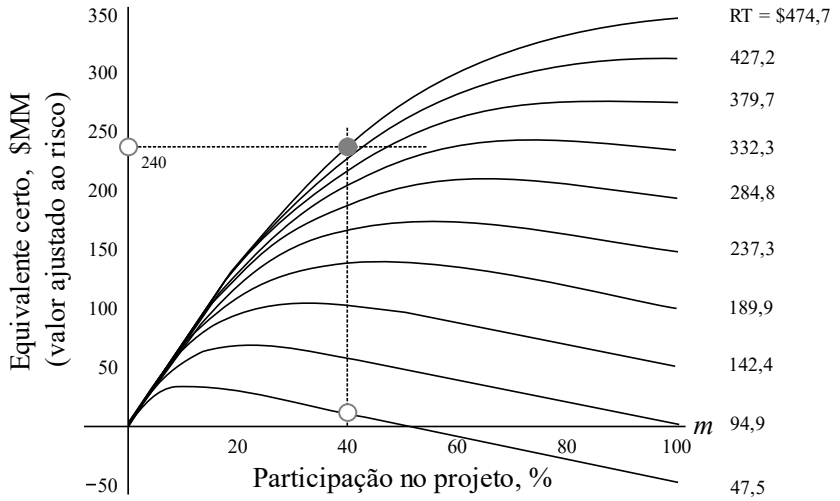


Figura 5.22 – Valor ajustado ao risco.

O valor máximo e justo a ser pago no leilão para as condições impostas é de aproximadamente $240 MM. Nesse caso, o prêmio de risco é de 40%(VPL) - 240 ≅ $253 MM.

▪▪▪▪▪▪

5.10. Decisão Envolvendo Múltiplos Objetivos

Até aqui, os exemplos resolvidos consideraram um único parâmetro para o problema de decisão, o retorno do investimento em projetos de E&P expresso pelo VPL e/ou VME. No entanto, muitas decisões envolvem conflitos entre múltiplos objetivos demandados por seus gestores. Nesse item, tais conceitos são abordados tendo como referência Raiffa e Keeney (1993).

5.10.1. Objetivo, atributo e resultado

Para a configuração de uma estrutura que se preste à solução de problemas que envolvem múltiplos interesses, é importante definir o que significa *objetivo*, *atributo* e *resultado* no processo de decisão. Não obstante, definir esses conceitos de modo direto traria mais dúvidas ao leitor do que esclarecimentos. O melhor, portanto, é diferenciá-los por meio de um exemplo.

Considere que se deseje reduzir o descarte de óleo no mar oriundo de uma plataforma de produção na Bacia de Santos. Pode-se definir, por exemplo, que o objetivo seja reduzir o teor de óleo e graxa (TOG) na saída do separador API[51]. Nesse caso há a necessidade de se definir um parâmetro de medição que sirva de atributo[52], e que seja útil para comparação ou classificação, como por exemplo, parte por milhão (ppm). O resultado, nesse caso, é o valor alcançado frente às ações tomadas para atender ao objetivo, como por exemplo, resultar 20 ppm de óleo e graxa presentes na água de descarte.

O objetivo indica, em geral, a direção rumo a um nível que se deseja atingir. Tomando o exemplo citado, o objetivo é reduzir o descarte de óleo no mar, que precisa ser medido em termos de um atributo, neste caso, mensurado em ppm de óleo e graxa. O resultado, satisfatório ou não, é o valor alcançado do atributo com as diversas ações na direção do objetivo. As ações são indicadas nas alternativas possíveis em uma análise de decisão, e se possível informando suas respectivas chances de ocorrência.

[51] Equipamento projetado para separar óleo e sólidos suspensos provenientes de águas residuais de efluentes industriais.

[52] Alguns atributos podem ser escalonados subjetivamente. Nesse caso recomenda-se incluir pesos proporcionais aos valores subjetivos.

É fundamental que o conjunto de atributos que mensuram os vários objetivos seja completo, que não contemple redundância, que seja tão mínimo quanto possível e permita que o problema seja divisível em partes analisáveis sem perda significativa para a qualidade da decisão (Raiffa e Keeney, 1993). Esse conjunto de exigência, embora desejável, nem sempre é fácil de se obter.

Outro desafio é estabelecer uma hierarquia que contemple uma lista de objetivos de um projeto. Mesmo que se consiga uma que seja satisfatória, como avaliar se não há "brechas" deixadas por minimização do problema ou mesmo por falta de informação relevante? Para evitar tais "brechas", recomenda-se que os objetivos sejam inicialmente especificados em detalhes e que seus significados sejam entendidos com clareza pela empresa.

A especificação de um objetivo pode resultar em subdividi-lo em outros de menores níveis, evidenciando a importância do objetivo mais geral. Os objetivos menores podem ser imaginados como meios de atingir o fim pretendido, que é representado pelo objetivo de maior nível. Nesse passo, é fundamental considerar as vantagens e desvantagens de cada um dos objetivos menores.

Um sistema de objetivos pode, em casos de problemas de decisão que afetam milhões de interessados, contemplar subsistemas com suas hierarquias correspondentes e, se possível, escaloná-los com os demais objetivos. No entanto, é desejável que um sistema não se estenda mais do que o necessário, sob pena de perda de qualidade da decisão. O detalhamento na formalização do problema depende do que é feito com a hierarquia dos objetivos traçados. Se nenhuma ação será tomada a partir de um dado ponto na hierarquia, possivelmente esse ponto se constitui um limite do detalhamento.

5.10.2. Definição do problema

Considere a uma alternativa razoável e A uma seleção dessas alternativas, em que $a \in A$ (ver Figura 5.23).

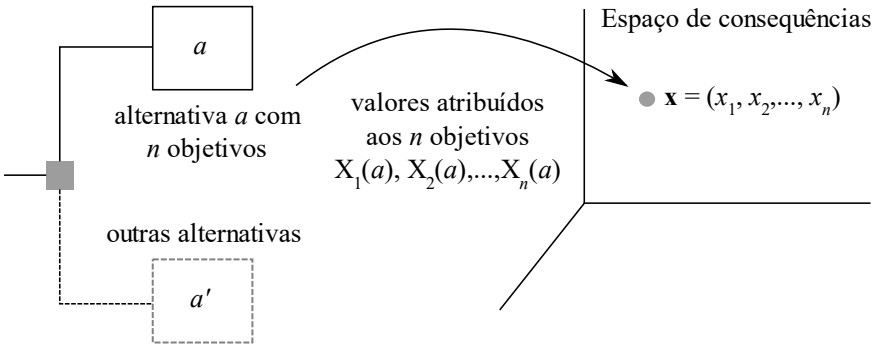


Figura 5.23 – Esquema de decisão com múltiplos objetivos.

Uma alternativa razoável é um caminho possível para a solução de um problema que atenda, no mínimo, a um ou mais objetivos. Para cada objetivo a ser atendido em a associe n valores para seus atributos, $X_1(a)$, $X_2(a)$, ... , $X_n(a)$. Desse modo, cada ação ou evento em resulta em um espaço de consequências, cuja dimensão é n.

Denota-se o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como um ponto qualquer no espaço de consequências. É importante ressaltar que não se deve comparar a magnitude entre x_i e x_j para $i \neq$ j, uma vez que na maioria dos problemas de decisão com múltiplos objetivos, os atributos comportam unidades diferentes de medição para cada um dos objetivos.

Assim, o problema de decisão se resume em escolher uma alternativa $a \in A$ que resulte em maior satisfação, ou na maior utilidade esperada. Matematicamente, pode-se associar uma função valor escalar $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que possibilite comparações de alternativas e permita, a quem toma as decisões, optar por aquela de maior valor v, sendo esta a que resulta, por lógica, em maior satisfação. Logo, se

$$v(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq v(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) \tag{5.87}$$

resulta que

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \text{preferível ou indiferente a } (x'_1, x'_2, \ldots x'_n) \tag{5.88}$$

Uma dificuldade que surge é definir que função objetivo *v* é adequada para representar o valor. Como retratam Raiffa e Keeney (1993), seria sorte se houvesse uma função *f* que atendesse a seguinte simplificação:

$$v(x_1, x_2, \ldots x_n) = f[v_1(x_1), v_2(x_2), \ldots, v_n(x_n)] \tag{5.89}$$

de modo que v_i denote o valor da função objetivo para um único atributo X_i. Tal simplificação, ainda que seja possível, não implica, necessariamente, a melhor decisão. Em alguns casos é suficiente adotar uma operação de adição para a função valor *v*, o que facilita em muito a escolha da melhor alternativa com base no espaço de consequência, sobretudo quando os atributos relacionados aos objetivos são monetários. Assim, a função valor fica determinada conforme a Eq. (5.90) a seguir:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i) \tag{5.90}$$

Fazendo uso da teoria da preferência e sob a premissa da Eq. (5.90), a decisão entre alternativas recai sobre aquela que apresentar maior utilidade esperada. A Figura 5.24 a seguir indica um esquema de árvore de decisão entre duas alternativas a' e a''. As probabilidades das variáveis de estado para cada alternativa são representadas por p' e p'' , e as utilidades pelas funções u' e u'' .

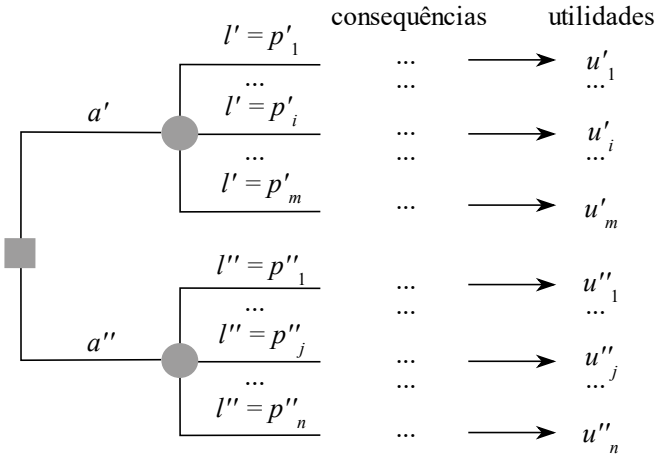


Figura 5.24 – Esquema genérico de uma árvore de decisão entre duas alternativas.

De acordo com a teoria da preferência, a alternativa a' é preferível em relação à alternativa a'' sempre que

$$\sum_{i=1}^{m} p'_i u'_i > \sum_{j=1}^{n} p''_j u''_j \tag{5.91}$$

5.10.3. Conceito de dominância e de fronteira eficiente

A teoria de dominância estocástica foi sistematizada por Hadar e Russell (1969), sendo aplicada em decisões de investimento sob condição de risco e incerteza. Se todos os investidores de uma determinada classe preferem um prospecto A em vez de B, então o prospecto A domina o prospecto B.

As regras de relação de dominância estocástica (primeira, segunda e terceira ordem) caracterizam a escolha de uma determinada classe de investidores e têm a vantagem de testar a validade de qualquer outra mé-

trica ou teoria de decisão sob risco e incerteza. Em um problema de decisão que contempla múltiplos objetivos, é comum estabelecer qual (ou quais) resultado (s) no campo de consequência prevalece (ou prevalecem) sobre os demais. Essa é a noção de dominância.

Por definição, considere que as alternativas a' e a'' tenham consequências $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ e $\mathbf{x}'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$, respectivamente. Diz-se que $\mathbf{x}'$ domina sobre $\mathbf{x}'$ sempre que:

- $x_i' \geq x_i''$ para todo i, e
- $x_i' > x_i''$ ao menos para um i.

Mais exatamente, $\mathbf{x}'$ domina $\mathbf{x}''$ se:

- a' é no mínimo tão bom quanto a'' para todos os atributos avaliados e;
- a' é melhor que a'' em pelo menos um atributo.

Se há dois atributos, a ideia de dominância pode ser mais bem compreendida por meio de um gráfico (ver Figura 5.25).

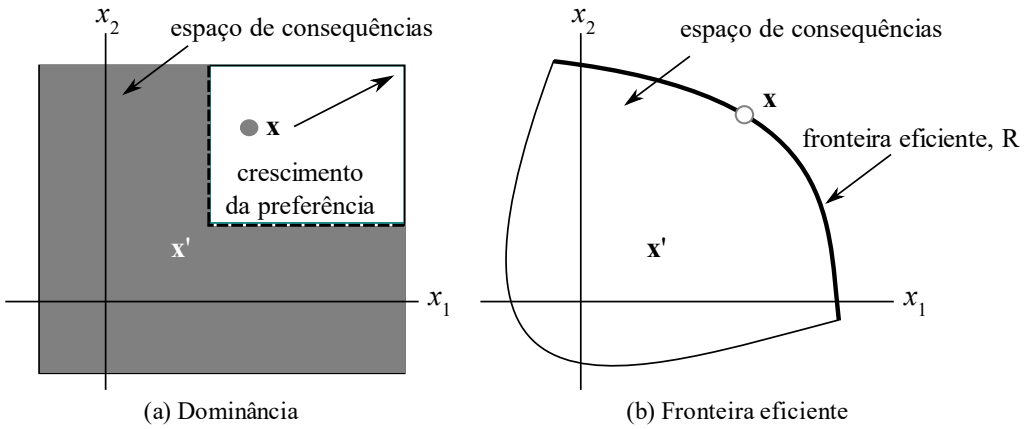


Figura 5.25 – Conceito de dominância e fronteira eficiente, Raiffa e Keeney (1993).

Observe, na Figura 5.25(a), que qualquer ponto $\mathbf{x}'$ do espaço de consequência compreendido pela área não hachurada, excluindo os da fronteira pontilhada, tem predominância sobre qualquer ponto da área cinza. De acordo com a definição, os pontos da linha pontilhada atendem apenas à primeira condição, mas não à segunda. Esses pontos compõem a fronteira de dominância. Qualquer ponto mais a nordeste tem predominância sobre os demais e sobre os pontos da fronteira.

Por definição, uma fronteira eficiente R é definida como um conjunto de todos os possíveis pontos do espaço de consequência onde não exista outro ponto qualquer que exerça dominância sobre eles (ver Figura 5.25(b) – curva mais espessa). Note que não há ponto fora dessa fronteira e dentro do espaço de consequência que exerça dominância sobre os pontos da fronteira, tanto para a primeira condição como para a segunda.

5.10.4. Determinando a fronteira eficiente com média linear ponderada

Considere um problema auxiliar constituído de atributos referentes aos objetivos de uma alternativa qualquer $X_1(a)$, $X_2(a)$, ..., $X_n(a)$, mas com pesos médios ponderados associados a esses atributos. A solução desse problema auxiliar (adjacente) fornecerá tantos pontos da fronteira eficiente quanto se queira.

Por exemplo, para qualquer $a \in A$ considere que exista um retorno satisfatório representado por seus atributos $X_1(a)$, $X_2(a)$, ..., $X_n(a)$ e,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \rightarrow \text{com} \begin{cases} \lambda_i > 0; \ \text{para todo } i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases} \tag{5.92}$$

O problema auxiliar pode ser definido como a escolha de uma alternativa *a* que maximize a seguinte função:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(a) \tag{5.93}$$

que equivale a escolher um vetor **x** ∈ R que maximize a função principal

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{5.94}$$

A proposição de um problema auxiliar, conforme indicado na Eq. (5.94), é uma proposição padrão de otimização de problemas de decisão. Considerando que $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ seja uma solução do problema auxiliar, então é de se esperar que $\mathbf{x}^0 \in$ R. Se não for, então haverá um $\mathbf{x}'$ que tem dominância sobre $\mathbf{x}^0$. Mais exatamente, se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i' > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^0 \tag{5.95}$$

então $\mathbf{x}^0$ não é uma maximização da Eq. (5.94), o que contraria a consideração inicial de que $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ é uma solução do problema auxiliar. Dessa forma, se $\mathbf{x}^0$ for uma solução, então $\mathbf{x}^0 \in$ R.

Considere, por exemplo, $n = 2$ e $\lambda = (0{,}9$ e $0{,}1)$. Assim, o problema auxiliar se resume em escolher uma alternativa *a* que maximize uma função linear $0{,}9x_1 + 0{,}1x_2$, por exemplo. Se $\mathbf{x}^0 \in$ R é um ponto de maximização dessa função, então a reta $0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 = k$ conterá um ponto $\mathbf{x}^0$ se a escolha de *k* for de tal modo que tangencie R no ponto $\mathbf{x}^0$, de outro modo esse ponto não seria uma maximização do problema auxiliar (ver Figura 5.26).

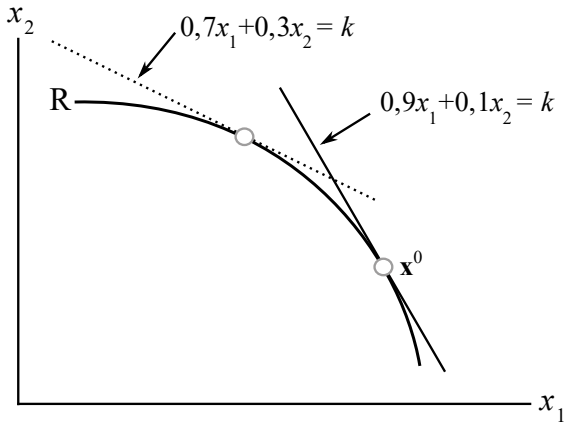


Figura 5.26 – Construção de fronteira eficiente para dois atributos.

O tomador de decisão pode se contentar com um determinado ponto $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ou explorar mais alguns pontos da fronteira. Para cada reta $\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = k$, existirá um valor *k* que definirá outro ponto que tangencia a curva R, como por exemplo $0{,}7x_1 + 0{,}3x_2 = k$ (ver Figura 5.27).

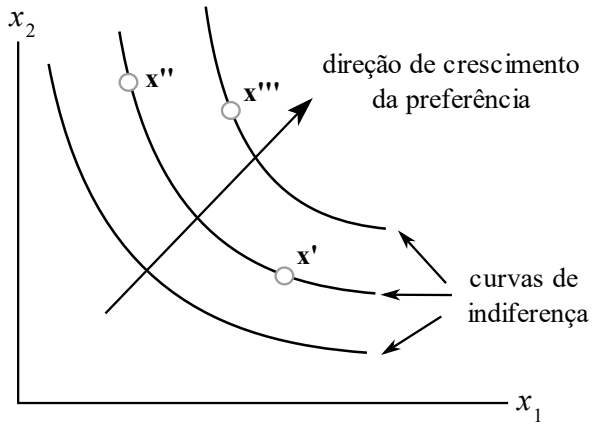


Figura 5.27 – Curvas de indiferença.

Com base na Figura 5.27, pode-se perguntar a quem decide quanto do valor do atributo x_1 o decisor estará disposto a abrir mão para aumentar o valor do atributo x_2. É nessa resposta que reside o conceito de taxa marginal de substituição, já conceituado em capítulos anteriores.

Se o tomador de decisão continua igualmente satisfeito com os valores substituídos, a curva composta por esses pontos é chamada de curva de indiferença. Nesse caso, assume-se que os resultados $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ são indiferentes para quem decide, e o resultado $\mathbf{x}'''$ é preferível em relação aos anteriores, ou seja, $\mathbf{x}''' > \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$.

A função valor v, como já referido, é uma função que associa um número real $v(\mathbf{x})$ para cada ponto $\mathbf{x}$ no espação de consequência (ou espaço de avaliação). A estrutura de preferência de quem decide pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}'' \Leftrightarrow v(\mathbf{x}') = v(\mathbf{x}'') \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' > \mathbf{x}'' \Leftrightarrow v(\mathbf{x}') > v(\mathbf{x}'') \tag{5.96}$$

Desse modo, se v de fato reflete a preferência de quem decide, o problema se resume em encontrar uma alternativa $a \in \mathrm{R}$ que maximize a função $v[\mathrm{X}(a)]$. Seguem alguns exemplos típicos de função valor envolvendo dois atributos:

$$v(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2, & \text{com } c_1 > 0, \quad c_2 > 0 \\ x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, & \text{com } \alpha > 0, \quad \beta > 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 (x_1 - b_1)^{\alpha} (x_2 - b_2)^{\beta} \end{cases} \tag{5.97}$$

5.10.5. Taxa marginal de substituição

Imagine-se andando sobre uma curva de indiferença no sentido da direita para a esquerda, ou seja, valores do atributo x sendo renunciados em favor de valores do atributo y (ver Figura 5.28). A questão que se posta é determinar o quanto do objetivo X pode ser renunciado em troca de um delta (Δ) de acréscimo no objetivo Y. Em outras palavras, a questão é determinar a taxa marginal de substituição. É evidente que a taxa marginal de substituição depende do nível de indiferença e do ponto em que se encontra no espaço de consequência. Por definição, se em um determinado ponto (x_1, y_1) um gerente de projeto se dispõe a renunciar $\lambda\Delta$ unidades do objetivo X em troca de Δ unidades do objetivo Y, então está admitindo que a taxa marginal de substituição de X por Y em (x_1, y_1) é λ.

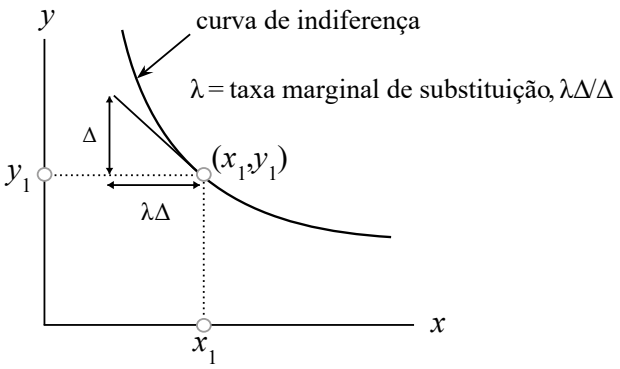


Figura 5.28 – Taxa marginal de substituição.

De acordo com Raiffa e Keeney (1993), a taxa marginal de substituição entre X e Y depende de Y e não depende de X se a função valor *v* puder ser escrita sob a forma

$$v(x,y) = x + v_Y(y) \tag{5.98}$$

onde v_Y é uma função valor referente ao atributo Y. No entanto, na prática e em geral, a taxa de substituição em um ponto (x_1, y_1) depende tanto de x_1 como de y_1. Um caso especial de taxa marginal de substituição ocorre quando essa taxa não depende dos valores de x_1 e y_1. Nesse caso, a curva de indiferença pode ser escrita sob a forma $x + \lambda y = k$, que resulta na seguinte função valor

$$v(x,y) = x + \lambda y \tag{5.99}$$

Em decisão sobre projetos de produção de petróleo que envolvem múltiplos parâmetros de avaliação, o trabalho seria facilitado se a estrutura de preferência fosse aditiva. Por definição, uma curva de preferência (ou uma estrutura completa de níveis de preferência) é dita aditiva se houver uma função valor que reflita a estrutura de preferência e possa ser escrita sob a forma

$$v(x,y) = v_X(x) + v_Y(y) \tag{5.100}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.8 – Verifique se a função valor a seguir é aditiva.

$$v_1(x,y) = (x - \alpha_1)^{\alpha_2}(y - \beta_1)^{\beta_2} \tag{5.101}$$

Solução

Note que a Eq. (5.101) pode ser escrita sob a seguinte forma

$$\log v_1(x,y) = \alpha_2 \log(x - \alpha_1) + \beta_2 \log(y - \beta_1) \tag{5.102}$$

e, fazendo $v = \log v_1$, chega-se à forma da Eq. (5.100). Trata-se, portanto, de uma função valor aditiva.

▪▪▪▪▪▪

5.10.6. Problema de decisão com três atributos

Quem decide sobre investimentos em projetos de E&P pode se deparar com um problema em que dois objetivos adicionais são somados ao VLP do investimento, como por exemplo:

- Não ultrapassar um limite de queima de gás na plataforma.
- Reduzir o custo operacional de injeção de água para valores mínimos.

Para descrever esses dois objetivos e o VPL do projeto são necessários três atributos, X, Y e Z. Estes são os atributos que definirão o espaço de avaliação das *n* alternativas disponíveis. Ainda de acordo com Raiffa e Keeney (1993), por definição uma consequência (x', y') é preferível condicionalmente a (x'', y'') para um dado z', se e somente se, (x', y', z') for preferível em relação a (x'', y'', z''). De modo geral, cada par de consequência (x', y') depende dos valores atribuídos a z'. Por exemplo, a taxa marginal de substituição em algum ponto (x', y') pode depender de z' (ver Figura 5.29).

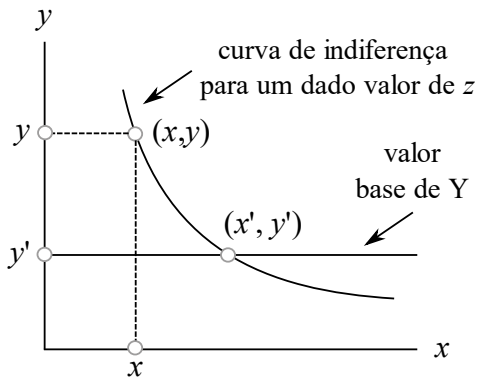


Figura 5.29 – Redução de dimensão – três atributos.

Quando isso não ocorre, diz-se que o par de atributos X e Y é preferencialmente independente do atributo Z, ou seja:

$$(x_1, y_1, z) > (x_2, y_2, z), \quad \text{para todo } z \tag{5.103}$$

Se (x, y) depende de z, então é possível proceder uma redução de dimensão, desde que cada curva de indiferença (x, y) no espaço de consequência intercepte uma reta $y = y'$ para uma dada escolha de y'. O valor y' é considerado, para essa análise, como o valor base de Y.

Note que, seguindo a curva de indiferença, o ponto (x, y) depende de x' e da escolha de y'. Ou, de modo semelhante, o ponto x' depende de duas variáveis, de (x, y) e y'. É justificável, portanto, que se desenvolva uma transformada que reduza a dimensão quanto ao número de variáveis, como por exemplo,

$$x' = \mathrm{T}(x, y; y') \tag{5.104}$$

reduzindo a solução do problema de decisão de três atributos para uma decisão de escolha entre dois atributos, ou seja

$$(x'_1, z_1) \quad \text{e} \quad (x'_2, z_2) \tag{5.105}$$

para um dado y'. A operação aditiva, para o caso de três parâmetros, difere do caso de dois parâmetros, conforme se pode observar no teorema em que afirma que uma função valor pode ser expressa na forma aditiva

$$v(x, y, z) = v_{\mathrm{X}}(x) + v_{\mathrm{Y}}(y) + v_{\mathrm{Z}}(z) \tag{5.106}$$

onde $v_X(x)$, $v_Y(y)$ e $v_Z(z)$, são funções simples dos atributos X, Y e Z, respectivamente, se e somente se, {X, Y} for preferencialmente independente de Z, {X, Z} for preferencialmente independente de Y e {Y, Z} for preferencialmente independente de Y. No caso de uma dimensão maior que três parâmetros, a propriedade aditiva para a função valor $v(x_1,x_2, \ldots , x_n)$ é válida se cada par de atributos for independente dos demais atributos remanescentes[53].

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5.9 – Admita que um gerente tenha que decidir entre dez alternativas indicadas pela equipe de engenheiros de reservatórios para um projeto de produção de petróleo. Os objetivos a serem atendidos são o VPL ($ bi), o volume total de produção N_p (10^6 bbl), a produtividade dos empregados R_e ($ MM/bbl) e a queima de gás G_{queima} (10^6 m^3 *std*). As alternativas, com seus respectivos valores, estão indicadas na Tabela 5.16.

Tabela 5.16 – Alternativas de projetos de E&P

Alternativas	VPL (↑) $ bi	N*p* (↑) 10^6 bbl	R*e* (↑) $ MM/bbl	G_{queima} (↓) 10^6 m^3 *std*
A_1	11,00	0,90	1,41	3,56
A_2	13,90	1,09	1,51	2,45
A_3	13,80	1,10	1,45	2,60
A_4	9,80	1,20	1,26	3,12
A_5	12,10	0,95	1,43	2,90
A_6	13,60	1,02	1,26	2,60
A_7	11,90	1,02	1,32	2,50
A_8	10,20	0,98	1,29	3,50
A_9	11,90	1,07	1,35	3,21
Pior resultado	9,70	0,85	1,26	3,56
Melhor resultado	13,90	1,20	1,51	2,40

Utilize a seguinte estrutura de pesos para os quatro atributos:

$$\lambda_1(\text{VPL}) = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2(N_p) = \dfrac{\lambda_1}{2} \\ \lambda_3(R_e) = \lambda_4(G_{queima}) \end{cases} \tag{5.107}$$

Considere que cada par de atributos é preferencialmente independente dos demais. A partir dessas observações, indique uma estrutura de preferência para subsidiar o problema de decisão envolvendo os múltiplos objetivos e decida que alternativa deve ser adotada pelo gestor.

Solução

Uma forma para visualizar a dominância entre as alternativas é ajustar os valores dos atributos expondo-os em uma mesma estrutura de escala, conforme indicado na Figura 5.30.

[53] A prova desse teorema está além dos objetivos deste livro.

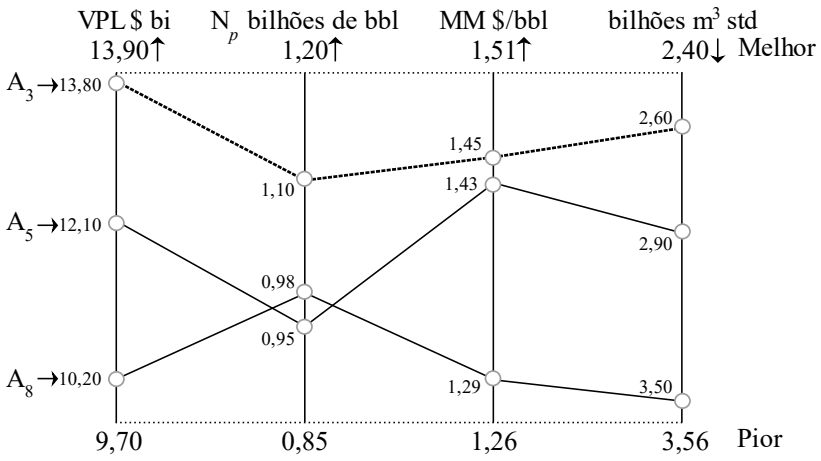


Figura 5.30 – Perfil normalizado dos quatro atributos.

Isto possibilita visualizar, de forma consistente, a dominância entre as alternativas. Em relação ao quarto parâmetro, observe que, quanto menor for o seu valor, melhor é o resultado. Como se nota, a alternativa A_3 tem predominância sobre as alternativas A_5 e A_8, considerando-se, neste caso, que todos os atributos gozem do mesmo peso na avaliação de preferência. Se os pesos de cada atributo forem diferentes, é impossível determinar a dominância observando-se apenas o esquema da Figura 5.30. Com essas considerações, a propriedade da adição para a função valor *v* pode ser expressa, nesse caso, do seguinte modo:

$$v(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i(x_i) \tag{5.108}$$

onde

$$\left.\begin{matrix} v_i(\text{pior } x_i) = 0 \\ v_i(\text{melhor } x_i) = 1 \\ 0 < \lambda_i < 1, \qquad i = 1,2,3,4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 \tag{5.109}$$

A Figura 5.31 a seguir é obtida normalizando a função *v* para valores entre 0 e 1, e adotando-se a estrutura de pesos da Eq. (5.107). Conclui-se que a alternativa A_2 é a mais promissora e a alternativa A_8 é a menos indicada, conforme indica o gráfico (b).

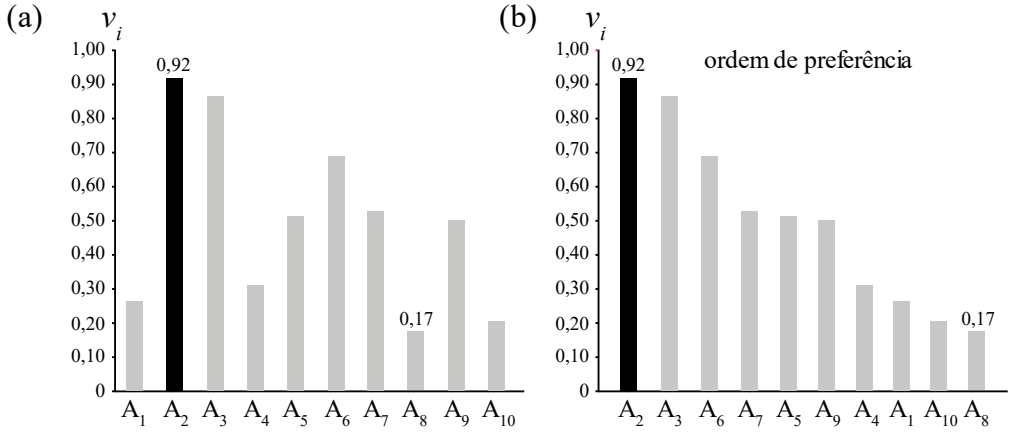


Figura 5.31 – Função valor das dez alternativas.

▪▪▪▪▪▪

6

MÉTRICAS DE RISCO E PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS

Há grandes homens que fazem com que todos se sintam pequenos. Mas o verdadeiro grande homem é aquele que faz com que todos se sintam grandes.

Gilbert Chesterton

Em algumas situações, uma operadora de petróleo optará por investir em um ativo financeiro a investir em um projeto de produção, ou otimizar seu portfólio com ativos financeiros de maior retorno para o mesmo nível de risco dos projetos. O gestor financeiro da operadora, por exemplo, que almeje diversificar o portfólio da empresa, demonstrará interesse se os ativos disponíveis no mercado tiverem valores justos. Esse valor é estimado com base em modelos de precificação disponíveis na literatura, que ajudarão o gestor a decidir quais ativos selecionar para diversificar a carteira de investimento.

Esse tema, incluindo métricas de risco, é parte da análise de investimento em projetos de produção de petróleo. O custo de oportunidade dos projetos de produção, por exemplo, pode ser estimado com modelos de precificação dos ativos de mercado, que quase sempre estarão à disposição do investidor.

Neste capítulo são indicadas algumas métricas de risco de apoio à tomada de decisão e alguns modelos de precificação de ativos derivados do CAPM e da teoria de diversificação de Markowitz (1952). Ao final do capítulo são apresentadas a solução clássica de Black e Scholes (1973) e o método de Cox, Ross e Rubinstein (1979) sobre precificação de opções financeiras.

6.1. Métricas de Risco

As métricas são medidas quantificáveis usadas, por exemplo, para avaliar a eficácia de uma estratégia de investimento, o resultado de um projeto, um processo de gestão ou uma simples ação de correção. São muitas as métricas, e as de interesse deste capítulo são as que se referem ao risco dos investimentos em projetos de produção de petróleo. Existem métricas de riscos elementares, que são baseadas na média-variância, e outras relacionadas à teoria dos valores extremos, mais focadas nos eventos raros.

6.1.1. Retorno e métrica básica de risco

a) Métrica de retorno

Existem formas diferentes para o cálculo do retorno. Por exemplo, para o caso de um ativo financeiro negociado em bolsas de valores, o retorno nominal, denominado também de retorno aritmético, pode ser expresso como

$$r_t = \frac{d_t + (p_t - p_{t-1})}{p_{t-1}} \tag{6.1}$$

onde d_t é o dividendo, t é o tempo e p é o preço do título. O retorno efetivo é obtido descontando-se a taxa de inflação incorrida no intervalo de tempo considerado, ou seja

$$(r_t)_{\text{efetivo}} = \frac{1 + (r_t)_{\text{nominal}}}{1 + f} - 1 \tag{6.2}$$

onde f é a taxa de inflação. Se o tempo é de k períodos, resulta na seguinte formulação para o retorno:

$$r_{t,k} = \left[\prod_{i=0}^{k-1}(1 + r_{t-1})\right] - 1 \tag{6.3}$$

É comum utilizar o logaritmo natural do retorno aritmético, resultando

$$r_t = \ln(1 + r_t) = \ln\frac{p_t}{p_{t-1}} \Leftrightarrow r_{t,k} = \sum_{i=0}^{k+1} r_{t-i} \tag{6.4}$$

A vantagem do logaritmo natural é que, para múltiplos períodos, o retorno é composto pela simples soma dos retornos de cada período e, para retornos pequenos, o valor do retorno logarítmico se aproxima do retorno aritmético. Em condições de incerteza, o retorno esperado de um ativo é obtido com as seguintes expressões:

$$\mathrm{E}(r) = \sum_{i=1}^{n} p(r_i)r_i \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_i)r_i dr \tag{6.5}$$

onde $p(r_i)$ e $f(r_i)$ são as funções densidade do retorno, discreta e contínua, respectivamente. A Figura 6.1, por exemplo, indica os retornos mensais durante o período de 2000 a 2004 dos ativos PETR4 e VALE5.

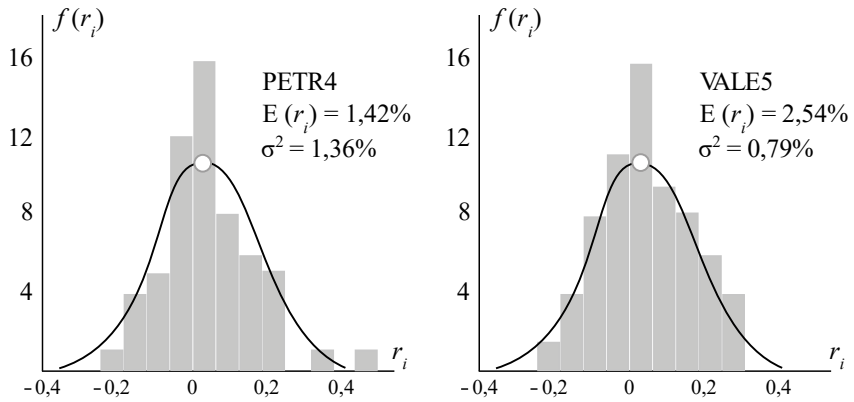


Figura 6.1 – Retornos mensais dos ativos PETR4 e VALE5 (2000 a 2004).

Dado o retorno esperado de cada ativo $\mathrm{E}(r_i)$, por conseguinte, o retorno esperado de uma carteira com n ativos é uma média ponderada pelo peso de cada ativo na carteira, portanto:

$$\mathrm{E}(r_c) = [w_1\mathrm{E}(r_1) + w_2\mathrm{E}(r_2) + \ldots + w_n\mathrm{E}(r_n)] = \sum_{i=1}^{n} w_i\mathrm{E}(r_i) \tag{6.6}$$

onde w_i é o peso, em percentual, do ativo i na carteira.

b) Métrica convencional de risco

Se a função densidade dos retornos de um ativo for conhecida, o risco pode ser mensurado pela sua variância. Dito de outra forma, a probabilidade de ocorrência de valores abaixo ou acima do valor esperado depende da variância dessa distribuição. Nesse sentido, a incerteza decorre do range quanto ao retorno esperado e o risco decorre do conhecimento da variância dos retornos ao longo do tempo. Por exemplo, durante o período de 2000 a 2004, os retornos mensais da VALE5 apresentaram uma variância menor que a PETR4 para o mesmo período (ver Figura 6.1). Assim, pode-se afirmar que incorreu em menor risco quem investiu na VALE5 durante aquele período.

Quando se trata de uma carteira de ativos, de acordo com a moderna teoria de portfólio, além do valor esperado e da variância de cada ativo da carteira, faz-se necessário conhecer a correlação (ou covariância) entre seus ativos. Esse é o modelo de média-variância proposto por Markowitz em 1952, que revolucionou a teoria de portfólio até então. A covariância entre duas variáveis aleatórias x e y com valores esperados $E(x) = \mu_x$ e $E(y) = \mu_y$ é uma medida de como duas variáveis variam conjuntamente, conforme a expressão

$$\text{Cov}(x,\ y) = \text{E}\left[(x - \mu_x)(y - \mu_y)\right] \tag{6.7}$$

ou

$$\text{Cov}(x,\ y) = \sigma_{xy} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right] \tag{6.8}$$

onde $\text{Cov}(x, x) = \sigma_x = \text{E}[(x - \mu_x)^2]$. Aplicando a Eq. (6.8) para os retornos de dois ativos, por exemplo, resulta:

$$\text{Cov}(r_1,\ r_2) = \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \tag{6.9}$$

onde σ_1 e σ_2 são os desvios-padrão dos retornos dos ativos 1 e 2 respectivamente, e $\rho_{1,2}$ é o coeficiente de correlação entre os retornos, calculado como

$$\rho_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{1i} - \mu_1)(r_{i2} - \mu_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_{1i} - \mu_1)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_{2i} - \mu_2)^2}} \tag{6.10}$$

Para o caso de uma carteira com dois ou três ativos, suas variâncias são:

$$\sigma_c^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \tag{6.11}$$

e

$$\sigma_c^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + 2w_1w_3\rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3 + 2w_2w_3\rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 \tag{6.12}$$

respectivamente, onde w_1, w_2 e w_3 são as participações de cada ativo na carteira.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.1 – Com os resultados apresentados na Figura 6.1, calcule o coeficiente de correlação entre os ativos PETR4 e VALE5 e o risco de uma carteira composta com 50% de cada ativo durante o período de 2000 a 2004, sabendo que a covariância entre os papéis é de 0,002.

Solução

Aplicando os dados na Eq. (6.9), obtém-se o coeficiente de correlação

$$\rho_{1,2} = \frac{\text{Cov}(r_1,\ r_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{0{,}002}{\sqrt{1{,}36}\sqrt{0{,}79}} = 0{,}193 \tag{6.13}$$

O risco da carteira com 50% de cada ativo é determinado com a Eq. (6.11), ou seja,

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 1{,}36\% + \left(\frac{1}{2}\right)^2 0{,}79\% + 2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}193\cdot\sqrt{1{,}36\%}\cdot\sqrt{0{,}79} \cong 0{,}64\% \tag{6.14}$$

▪▪▪▪▪▪

Segundo Markowitz (1952), o risco de uma carteira de ativos pode ser minimizado diversificando-a, ou seja, combinando os ativos de modo apropriado. A diminuição do risco depende da correlação dos ativos que compõem a carteira e da quantidade de ativos. No caso de uma carteira com dois ativos, Eq. (6.11), constata-se que se houvesse uma correlação negativa perfeita entre eles, ou seja, $\rho_{1,2} = -1$, o risco da carteira seria reduzido ao seu valor mínimo. Observe que, para $\rho_{1,2} = 0$, o último termo da Eq. (6.11) resulta nulo e para $\rho_{1,2} = +1$, resulta positivo.

Ocorre que os ativos, de um modo geral, têm correlações de dependência, isto é, têm covariâncias positivas que limitam os benefícios da diversificação. A tese defendida por Harry Markowitz na Universidade de Chicago, em 1952, foi um marco no que se referia à métrica de risco para investimentos em ativos financeiros.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.2 – Com os dados constantes na Tabela 6.1 a seguir, estime o retorno esperado e o risco da carteira formada pelos ativos A e B para $\rho_{A,B} = 1$, 0 e - 1.

Tabela 6.1 – Dados – Exemplo 6.2

Ativo	σ	*w*	*r*
A	20%	1/3	18%
B	10%	2/3	19%

Solução

O retorno da carteira é uma média ponderada de cada ativo que a compõe, assim

$$r_c = \sum w_i r_i = w_A r_A + w_B r_B = \frac{1}{3} \times 18\% + \frac{2}{3} \times 19\% = 12\% \tag{6.15}$$

Assumindo os dados na Eq. (6.11), a medida de risco (desvio-padrão) da carteira resulta:

$$\sigma_c = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B} \tag{6.16}$$

ou

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 0,2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 0,1^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \times 0,2 \times 0,1 \rho_{A,B}} = \sqrt{0,0089 + 0,0089 \rho_{A,B}} \tag{6.17}$$

Se

- $\rho_{A,B} = 1 \rightarrow \sigma_c = 13,33\%$ (que é a média ponderada dos desvios-padrão).
- $\rho_{A,B} = 0 \rightarrow \sigma_c = 9,43\%$ (redução do risco com a diversificação).
- $\rho_{A,B} = -1 \rightarrow \sigma_c = 0\%$ (redução máxima do risco).

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.3 – A Tabela 6.2 a seguir indica o valor esperado dos retornos diários, desvio-padrão, coeficiente de correlação entre ativos e as composições de carteiras obtidas a partir de quatro papéis negociados na B3[54] durante o ano de 2010 (PETR3, EMBR3, USIM3 e VALE3). Com base nesses dados, avalie o retorno espe-

[54] B3 é a fusão da BOVESPA, BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros) e CETIP (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos). A BM&FBOVESPA foi o resultado da fusão da BOVESPA e BM&F em 2008, e em 2017 se deu a fusão das três, dando origem à B3. Neste livro, B3 é usado com mais frequência, independentemente do tempo em que foram negociados os ativos financeiros.

rado e o risco de cada carteira. Elabore um gráfico de retorno esperado versus o desvio padrão de ativos e de carteiras e comente os resultados.

Tabela 6.2 – Retorno diário e desvio-padrão de papéis negociados na B3[55] (2010)

Ativos	PETR3	EMBR3	USIM3	VALE3
$E(r_i)$	–0,110%	0,105%	–0,252%	0,057%
σ_i	1,94%	1,83%	3,94%	1,86%
PETR3	1,0	–0,3	0,6	0,7
EMBR3	–0,3	1,0	0,5	–0,2
USIM3	0,6	0,5	1,0	0,8
VALE3	0,7	–0,2	0,8	1,0
Carteira 1	–	80%	–	20%
Carteira 2	10%	35%	15%	40%
Carteira 3	25%	30%	5%	40%
Carteira 4	30%	30%	–	40%
Carteira 5	10%	25%	5%	70%

Solução

Aplicando os dados da Tabela 6.2 na Eq. (6.6), resulta o retorno esperado para a carteira 1:

$$\mathrm{E}(r_{c1}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(r_i) = 0{,}8 \times (0{,}105) + 0{,}2(0{,}057) = 0{,}095\% \tag{6.18}$$

De modo semelhante, os retornos esperados das demais carteiras são:

$$\mathrm{E}(r_{c2}) = 0{,}011\%, \quad \mathrm{E}(r_{c3}) = 0{,}014\%, \quad \mathrm{E}(r_{c4}) = 0{,}021\%, \quad \mathrm{E}(r_{c5}) = 0{,}043\% \tag{6.19}$$

Para a carteira 1, composta por dois ativos, pode-se avaliar o risco pela variância (ou desvio-padrão) indicado na Eq. (6.11), resultando

$$\sigma_{c1}^2 = (0{,}8 \cdot 0{,}0183)^2 + (0{,}2 \cdot 0{,}0186)^2 + +2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot (-0{,}2) \cdot 0{,}0183 \cdot 0{,}0186 = 0{,}0206\% \tag{6.20}$$

As demais variâncias são:

$$\sigma_{c2}^2 = 0{,}0250\%, \quad \sigma_{c3}^2 = 0{,}0176\%, \quad \sigma_{c4}^2 = 0{,}0144\%, \quad \sigma_{c5}^2 = 0{,}0258\% \tag{6.21}$$

Note que a carteira 1 é a que apresenta maior retorno esperado, porém não é a de menor risco. A Figura 6.2 indica o retorno esperado diário *versus* o desvio-padrão de ativos e de carteiras.

[55] As médias e os desvios-padrão são de 246 amostras diárias (entre 04/01/2010 e 30/12/2010). Os coeficientes de correlações da Tabela 6.2 são hipotéticos e não foi considerado o pagamento de dividendos.

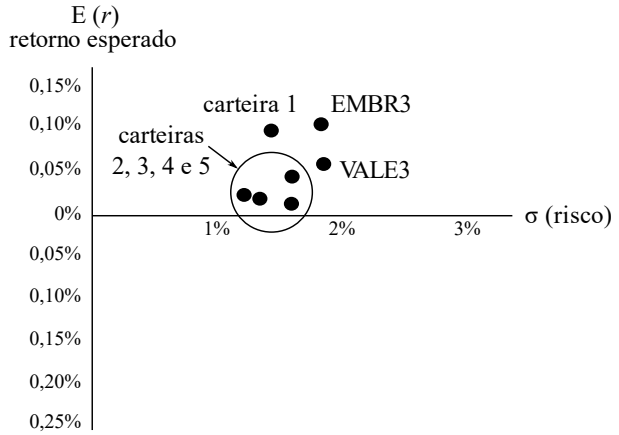


Figura 6.2 – Retorno esperado *versus* desvio-padrão (ativos e carteiras).

Observe que mesmo com ações apresentando retornos negativos (PETR3 e USIM3) durante o ano de 2010, é possível formar carteiras com estes ativos e outros de forma a obter retornos positivos. Note também que a carteira 1 apresenta um retorno esperado muito próximo do ativo EMBR3, mas em um nível de risco mais favorável. Entre os quatro papéis, a USIM3 foi a que apresentou o menor retorno esperado e a maior volatilidade durante o ano de 2010, seguido da PETR3.

▪▪▪▪▪▪

Se esse exemplo for refeito com muitas carteiras compostas por diversas ações, resulta uma nuvem de pontos na qual é possível estabelecer uma linha demarcatória de pontos representativos de carteiras com maiores retornos esperados para um determinado nível de risco. Esse é o conceito de diversificação e de fronteira eficiente apresentado por Markowitz. Para o caso de um portfólio com ativos, o risco é mensurado com a expressa

$$\sigma_c = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \,\mathrm{Cov}(i,j)\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(w_i^2 \cdot \sigma_i^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} w_i w_j \,\mathrm{Cov}(i,j)\right]^{1/2} \tag{6.22}$$

Observe que, à medida que diminui a covariância entre os ativos, o risco da carteira também diminui. Note também que, quando $i = j$, significa que o ativo i (ou j) está combinado com ele mesmo e $\rho_{i,j} = 1$. De forma mais conveniente, pode-se também reescrever a variância da carteira com ativos como:

$$\text{variância da carteira} = \frac{1}{\mathrm{N}} \times \text{variância média} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}}\right) \times \text{covariância média} \tag{6.23}$$

de forma que as médias são em termos de variância e covariância dos ativos ponderados pelas participações na carteira. Observe que, se a quantidade N de ativos for suficientemente grande, a variância da carteira aproxima-se da covariância média. Um fundo mútuo de ações, por exemplo, se a covariância média for nula. O risco é praticamente nulo se houver uma quantidade suficientemente grande de ações.

c) Risco diversificável e não diversificável

Entende-se por risco diversificável a parcela da variabilidade total do retorno de um ativo financeiro referente aos fatores específicos do ativo. É um risco endógeno e tem correlação zero com os movimentos macroeconômicos do mercado. Esse tipo de risco está associado ao nível de gestão da empresa (eficiência corporativa, modelo de gestão, greves, lançamento de produtos etc.).

O termo é também conhecido como risco específico ou risco não sistemático e pode ser reduzido pelo princípio da diversificação. O risco não diversificável, ou risco sistemático, é o risco de mercado. Este é resultado de decisões macroeconômicas e não pode ser reduzido pelo princípio da diversificação.

d) Arbitragem

Conforme Varian (1987), entende-se por arbitragem, termo utilizado no mercado financeiro, as operações de compra e venda de ativos com o objetivo de ganho sobre a diferença de preços cotados entre dois mercados. Em tese, é uma operação de baixo risco, na qual quem arbitra aproveita para auferir ganhos enquanto o preço do ativo ainda não se ajustou segundo as leis de mercado.

Por exemplo, quando um mesmo ativo é cotado em dois mercados, compra-se o ativo no mercado com cotação mais baixa e vende-o em outro com maior cotação, obtendo resultados positivos. Essas operações são comuns no câmbio e entre bolsas de valores. De modo geral, de acordo com a lei da oferta e da procura, a arbitragem acaba por convergir os preços dos ativos de diferentes mercados.

Como assinala Farhi (1998), as operações de arbitragem ocorrem também na mesma praça sobre o mesmo ativo com temporalidade diferente ou até envolvendo ativos diversos, mas com grau de correlação nos movimentos de seus preços. Trata-se de uma operação de duas pontas, se uma das pontas é liquidada e a outra mantida em aberto, a operação passa a ser especulativa. Boa parte da atenção dos operadores e dos recursos das instituições financeiras, mesmo as mais conservadoras, é consagrada às operações de arbitragem.

6.1.2. Fundamentos da dispersão como métrica de risco

Não há métrica perfeita para o risco e, na maioria das vezes, as medidas de dispersão são usadas para mensurá-lo. A medida clássica de risco é a variância, expressa pela média do quadrado dos desvios em relação ao valor esperado de uma distribuição. Outra métrica, derivada desta, é o desvio padrão, a raiz quadrada positiva da variância, com a vantagem em relação àquela por ter a mesma unidade da variável aleatória. O desvio padrão é, sem dúvida, a métrica mais usual de medida de risco, sendo amplamente usada em finanças para mensurar também o risco, ainda que não seja uma métrica coerente de risco.

Se os possíveis resultados de um projeto (o VPL, por exemplo) têm uma distribuição normal cujo valor esperado é a, então existe 68,3% de chance de o resultado apresentar um VPL entre $a \pm \sigma_{VPL}$, 95,5% de chance de resultar $a \pm 2\sigma_{VPL}$ e 99,7% de resultar um valor entre $a - 3\sigma_{VPL}$ e $a + 3\sigma_{VPL}$. Note que esses resultados são aplicáveis se a variável VPL apresentar uma distribuição normal, ou seja, $VPL \sim (a, \sigma_{VPL})$. Se estratégias de produção de um campo, obtido por simulação de reservatórios, resultar uma função distribuição $f(x)$ para os respectivos VPLs dos projetos de produção, uma medida de risco seria

$$\sigma_{VPL} = \sqrt{\int (x-a)^2 f(x) dx} \tag{6.24}$$

onde a é valor esperado da distribuição. Ainda que não se conheça a distribuição do VPL é possível estabelecer limites de probabilidade em função do desvio-padrão e do valor esperado do projeto utilizando-se o teorema de desigualdade de Chebyshev, ou seja:

$$p(|X - a| > x) \leq \frac{\sigma_{VPL}^2}{x^2} \tag{6.25}$$

desde que $E|X|^2 < \infty$. O teorema de desigualdade de Chebyshev permite avaliar a probabilidade do intervalo de valores do projeto entre $a \pm k\sigma_{VPL}$ exceder $1 - 1/k^2$ ($k = 1, 2, \ldots$) com a seguinte relação:

$$p(|X - a| \leq k\sigma_{VPL}) \geq 1 - 1/k^2 \tag{6.26}$$

Por exemplo, para $k = 2$ a probabilidade do do projeto estar entre $a \pm 2\sigma_{VPL}$ é, no mínimo, de 75%. Não obstante a validade do desvio-padrão para mensurar o risco, é importante registrar que algumas distribuições têm desvio-padrão infinito, portanto, uma medida de risco para tais distribuições com base no desvio padrão não é apropriada. Nesses casos, pode-se substituir a métrica pelo desvio médio absoluto, se este for finito, definido por:

$$\overbrace{\mathrm{E}_{abs} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a| p_i}^{distribuição\ discreta} \quad \text{e} \quad \overbrace{\mathrm{E}_{abs} = \int |x - a| f(x) dx}^{distribuição\ contínua} \tag{6.27}$$

onde x_i são os possíveis resultados do VPL e p_i são as probabilidades correspondentes. Outras métricas de dispersão usadas comumente para mensurar o risco são: intervalo de variação e coeficiente de correlação.

Embora risco e incerteza sejam termos relacionados, de modo algum são sinônimos. As medidas de dispersão podem eventualmente mensurar o risco, mas são medidas de incertezas por definição. Uma métrica de risco com base no desvio-padrão apresenta algumas desvantagens. A maior delas é que o desvio-padrão penaliza igualmente tanto os desvios positivos em relação à média como os desvios negativos, o que torna esta métrica inconsistente com o conceito de aversão ao risco, sobretudo para distribuições assimétricas. Uma alternativa é adotar o desvio-padrão da cauda superior ou inferior da distribuição, ou seja

$$\sigma^{+}_{\mathrm{VPL}} = [\mathrm{E}(x - a)^2_{+}]^{1/2} \quad \text{ou} \quad \sigma^{-}_{\mathrm{VPL}} = [\mathrm{E}(x - a)^2_{-}]^{1/2} \tag{6.28}$$

onde a diferença (x - a) da primeira expressão é positiva e a segunda é negativa. Essas métricas são medidas de dispersão denominadas pelos termos *upside* e *downside*, respectivamente. Se a distribuição do VPL de um projeto ou de uma carteira de projetos tiver uma assimetria positiva, então $\sigma^{+}_{VPL} > \sigma^{-}_{VPL}$. Por outo lado, se negativa, resulta $\sigma^{+}_{VPL} < \sigma^{-}_{VPL}$. É uma medida de risco interessante, pois de modo geral os investidores estão mais atentos aos desvios negativos do que os desvios positivos em relação aos valores esperados de seus investimentos.

Não obstante a vantagem dessa métrica em relação ao desvio-padrão, ainda não é uma métrica de risco coerente, conforme Rachev *et al.* (2008). Esses autores estabeleceram alguns axiomas referentes às medidas de dispersão, de desvio e de risco. Uma métrica de dispersão $d(x)$ é coerente se atender aos seguintes axiomas:

- $d(x + \mathrm{c}) \leq d(x)$ para toda variável x e para toda constante $c \geq 0$.
- $d(0) = 0$ e $d(\lambda x) = \lambda d(x)$ para toda variável **x** e $\lambda > 0$.
- $d(x) \geq 0$ para toda variável x, com $d(x) > 0$ para todo não constante.

Por exemplo, uma medida de dispersão que satisfaz esses axiomas e é sensível ao deslocamento positivo da variável x (primeiro axioma) é definida por

$$\mathrm{colog}(x) = \mathrm{E}(x \log x) - \mathrm{E}(x)\mathrm{E}(\log x) \tag{6.29}$$

Essa medida é aplicável em finanças e é também coerente no que se refere ao conceito de aversão ao risco. De acordo com Ortobelii (2004), se um investidor avesso ao risco opta pelo retorno de um projeto A em vez de B, então colog(A) ≤ colog(B)[56].

Já uma métrica de desvio, além de atender aos dois últimos axiomas da métrica de dispersão, deve respeitar adicionalmente a seguinte propriedade: $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ para todo x e y. Para uma medida de desvio, a propriedade de deslocamento positivo (primeiro axioma) é ampliada para outra propriedade, denominada de invariante à translação, ou seja, $d(x + c) = d(x)$ para todo x e para todo $c \in \mathrm{R}$.

[56] Cologaritmo é o logaritmo do inverso de um número, ou seja, colog a = log(1/a) = -log$a$.

6.1.3. Medidas coerentes de risco

O trabalho de Rachev *et al.* (2008) ampliou o trabalho inicial de Artzner *et al.* (1999). Este formulou uma lista de axiomas para adequar uma métrica de risco ao conceito de aversão ao risco. Segundo Artzner *et al.* (1999), uma métrica ρ é coerente se respeitar os seguintes axiomas:

- $\rho(x + c) = \rho(x) - c$ para todo x e qualquer constante c.
- $\rho(0) = 0$ e $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$ para todo x e $\lambda > 0$.
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ para todo x e y.
- $\rho(x) \leq \rho(y)$ quando $x \geq y$.
- $\rho[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda\rho(x) + (1 - \lambda)\rho(y)$ para todo x e **y** e $0 \leq \lambda \leq 1$.

O primeiro axioma exige que uma métrica de risco coerente deva ser invariante à translação. Por exemplo, se x é uma variável aleatória representada pelo *payoff* de um projeto de petróleo, e a esta variável for adicionada uma quantidade c (valor monetário certo e líquido), então o risco é reduzido do mesmo valor. Note que, com base nessa métrica, para que a posição de um investimento seja livre de risco tem-se que $\rho(x) - c = 0$, resultando $\rho(x) = c$. Em outras palavras, c é o capital mínimo requerido para cobrir o risco assumido pelo projeto $\rho(x)$.

Suponha, por exemplo, que seja uma variável aleatória que represente o retorno de um projeto e que uma carteira seja formada por este projeto e um ativo com retorno livre de risco r_f (retorno não aleatório). Desse modo, o retorno desta carteira resume-se a

$$r_c = wx + (1 - w)r_f \Leftrightarrow w \in [0,1] \tag{6.30}$$

onde w é o percentual de x na carteira. Considerando que $(1 - w)r_f$ é não aleatório, tem-se que

$$\rho[wx + (1 - w)r_f] = w\rho(x) - (1 - w)r_b \tag{6.31}$$

Note que, nesse caso, foi usada também a propriedade do segundo axioma, a qual estabelece que $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$. Veja também que, se a carteira for constituída equitativamente ($w = 1/2$), uma posição de investimento livre de risco exigiria que $0{,}5\rho(x) - 0{,}5r_f = 0$, ou seja, $\rho(x) = r_f$. Assim, o capital requerido r_f é a reserva de investimento que faz jus ao risco assumido.

O segundo axioma está relacionado à escala do projeto de investimento. É intuitivo perceber que, se o retorno provável de um projeto de E&P for escalonado por um fator λ, o risco é também multiplicado pelo mesmo fator. Pode-se expandir essa propriedade fazendo uso de um exemplo hipotético. Suponha que o valor de uma carteira de projetos de E&P hoje seja I_0 e no próximo ano seja provavelmente I_1. O retorno desta carteira para o prazo de um ano é uma variável aleatória definida por $x = (I_1 - I_0)/I_0$. Admita que um novo portfólio seja constituído de um capital c adicionado hoje a esta carteira resultando um valor atual $I_0 + c$. Deste modo, o retorno deste novo portfólio é

$$Y = \frac{I_1 + c - (I_0 + c)}{I_0 + c} = \frac{I_1 - I_0}{I_0}\left(\frac{I_0}{I_0 + c}\right) = h\frac{I_1 - I_0}{I_0} \tag{6.32}$$

onde $h = I_0/(I_0 + c)$ é uma constante. Assim, o risco do novo portfólio Y será o risco do portfólio X escalonado por uma constante h. Note que, independentemente de quanto o retorno provável X seja escalonado (por exemplo, por λ), o risco quanto ao retorno será também multiplicado por λ.

O terceiro axioma estabelece o efeito da diversificação sobre o risco. Essa propriedade foi demonstrada inicialmente com o trabalho singular de Markowitz. Relembrando, a condição de igualdade desse axioma se verifica somente nos casos em que os retornos dos projetos são totalmente correlacionados.

Já de acordo com o quarto axioma, se um investimento em um determinado projeto de petróleo oriundo de uma estratégia de simulação apresentar um *payoff* aleatório X (ou um VPL aleatório X) *maior* que outra estratégia

de simulação cujo *payoff* seja definido por outra variável Y, então o projeto com base na estratégia X tem risco *menor* do que a estratégia Y. Esse axioma é intuitivo e é consistente com o conceito de aversão ao risco.

a) Valor em risco, VaR

Outra medida de risco, denominada *value at risk* (VaR, valor em risco), vem sendo utilizada com mais frequência nos últimos anos. Essa medida foi popularizada em finanças pela JP Morgan por meio do seu sistema de gestão de risco de crédito. Outras instituições já vinham utilizando essa medida em suas classificações de credores quanto à capacidade de solvência.

Por definição, o VaR expressa um nível mínimo de perda em valor financeiro (ou em termos de retorno) com alto nível de confiança (em geral de 95% ou 99%) em um horizonte de tempo prefinido. Por exemplo, se um portfólio de projeto de petróleo tem um VaR com 95% de confiança igual a 5 bilhões para um horizonte de um ano, implica dizer que esse portfólio tem uma probabilidade de 5% de resultar uma perda de no mínimo $5 bilhões em um dado ano. De outro modo pode-se dizer que, se o retorno de um projeto de $5 bilhões tem um VaR de 99% de confiança igual a 2% para um horizonte de um dia, implica dizer que a probabilidade do investidor sofrer um prejuízo mínimo de $200 mil nesse projeto em um dado dia é de 1%.

Uma das grandes vantagens dessa métrica é indicar o risco de um projeto ou de uma carteira de projetos por meio de um número. O parâmetro para o nível de confiança do VaR é (1 - α)100% e, conforme definido, perdas no mínimo igual ao indicado pelo VaR tem uma probabilidade de ocorrer. Em notação estatística, para uma variável aleatória X qualquer, o VaR com nível de confiança (1 - α)100% é definido como:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = -\inf\{x|\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) \geq \alpha\} = -\mathrm{F}_{\mathrm{X}}^{-1}(\alpha) \tag{6.33}$$

onde $\alpha \in (0,1)$, e $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}^{-1}(\alpha)$ é o inverso da função distribuição da variável X (ver Figura 6.3).

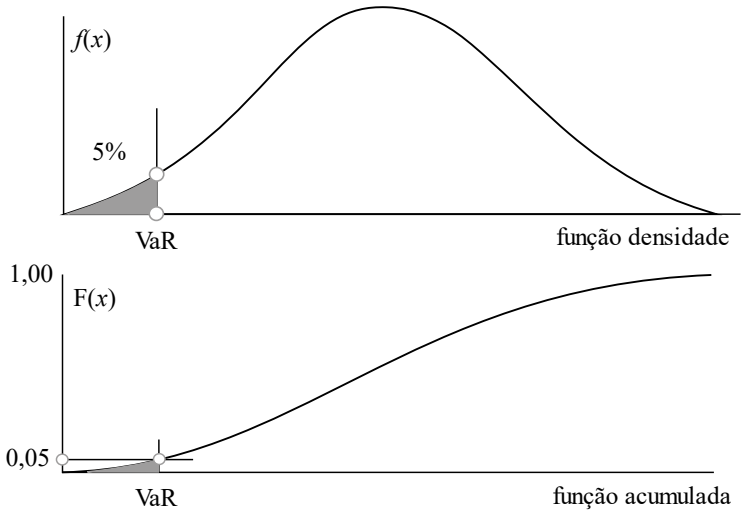


Figura 6.3 – com 95% de confiança.

Dependendo da natureza da variável aleatória em questão, o VaR pode ser interpretado de diferentes formas. Se X representa o *payoff* de um projeto de E&P, então o VaR é expresso em valores financeiros, ou seja, $\mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}^{-1}(\alpha)$, de forma que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}^{-1}(\alpha)$ é o inverso da função distribuição do *payoff*. Por outro lado, a métrica pode expressar o risco relacionado a uma diferença entre uma variável aleatória e uma constante. Por exemplo, se desejarmos avaliar o risco indicado pela diferença entre o *payoff* X e o valor presente V_0 do projeto, tem-se que

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X} - \mathrm{V}_0) = -\inf\{x|p(\mathrm{X} - \mathrm{V}_0 \leq x) \geq \alpha\} = \mathrm{V}_0 - \mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) \tag{6.34}$$

Note que, pode definição, o VaR pode ser um valor negativo. Isto implica que há uma probabilidade α de ocorrer um ganho e não uma perda. Nesse caso, no sentido estrito, não se trata de uma medida de risco. Ressalte-se que a métrica requer condições normais do mercado e posição inalterada para aquele projeto ou carteira específica. Eventos extremos não são refletidos nessa métrica. Por exemplo, nada se pode afirmar em relação aos percentuais menores que 1% ou 5%, que dependendo da distribuição de eventos futuros, podem representar perdas extraordinárias.

De acordo com a Eq. (6.34), a métrica de risco atende ao primeiro axioma de medidas coerentes para o risco, ou seja $\text{VaR}_\alpha(X - c) = \text{VaR}_\alpha(X) - c$. Por outro lado, essa métrica não é adequada para captar efeitos de diversificação em um portfólio de investimento, uma vez que, em algumas situações de carteira envolvendo ativos livres de risco, tem-se que $\text{VaR}_\alpha(X + Y) > \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$. Em outras palavras, o VaR não reconhece qualquer efeito de diversificação. Assim mesmo, é uma métrica útil para reportar o risco como uma característica da distribuição do retorno de um portfólio, desde que interpretada tal como definida.

Como medida de risco, o VaR apresenta um aspecto diferenciado em relação às demais medidas. Seu valor, por exemplo, pode ser usado para indicar a reserva de capital necessária para cobrir o risco de mercado, seja para proteção de um projeto, portfólio ou mesmo um empréstimo. Outra particularidade dessa métrica é que, ao se referir a eventos de baixa frequência, a teoria do valor extremo (EVT) pode suprir lacunas relacionadas aos projetos de grandes incertezas que outras medidas de dispersão não o fazem, sobretudo para projetos de petróleo relacionados ao desenvolvimento de áreas adversas como o pré-sal brasileiro.

É importante registrar que essa métrica, por se fundamentar totalmente na distribuição da variável em questão, implica que qualquer hipótese irreal assumida para a distribuição acarretará subestimação ou superestimação do real valor do risco. Ademais, se a distribuição dos retornos é obtida a partir de dados históricos, deve-se assumir que a mesma tendência irá se configurar no futuro. Essa suposição não é realista, pois eventos extremos podem ocorrer no futuro.

Outra suposição pouco provável da distribuição é que as observações são consideradas independentes e identicamente distribuídas, *i.i.d*. Não obstante, sabe-se que variáveis econométricas exibem fenômenos de volatilidades sazonais e de autocorrelações. Mais ainda, para uma estimativa confiável de VaR de 99%, seria necessário um histórico de 5000 observações. Assim, para um VaR de um dia seriam necessárias observações de 20 anos de histórico (1 ano ≈ 250 observações).

A título de curiosidade, em meados da década de 1990, a medida foi validada por agências reguladoras para o cálculo da reserva de capital necessária para cobrir o risco de mercado. O Comitê de Supervisão Bancária de Basileia[57], em uma de suas revisões de recomendações para as instituições financeiras, instruiu para que fizessem o cômputo internamente da reserva de capital baseado na métrica VaR. Em geral, os valores recomendados para reserva de capital são de três a quatro vezes o VaR.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.4 – Imagine uma operadora de petróleo com uma carteira de projetos de exploração de pequenos campos *onshore*, cujos retornos sobre os investimentos sejam variáveis aleatórias denotadas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e considere que $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sejam os pesos de cada projeto nesse portfólio. Aplique analiticamente o conceito da métrica de risco para esse portfólio.

[57] Basel Committee on Banking Supervision – organização criada em 1974 pelos presidentes dos bancos centrais dos países do G-10 que visa fortalecer a solidez de seus sistemas financeiros. Reúne-se normalmente no Banco de Compensações Internacionais – Basileia (Suíça).

Solução

De acordo com o enunciado, o retorno desse portfólio r_c fica definido por

$$r_c = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n \tag{6.35}$$

A métrica VaR é derivada, portanto, da distribuição de r_c. Aqui surgem algumas suposições. Considerando-se que os retornos de cada projeto são distribuídos normalmente, o cálculo a ser feito para obter o VaR resume-se apenas ao cálculo do valor esperado $\mathrm{E}(r_c)$ e do desvio padrão σ_c^2. Esses parâmetros são calculados com as seguintes formulações:

$$\mathrm{E}(r_c) = w_1 \mathrm{E}(x_1) + w_2 \mathrm{E}(x_2) + \ldots + w_n \mathrm{E}(x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(x_i) \tag{6.36}$$

e

$$\sigma_c^2 = w_1^2 \sigma_{x1}^2 + w_2^2 \sigma_{x2}^2 + \ldots + w_n^2 \sigma_{xn}^2 + \sum_{i \neq j}^{n} w_i w_j \, \mathrm{Cov}(x_i, x_j) \tag{6.37}$$

Note que a variância do portfólio é a média ponderada de todas as variâncias dos ativos, incluindo a covariância entre cada par constituinte do portfólio. A Eq. (6.37) nada mais é do que a aplicação da teoria de diversificação de Markowitz. Por se tratar de uma distribuição normal, se $r_c \in \mathrm{N}[\mathrm{E}(r_c), r_c^2]$, então

$$\frac{r_c - \mathrm{E}(r_c)}{\sigma_c^2} \in \mathrm{N}(0,1) \tag{6.38}$$

Assim, fazendo uso da propriedade do primeiro e segundo axioma, por meio do qual se estabelece que VaR(X - *c*) = VaR(X) - *c* e VaR(λX) = λVaR(X), o VaR, com 99% de confiança, pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\mathrm{VaR}_{0,01}(r_c) = q_{0,99}\sigma_c - \mathrm{E}(r_c) \tag{6.39}$$

onde o desvio padrão é dado pela Eq. (6.37), e o retorno esperado do portfólio é calculado pela Eq. (6.36). O valor de *q* é o percentil 99% da distribuição normal padrão. De modo geral,

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(r_c) = q_{(1-\alpha)}\sigma_c - \mathrm{E}(r_c) \tag{6.40}$$

onde α é a probabilidade de ocorrer uma perda mínima refletida pelo VaR com grau de confiança (1 - α)%.

▪▪▪▪▪▪

b) Valor em risco ponderado, AvaR

Embora a métrica VaR seja amplamente utilizada por setores financeiros de algumas indústrias, é uma medida inapropriada para avaliar risco de portfólio de uma carteira de projetos, pois não reconhece efeitos de diversificação. O *valor em risco esperado* (AvaR) é superior, pois além de suprir a deficiência da métrica VaR, tem uma interpretação igualmente intuitiva. Ademais, a métrica AvaR atende a todos os axiomas de uma métrica coerente.

Para entender a informação revelada na métrica AvaR e sua diferença em relação ao valor não ponderado,VaR, observe a Figura 6.4 a seguir. Admita que X e Y descrevam os retornos aleatórios referentes a dois projetos de E&P com suas respectivas função densidade e função distribuição acumulada.

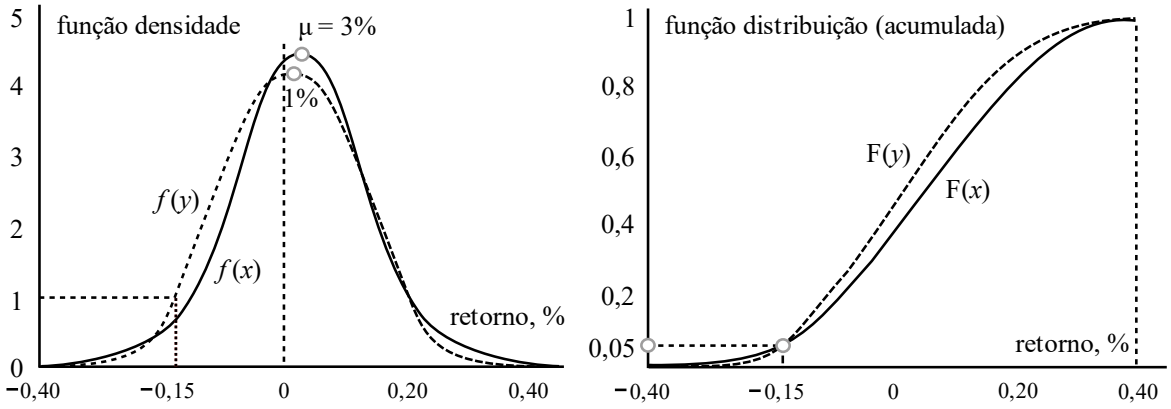


Figura 6.4 – Função densidade e função de distribuição para o retorno de dois projetos de E&P (X e Y).

O retorno esperado do projeto X é de 3% e do projeto Y é de 1%, ambos com desvio-padrão igual a 10% (0,1). Note que a função acumulada de X cruza a de Y em – 0,15, ou seja, F_X (-0,15) = F_Y (-0,15). Assim, de acordo com a definição da medida VaR, tem-se 95% de confiança que o VaR, tanto de X como de Y, é igual a 15%. Dito de outra forma, os dois projetos têm 5% de probabilidade de resultar perdas iguais ou superiores a 15% do seu valor.

Note que essa métrica nada nos informa sobre perdas com níveis de confiança maiores que 95%. No entanto, como se pode observar pela Figura 6.4, a função distribuição de X é maior que a de Y para retornos menores que – 0,15, ou seja, para um nível de confiança maior, a probabilidade de perda do projeto X é maior que a de Y. A mesma carência de informação é percebida quando se utiliza a curva de risco oriunda da distribuição acumulada para a classificação de reservas de petróleo com base nos *percentis* P10, P50 e P90.

Esse exemplo hipotético demonstra que não seria razoável avaliar o risco dos dois empreendimentos com base no desvio padrão, o que incorreria em erro de avaliação, uma vez que ambos os projetos têm a mesma dispersão quanto à incerteza. É claro que se os dois projetos apresentam resultados cujas distribuições são gaussianas e com mesmo desvio-padrão, não se verificará cruzamento das funções densidade e, por consequência, também não das funções de distribuição acumulada. Por outro lado, ainda que sejam distribuições gaussianas, mas com diferentes dispersões, os cruzamentos das funções são observados.

Avaliar também o risco com base na métrica VaR não se mostra mais prudente, pois nenhuma informação seria possível extrair quanto às perdas para níveis de confiança superiores ao indicado pela métrica. O mais indicado seria, portanto, utilizar uma métrica que reflita todo o conteúdo de interesse da distribuição, considerando os valores de perdas para níveis de confiança superiores a 95%, por exemplo. Essa é proposta da métrica AvaR. O valor ponderado do valor em risco, AvaR, também conhecido pelo termo *valor em risco condicional* (CvaR), conforme Rockafellar e Uryasev (2000), é definido com a seguinte integração:

$$\mathrm{AvaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha} \mathrm{VaR}_{p}(\mathrm{X})dp \tag{6.41}$$

onde VaR é determinado pela Eq. (6.33). Outros autores referem-se a essa métrica pelos termos *expected shortfall* ou *expected tail loss* (ETL)[58]. De acordo com a Eq. (6.41), o AvaR com probabilidade é definido como a média dos VaRs de probabilidade α com graus de confiança maiores que (1 - α)%.

[58] Rigorosamente, a métrica ETL é igual ao AVaR quando a distribuição é contínua. Em caso de descontinuidade, esses termos divergem ligeiramente quanto à interpretação.

Trata-se de uma métrica definida apenas para distribuições com médias finitas, ou seja AvaR(X) < ∞ desde que E(X) < ∞. De modo geral, as aplicações em projetos de E&P resultam distribuições com valores esperados finitos. A função que define a métrica AvaR é convexa, uma vez que atende ao axioma ρ(X+Y) ≤ ρ(X) + ρ(Y) para todo X e Y. Dessa forma, diferente da métrica VaR, aquela reconhece os efeitos de diversificação no que se refere aos riscos de mercado e é perfeitamente aplicável para avaliação de portfólios de projetos de E&P.

Uma interpretação geométrica de AvaR pode ser acompanhada pela função densidade *f*(*x*) e pela inversa da função distribuição F_X^{-1}, conforme indicadas na Figura 6.5 a seguir.

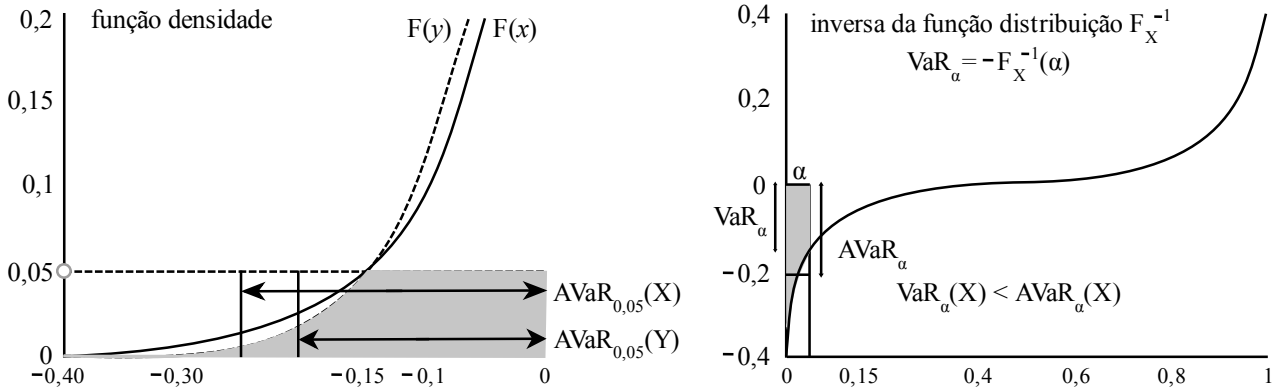


Figura 6.5 – Função densidade *f*(*x*) e função inversa F_X^{-1} – conceito de AvaR.

Conforme gráfico do lado esquerdo da Figura 6.5, o $AvaR_{0,05}(Y)$ é um número tal que, multiplicado pela altura 0,05, o produto 0,05 × $AvaR_{0,05}(Y)$ deve resultar o valor da área sombreada da função distribuição F(*y*). Note que o $AvaR_{0,05}(X)$ resulta uma área ligeiramente maior, uma vez que $AvaR_{0,05}(X) > AvaR_{0,05}(Y)$. Já tomando como base a inversa da função de distribuição acumulada, lado direito da Figura 6.5, o $AvaR_{\alpha}(X)$ é a medida da altura que, multiplicada por α, resulta a área sombreada da função inversa F_X^{-1}. Observe que $VaR_{\alpha}(X) < AvaR_{\alpha}(X)$.

O cálculo do AvaR depende, fundamentalmente, da função densidade e, na literatura, há algumas fórmulas analíticas para se obter o valor. Por exemplo, se X é uma variável aleatória que representa o *payoff* de um projeto de E&P com distribuição gaussiana, o cálculo do AvaR(x) fica definido com a seguinte expressão:

$$\mathrm{AvaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = \frac{\sigma}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{[\mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{Y})]^2}{2}\right) - \mathrm{E}(\mathrm{X}) \qquad (6.42)$$

onde Y é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, isto é Y~N(0,1). Em se tratando de dados empíricos, o cálculo do AvaR pode ser computado sem que seja parametrizada qualquer distribuição, a priori. Por exemplo, considere que o retorno de um portfólio de projetos de E&P seja de $r_1, r_2 \ldots, r_n$ para os tempos t_1, $t_2 \ldots, t_n$. Admita agora que os retornos sejam ordenados em uma sequência $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq, \ldots, \leq r_{(n)}$, de tal modo que $r_{(1)}$ seja o menor retorno observado e $r_{(n)}$ seja o maior. De acordo com Rachev *et al.* (2008), o cálculo do AvaR fica definido conforme a fórmula a seguir:

$$\mathrm{AvaR}_{\alpha}(\hat{r}) = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[n\alpha]-1} r_{(i)} + \left(\alpha + \frac{[n\alpha]-1}{n}\right) r_{[n\alpha]}\right] \qquad (6.43)$$

onde a notação [*x*] refere-se ao menor número inteiro maior que *x*. Por exemplo, [2,5]=[2,9]=3.

c) Medida Ω de Keating e Shadwick

Outra métrica coerente é o ômega Ω de Keating e Shadwick (2002), que considera todos os momentos da distribuição ao avaliar o retorno de um projeto ou de um ativo qualquer. Essa métrica pressupõe um retorno

mínimo admissível para o projeto, que divide a função distribuição em duas regiões: a região de ganho e a região de perda (ver Figura 6.6).

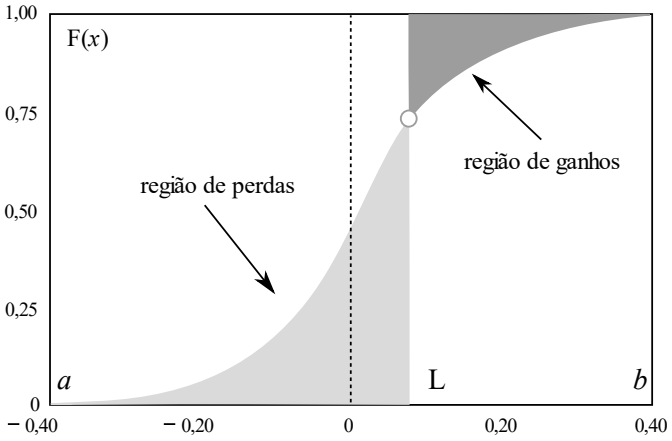


Figura 6.6 – Função distribuição – conceito da métrica Ω.

Conforme Keating e Shadwick (2002), a métrica de risco ômega Ω fica definida por

$$\Omega_{\mathrm{L}}(x) = \frac{\int_{\mathrm{L}}^{b}[1 - \mathrm{F}(x)]dx}{\int_{a}^{\mathrm{L}} \mathrm{F}(x)dx} \tag{6.44}$$

onde *x* é a variável (VPL, por exemplo), L é o valor mínimo aceitável e *a* e *b* são os valores mínimos e máximos da variável. É uma medida intuitiva, de fácil aplicação e coerente, e tem paralelo com o conceito de dominância estocástica, uma vez que capta a média-variância e os momentos superiores da distribuição, como a assimetria e a curtose. Note que é uma métrica condicionada a uma variável exógena L, que depende da aversão ou exposição ao risco definida pelo investidor.

6.2. Modelos de Precificação de Ativos

Diversos modelos de precificação foram publicados com ênfase no retorno de ativos financeiros negociados em bolsas de valores (ações, debêntures, opções etc.). O modelo CAPM é o mais popular dentre eles, muito mais em função da sua simplicidade do que de seu embasamento teórico, uma vez que tem sido alvo de muitas críticas por resultar em valores não evidenciados na prática. No entanto, esse modelo se tornou um clássico e serviu de base para outras proposições.

- Neste item são apresentados os seguintes métodos de precificação de ativos financeiros:
- Modelo clássico CAPM de Treynor (1962), Sharpe[59] (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966).
- I-CAPM, *Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, proposto por Merton (1973).
- D-CAPM, *Downside Capital Asset Pricing Model*, indicado por Hogan e Warren (1974).
- Método APT, *Arbitrage Pricing Theory*, publicado por Ross (1976).
- Modelo de três fatores, de Fama e French (1993).

Além desses, são abordados ao final do capítulo dois métodos de precificação de opções financeiras: o método clássico de Black e Scholes[60] (1973) e o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979).

[59] Sharpe foi o que mais contribuiu com a teoria do CAPM. Prêmio Nobel de economia em 1990 por suas contribuições em finanças, dividindo-o com Harry Markowitz e Merton Miller.

[60] Fischer Black (1938 – 1995) – Economista americano que, com Myron Scholes, ganhou notoriedade devido à publicação, em 1973, de um artigo

6.2.1. Modelo CAPM

O modelo CAPM foi introduzido de forma independente por vários autores, tendo como suporte os resultados dos trabalhos sobre carteiras de investimentos de Markowitz (1952). O conceito de carteira eficiente presume que nenhum ganho adicional no retorno de uma carteira é obtido sem aumento do seu risco, e a carteira mais eficiente é aquela que oferece maior retorno para um dado nível de risco. Esses conceitos foram introduzidos por Markowitz e tornaram-se essenciais para o desenvolvimento do modelo CAPM, que tem os seguintes pressupostos:

- O número de investidores há de ser suficientemente grande, e nenhum com capacidade de influenciar o mercado.
- Os ativos são divisíveis e qualquer investidor pode comprar a quantidade que desejar.
- Os investidores podem emprestar ou tomar emprestado a uma mesma taxa livre de risco.
- Não há custo de transações nem impostos sobre os ganhos.
- A informação é gratuita, idêntica e disponível para todos os investidores, e suas expectativas são similares.

As suposições do modelo CAPM, apontadas por Sharpe (1964) como restritivas e eventualmente irreais, são as condições para o equilíbrio de mercado e respondem por boa parte da doutrina clássica em finanças. Embora a aplicação do modelo CAPM seja questionada para mercados emergentes como o Brasil, Rússia, China, Índia ou para as bolsas de valores com baixa representatividade, seus princípios podem ser utilizados ou ajustados para estimativas razoáveis.

Esse modelo é utilizado em finanças para determinar a taxa de retorno teórica apropriada de um determinado ativo em relação a uma carteira de mercado perfeitamente diversificada. É um modelo linear expresso em termos de valores esperados, em que o retorno esperado de um ativo é determinado pela soma de dois fatores: a rentabilidade dos ativos sem risco e o prêmio de risco. Entende-se por prêmio de risco de uma carteira de mercado a diferença entre o retorno esperado de uma carteira de mercado e o retorno esperado de um ativo sem risco. Assim, o modelo CAPM fica expresso como

$$\mathrm{E}(r_i) = \mathrm{E}(r_f) + \beta_i\left[\mathrm{E}(r_m) - \mathrm{E}(r_f)\right] \tag{6.45}$$

onde r_i é o retorno esperado do título i, r_f a rentabilidade de um ativo sem risco (SELIC, por exemplo), r_m a rentabilidade esperada de uma carteira de mercado e β_i é o índice do título, denominado de beta do título. O produto $\beta_i[\mathrm{E}(r_m) - \mathrm{E}(r_f)]$ é denominado de prêmio de risco do ativo i.

O índice beta é igual à covariância entre os retornos do título e da carteira de mercado dividida pela variância da carteira de mercado, ou seja:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_m)}{\sigma^2(r_m)} \tag{6.46}$$

No contexto do CAPM, o único risco relevante é o risco de mercado, um risco sistemático e não-diversificável. Esse risco é medido pelo índice beta dos ativos, que mede a sensibilidade das oscilações da ação ou título em relação às oscilações do mercado.

intitulado *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Em 1997, Scholes e Merton receberam o prêmio Nobel de economia pela proposição de um novo modelo de valoração de derivativos. O nome de Fischer Black (já falecido) foi lembrado durante a premiação.

Matematicamente o beta de uma carteira de mercado perfeitamente diversificável é igual a 1. De acordo com o modelo CAPM, representado pela Eq. (6.45), a relação entre o retorno esperado para qualquer título ou carteira de títulos e seu índice beta é representada por uma reta denominada linda do mercado de títulos (LMT).

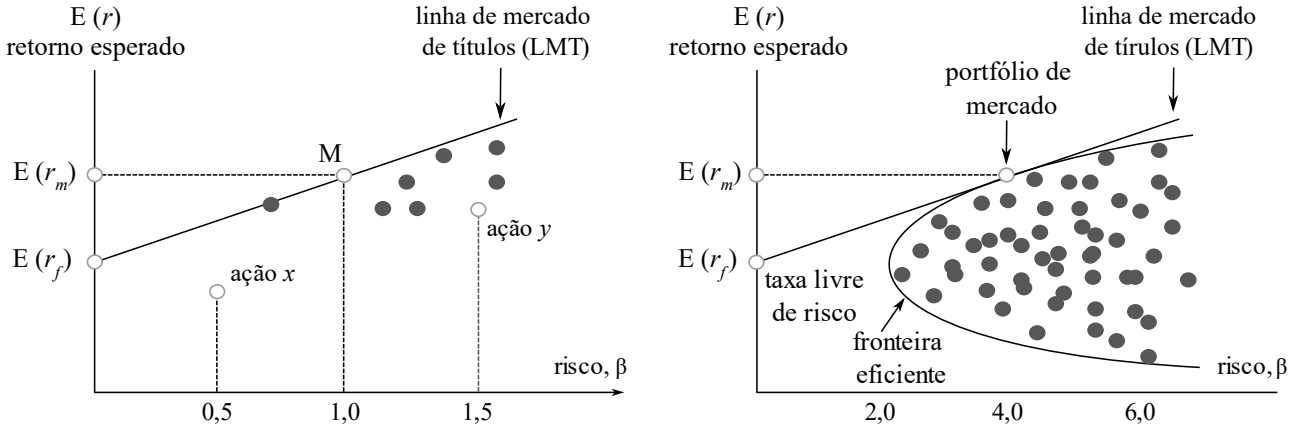


Figura 6.7 – Índice β e retorno esperado da carteira de títulos – Modelo CAPM

O modelo CAPM estima a taxa de retorno apropriada para os ativos com risco. Observa-se que a linha de mercado de títulos (LMT) tem início a partir do retorno de um ativo livre de risco, r_f, uma vez que a covariância de um ativo sem risco com o mercado é nula. À medida que aumenta o risco sistemático do título, expresso pelo índice beta, aumenta o retorno esperado. Em um mercado diversificado e em equilíbrio, as taxas esperadas de retorno de todos os ativos e da carteira de mercado situam-se nos pontos ao longo da LMT.

Imagine que a ação *x* seja negociada no mercado e um investidor opte por um risco β igual a 0,5. Assim, haverá uma combinação possível entre ativos sem risco e ativos de risco que resulta maior retorno para esse mesmo nível de risco quando comparado com o retorno da ação *x*. O mesmo ocorre com a ação *y*. Um investidor será seduzido a comprá-lo por apresentar maior retorno, no entanto, para o nível de risco da ação *y*, que é de 1,5, existe uma composição possível entre ativos sem risco e ativos de risco que resulta maior retorno.

Uma composição de carteira localizada fora da LMT está em desequilíbrio com o mercado. Se estiver acima da linha é considerada subprecificada, uma vez que seu retorno estimado está acima do apropriado. Consequentemente, todos desejarão adquirir esse ativo e a demanda elevada por ele elevará seu preço, reduzindo indiretamente sua taxa de retorno até o ponto de equilíbrio situado na linha de mercado. O mesmo raciocínio vale para ativos situados abaixo da LMT: seus retornos estão abaixo do apropriado, portanto, com margem para redução do seu preço de cotação.

É possível estabelecer uma relação de dependência entre o retorno de qualquer ativo ou de uma carteira de ativos com o retorno de uma carteira diversificada que se aproxime do mercado de capitais, como o IBOVESPA, por exemplo. Essa relação pode ser obtida, por exemplo, por meio de uma regressão linear conforme a Eq. (6.47) a seguir:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + e_{i,t} \tag{6.47}$$

onde $r_{i,t}$ é o retorno do título no período *t*, $r_{m,t}$ é o retorno da carteira de mercado no período *t*, α_i é o coeficiente linear, β_i é o coeficiente angular da regressão (beta do título) e $e_{i,t}$ é o erro, que representa a variabilidade dos retornos não associados ao mercado (ver exemplo hipotético na Figura 6.8).

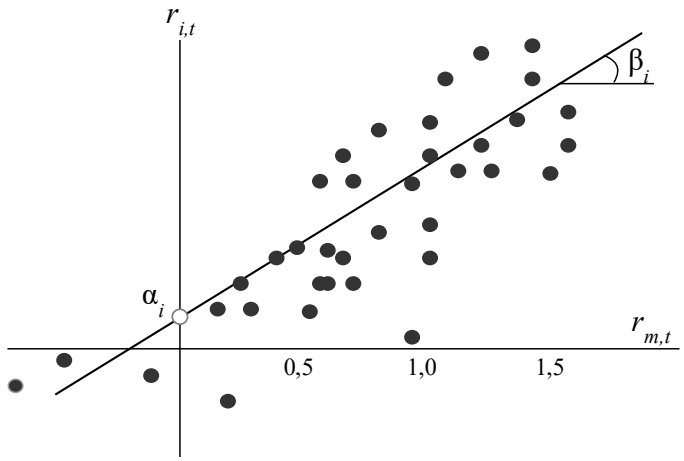


Figura 6.8 – Estimativa do índice por regressão linear.

Quanto maior o coeficiente β_i, maior a variação no retorno do ativo ou, em outras palavras, mais agressivo é o título. Já uma ação que tenha um beta de 0,5, por exemplo, refletirá a metade do risco do mercado. Nesse caso, quando a rentabilidade do mercado aumenta em 20%, o retorno tende a aumentar em 10%. Por outro lado, quando a rentabilidade do mercado diminui em 20%, o retorno tende a diminuir apenas 10%.

A dispersão dos pontos em relação à reta indica a variabilidade dos retornos do ativo, resultante das características próprias do ativo e independe das flutuações do mercado. Esse componente é a parcela diversificável do risco por meio do processo de constituição de carteiras.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.5 – Avalie o índice beta para as ações da Petrobras e Vale (PETR4 e VALE5) considerando amostragens mensais durante o período de 2005 a 2007 (36 amostras do primeiro dia útil de cada mês). Com estes índices, precifique, pelo método CAPM, os valores dos ativos decorrido um prazo de três meses, no primeiro dia útil de março de 2008.

Adote o valor esperado da taxa SELIC (mensal) para a taxa livre de risco. Os retornos médios mensais da taxa SELIC e do IBOVESPA para o período 2005 a 2007 foram de 1,19% e 2,75%, respectivamente.

Solução

Tomando os valores do primeiro dia útil de cada mês dos papéis PETR4 e VALE5 contra a rentabilidade do IBOVESPA no mesmo período, obtêm-se dois gráficos com suas respectivas equações de regressão indicadas da Figura 6.9 a seguir:

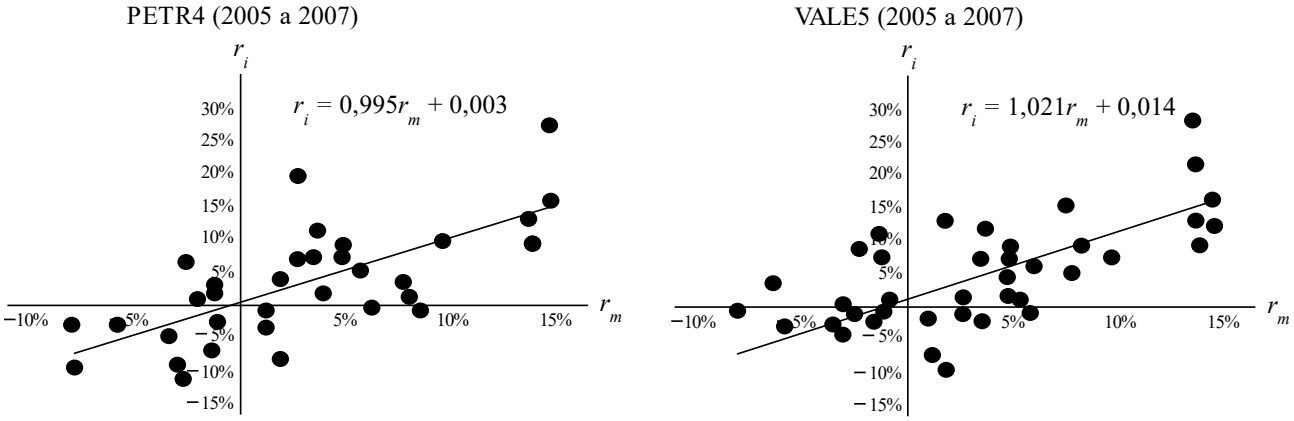


Figura 6.9 – Gráficos r_m *versus* r_i (PETR4 e VALE5) – amostras mensais (2005 a 2007).

Como se pode notar pela equação da reta nos gráficos da Figura 6.9, os índices β_i para os dois papéis são, respectivamente:

$$\beta_{\text{PETR4}} = 0{,}994 \quad \text{e} \quad \beta_{\text{VALE5}} = 1{,}021 \tag{6.48}$$

Aplicando os dados na Eq. (6.45), resultam os seguintes retornos esperados mensais:

$$\text{E}(r)_{\text{PETR4}} = 0{,}0119 + 0{,}994[0{,}0275 - 0{,}0119] = 2{,}74\% \tag{6.49}$$

e

$$\text{E}(r)_{\text{VALE5}} = 0{,}0119 + 1{,}021[0{,}0275 - 0{,}0119] = 2{,}78\% \tag{6.50}$$

De acordo com o método CAPM, os valores esperados futuros são funções do preço atual e da expectativa de rendimento futuro. Os valores atuais, para esse exemplo, é o primeiro dia útil de dezembro de 2007:

$$\text{PETR4} = \$72{,}75 \quad \text{e} \quad \text{VALE5} = \$52{,}24 \tag{6.51}$$

Portanto, os valores esperados decorrido um prazo de três meses são:

$$\text{PETR4(CAPM)} = 72{,}75(1 + 0{,}0274)^3 = \$78{,}90 \tag{6.52}$$

e

$$\text{VALE5(CAPM)} = 52{,}24(1 + 0{,}0278)^3 = \$56{,}72 \tag{6.53}$$

respectivamente.

De acordo com os dados da B3, seus valores atingiram \$81,80 e \$49,90 para PETR4 e VALE5 no primeiro dia útil de março de 2008, respectivamente. Observe que o ativo VALE5 se desvalorizou, ao passo que o ativo PETR4 seguiu o modelo CAPM e acompanhou o rendimento da B3, que também obteve rendimento positivo durante o período indicado.

▪▪▪▪▪▪

Como exemplo, tomando 15 empresas com papéis[61] negociados na B3 e simulando 160 carteiras de forma aleatória com esses ativos durante o período de 2000 a 2007, chega-se ao gráfico da Figura 6.10. Observe, por exemplo, que diversas carteiras apresentaram um nível de risco em torno de 8% durante o período de análise. No entanto, apenas as carteiras próximas ou situadas na linha de fronteira têm melhores retornos esperados para esse nível de risco.

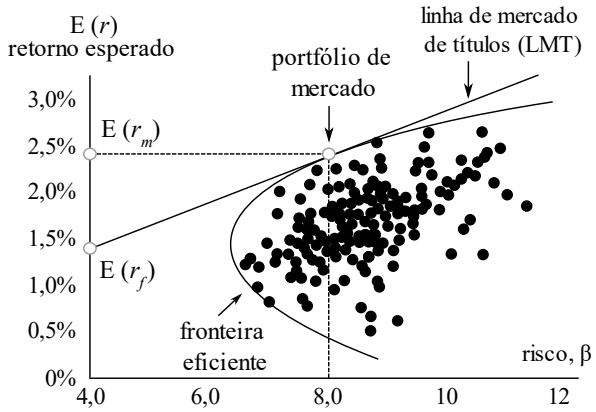


Figura 6.10 – Simulação de 160 carteiras com 15 papéis negociados na B3.

[61] Os papéis foram: BBAS3, BBDC4, CMIG3, CNFB4, CRUZ3, CSNA3, EBTP4, ELET3, EMBR3, FFTL4, LAME4, PETR4, TNLP4, USIM5 e VALE5.

As críticas ao CAPM como modelo de precificação recaem geralmente sobre a validade do índice β para representar adequadamente o risco de um ativo financeiro ou sobre a base de sustentação teórica do próprio modelo. Para um determinado período de regressão, o β é considerado constante. Isto justifica utilizar um tempo não muito extenso para determinação desse índice por regressão. Outra observação é que esse índice representa uma tendência observada no passado e nada garante quanto à sua variabilidade futura.

Embora o modelo CAPM estime que o retorno esperado de um ativo seja proporcional ao fator β, algumas publicações ao longo dos anos, como o trabalho empírico de Black, Jensen e Scholes (1972), têm demonstrado muitos casos de ativos com índice β baixo resultando grandes retornos, e com índice β alto, resultando baixos retornos. Isso fez com que outros pesquisadores investissem na busca por modelos mais consistentes.

6.2.2. Modelo I-CAPM

O modelo I-CAPM, *Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, é uma alternativa proposta por Merton (1973). Essa proposição procura capturar os efeitos intertemporais, impossíveis de serem considerados em um modelo estático como o CAPM. Segundo Merton, são precisamente esses efeitos que causam diferenças significativas entre os modelos. Os efeitos são obtidos por meio da previsão de comportamento intertemporal do investidor, que é, ao mesmo tempo, supridor e consumidor de ativos.

Embora o modelo I-CAPM esteja sujeito às mesmas críticas do modelo clássico, as evidências empíricas do I-CAPM são mais consistentes quando comparadas ao CAPM. Além das hipóteses tradicionais de equilíbrio de mercado, a suposição adicional é que a compra e venda de ativos por parte do investidor-consumidor sejam contínuas no tempo. Para compreensão desse modelo, Merton faz uso de uma equação básica de valoração de um *ativo real* por parte do produtor, que em última análise é o supridor de ativos financeiros em um mercado aberto.

Um ativo real é definido como uma unidade tecnológica de produção com fluxo de caixa e depreciação como função do montante de capital K(t) medido em unidades físicas, como por exemplo, o número de máquinas, número de plantas de processo ou número de plataformas empregadas no tempo t. O preço por unidade de capital é $p_k(t)$, e

$$\mathrm{V}(t) = \mathrm{K}(t)p_k(t) \tag{6.54}$$

onde V(t) é o valor do ativo real no tempo t. O retorno desse ativo durante um período h é o fluxo de caixa líquido X gerado nesse período, somado do valor do capital não depreciado menos o capital inicial, V(t). O capital não depreciado é expresso por:

$$(1-\lambda)\mathrm{K}(t)p_k(t+h) \tag{6.55}$$

onde λ é o percentual do capital depreciado. Assim, o valor do ativo após um tempo h, em caso de nenhum novo investimento em capital, é igual ao capital não depreciado e o fluxo de caixa líquido gerado durante o tempo h, ou seja:

$$\mathrm{V}(t+h) = \mathrm{X} + (1-\lambda)\mathrm{K}(t)p_k(t+h) \tag{6.56}$$

A valoração do ativo V($t + h$) - V(t) é igual ao retorno do ativo no tempo mais o valor dos novos investimentos em capital empregado que exceda o fluxo de caixa líquido X, uma vez que este já foi contabilizado na parcela do retorno do ativo. O valor dos novos investimentos em capital excedente ao fluxo de caixa líquido X segue a expressão:

$$[\mathrm{K}(t+h) - (1-\lambda)\mathrm{K}(t)]p_k(t+h) - \mathrm{X} \tag{6.57}$$

Observe que o montante de capital existente no tempo $t + h$ deve excluir a parcela não depreciada. Considerando que cada empresa seja um modelo de um ativo, define-se N(t) como o número de partes divisíveis do ativo e p(t) o seu preço. Assim, o preço de cada parte do ativo no tempo $t + h$ fica definido por:

$$p(t+h) = \frac{\mathrm{X} + (1-\lambda)\mathrm{K}(t)p_k(t+h)}{\mathrm{N}(t)} \tag{6.58}$$

e

$$\mathrm{N}(t+h) = \mathrm{N}(t) + \frac{[\mathrm{K}(t+h) - (1-\lambda)\mathrm{K}(t)]p_k(t+h) - \mathrm{X}}{p(t+h)} \tag{6.59}$$

sujeitos às seguintes condições iniciais, $p(0) = p$ e $\mathrm{N}(0) = \mathrm{N}$. Assumindo que os pagamentos dos dividendos sejam revestidos em nova compra, então a taxa de retorno do ativo r_p em termos de bens de consumo no período h é:

$$r_p = \frac{p(t+h) - p(t)}{p(t)} \tag{6.60}$$

Como se pode observar, apenas duas variáveis são necessárias para aplicar o modelo I-CAPM: o número de ações e o seu preço. A Eq. (6.58) reflete a saúde da empresa em termos de eficiência e a Eq. (6.59) reflete a estratégia do capital empregado entre as diversas alternativas de ativos. Isso implica, para adequado uso do modelo, analisar profundamente a estrutura de capital da empresa e sua eficácia operacional.

A equação derivada para o cálculo de um valor divisível da empresa reflete os efeitos intertemporais das atividades dela e capta de algum modo os efeitos do mercado, uma vez que a empresa tende a investir em novas oportunidades com base nos movimentos do mercado. Em casos particulares, as firmas de capital fechado, que apresentam grande volume de capital empregado em relação ao fluxo de caixa gerado, são fortemente afetadas quando abrem sua estrutura de capital com base no modelo I-CAPM, pois no curto prazo o ajuste do ativo para um valor de equilíbrio é feito em função do preço e demanda.

As Eqs. (6.58) e (6.59) deixam claro, também, que ações de empresas em forte processo de capitalização ou alavancagem tendem a se desvalorizar caso o capital investido não gere, no tempo devido, um fluxo de caixa proporcional. Caso concreto ocorrido com a Petrobras em seu processo de capitalização via cessão onerosa bancada pelo governo federal em 2010.

Considerando como hipótese a compra e venda contínua do ativo no tempo, pode-se assumir que o retorno, definido pela Eq. (6.60), segue um processo estocástico de Itô[62]. Assim, tem-se que:

$$\alpha = \frac{\mathrm{E}_t\{[p(t+h) - p(t)]/p(t)\}}{h} \tag{6.61}$$

onde α é o valor esperado do retorno por unidade de tempo. Embora a análise do processo de negociação seja discreta, pois se refere a um intervalo de tempo h, pode-se considerar o tempo contínuo fazendo h tender para zero. A variância do retorno por unidade de tempo fica definida por:

$$\sigma^2 = \frac{\mathrm{E}_t\{[(p(t+h) - p(t))/p(t) - \alpha h]^2\}}{h} \tag{6.62}$$

No limite, quando h tende a zero, α é denominado de retorno esperado instantâneo e σ^2 a variância do retorno instantâneo. A suposição do comportamento de processo estocástico de Itô para o retorno é importante, pois se espera que o retorno dependa também de outras variáveis além do preço de uma parte divisível do ativo. Portanto, para um incremento de tempo *dx*, tem-se que:

[62] Ver processos estocásticos de Itô no **Anexo 3**.

$$\frac{p(t+h)-p(t)}{p(t)} = \alpha h + \sigma dz \tag{6.63}$$

onde

$$dz = \varepsilon\sqrt{h} \tag{6.64}$$

sendo ε uma variável aleatória de distribuição normal padronizada, N(0,1).

Por fim, o retorno de qualquer investimento de uma empresa é decomposto em duas parcelas: dividendos e ganhos de capital. Em se tratando do investimento em uma jazida de petróleo, por exemplo, o dividendo é o fluxo de produção de petróleo convertido monetariamente pelo preço no mercado internacional, enquanto o ganho de capital é a valorização do volume recuperável que ainda não foi produzido, denominado de reserva.

6.2.3. Modelo D-CAPM

De acordo com Markowitz, a distribuição de frequência dos retornos das ações define qual medida de dispersão adotar. Quando a distribuição é simétrica, a variância é indicada para mensurar o risco, e quando a distribuição é assimétrica, Markowitz sugere a semivariância ou co-semivariância como alternativas, minimizando a assimetria da distribuição. Em mercados emergentes, em virtude da alta volatilidade, os retornos costumam apresentar distribuições assimétricas.

Alguns trabalhos iniciais de métrica de risco com distribuições assimétricas foram publicados por Hogan e Warren (1974). Esses autores definiram a co-semivariância, que mescla desvio e semidesvio, conforme a Eq. (6.65) a seguir:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\{(r_i - r_f)\,\min[\,(r_m - r_f),0]\} \tag{6.65}$$

onde a semivariância é definida como

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\left\{\min\left[(r_m - r_f),0\right]^2\right\} \tag{6.66}$$

A vantagem da semivariância definida em (6.65), como assinalam Hogan e Warren (1974), é que ela não se concentra nos retornos acima do esperado, e sim nas perdas, que é a preocupação maior dos investidores. O índice do modelo D-CAPM é chamado de *downside risk.* Com base nos conceitos de Hogan e Warren (1974), Estrada (2002) sugeriu outra definição para a co-semivariância, onde

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\{\min[\,(r_i - \mu_i),0]\,\min[\,(r_m - \mu_m),0]\} \tag{6.67}$$

Segundo Estrada (2002), os retornos de ativos em mercados emergentes se ajustam mais ao modelo D-CAPM quando comparado ao CAPM clássico. O índice sugerido é a razão da covariância entre os semidesvios dos retornos do ativo e do mercado pela semivariância do mercado, ou seja:

$$\beta_{\mathrm{D-CAPM}} = \frac{\mathrm{E}\{\min[\,(r_i - \mu_i),0]\,\min[\,(r_m - \mu_m),0]\}}{\mathrm{E}\{\min[\,(r_m - \mu_m),0]^2\}} \tag{6.68}$$

onde o numerador é a co-semivariância. Pode-se obter o indicador por regressão, neste caso a variável dependente é $x_t = \min[\,(r_{mt} - \mu_m),0]$, e a variável independente é $y_t = \min[\,(r_{it} - \mu_i),0]$. O coeficiente angular da reta resultante dessa regressão representa o índice $\beta_{\text{D-CAPM}}$.

6.2.4. APT – Arbitrage Pricing Theory

O modelo APT, proposto inicialmente por Ross (1976), trata a teoria de precificação de ativos de forma generalizada, modelando os retornos de ativos ou de carteiras como uma função linear de vários fatores macroeconômico e de mercado. A forma geral do modelo APT é expressa segundo a Eq. (6.69) a seguir:

$$r_i = a_i + \beta_{i1}\mathrm{F}_1 + \beta_{i2}\mathrm{F}_2 + \ldots + \beta_{ik}\mathrm{F}_k + e_i \tag{6.69}$$

onde F_1, F_2, … , F_k são as variações esperadas dos fatores considerados no modelo. A proposição de Ross (1976), embora seja de modelagem genérica, uma vez que não especifica quais fatores e quantos influenciam os retornos de ativos e carteiras, difere sensivelmente do modelo CAPM por incorporar fatores não relacionados ao mercado de ações. O APT é menos restritivo em seus pressupostos. O CAPM, de certa forma, pode ser considerado um caso particular do APT em que se avalia apenas um fator. De acordo com Dhrymes, Friend e Gultekin (1984), o número de fatores depende de quantos ativos são analisados.

Uma forma opcional de apresentar o APT é expandindo o modelo CAPM para vários fatores, ou seja:

$$r_i = r_f + \beta_{i1}(\mathrm{F}_1 - r_f) + \beta_{i2}(\mathrm{F}_2 - r_f) + \ldots + \beta_{ik}(\mathrm{F}_k - r_f) + e_i \tag{6.70}$$

Exemplos de fatores a serem considerados, entre outros, são: crescimento do PIB, índices setoriais de mercados, inflação, nível de tecnologia e, eventualmente, fatores exógenos ao mercado.

6.2.5. Modelo de três fatores de Fama e French

O modelo de Fama e French (1993) é uma extensão do modelo CAPM. Além da variável de mercado β do modelo clássico, Fama e French, motivados por inconsistências dos modelos existentes, incorporaram ao modelo clássico fatores relacionados ao tamanho das empresas e relacionados à razão entre seus valores contábeis e de mercado. Algumas evidências empíricas em mercados internacionais e nacionais têm demonstrado que o modelo de três fatores explica melhor a precificação de ativos quando comparado ao modelo CAPM.

O modelo proposto por Fama e French é expresso por:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f) + s_i\mathrm{SMB} + h_i\mathrm{HML} + e_i \tag{6.71}$$

onde s_i e h_i são os coeficientes dos fatores adicionados para o ativo ou carteira *i*, SMB (*small minus big*) representa o retorno das carteiras de pequenas empresas menos o retorno das grandes empresas e HML (*high minus low*) representa o retorno de carteiras de empresas com alta relação valor contábil/valor de mercado (*book-to-market* ou B/M) menos o retorno das carteiras de empresas com baixa relação B/M. Observe que o índice β, embora reflita o mesmo índice de mercado do modelo CAPM, não resulta no mesmo quando aplicado em (6.71), uma vez que os dois fatores adicionais na regressão linear influenciam o cálculo do β.

Os fatores s_i e h_i podem assumir valores tanto positivo como negativo. Segundo Fama e French, as evidências empíricas, quando considerados os efeitos do tamanho da empresa e a razão B/M, explicam 90% dos retornos de carteiras diversificadas contra 70% do modelo CAPM. A segregação de grandes empresas das pequenas empresas pode ser feita por meio de medidas estatísticas, como a mediana ou por *quantis*. Empresas financeiras, normalmente com altos índices de endividamento, apresentam uma relação B/M com significado diferente em relação ao apresentado por empresas não financeiras. Essa é uma razão, também apontada por Fama e French, para exclusão de empresas financeiras nesse tipo de modelagem.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.6 – Considere os dados indicados na Tabela 6.3 a seguir e aplique-os no seguinte modelo de três fatores:

$$r_i - r_f = \beta_i(r_m - r_f) + p_i\mathrm{PET} + i_i\mathrm{IEE} + e_i \tag{6.72}$$

onde PET é a variação mensal do petróleo Brent e a variação mensal do índice de energia elétrica. A taxa livre de risco mensal (valor esperado) durante o período de 2010 foi de 0,79%. Determine os índices β_i, p_i e i_i e para os ativos PETR4 e VALE5 segundo o modelo proposto na Eq. (6.72).

Tabela 6.3 – Variações observadas para o ano 2010 – Exemplo 6.6

Ano 2010	PETR4	VALE5	PET	IEE	r_m
Jan	–5,86%	–0,70%	4,01%	5,44%	2,39%
Fev	–7,20%	–0,26%	–8,69%	–0,74%	–4,96%
Mar	1,55%	5,62%	5,74%	1,02%	0,99%
Abr	2,41%	11,30%	7,84%	–1,48%	5,81%
Mai	–8,72%	–6,83%	1,56%	–0,07%	–5,65%
Jun	–10,91%	–9,95%	–15,79%	–7,71%	–7,86%
Jul	–6,52%	–9,00%	0,51%	6,70%	–0,98%
Ago	3,17%	13,42%	11,50%	4,87%	11,89%
Set	–5,97%	–3,03%	–9,13%	3,78%	–2,11%
Out	4,87%	10,85%	10,38%	–1,33%	4,71%
Nov	–5,55%	3,27%	1,68%	3,83%	1,90%
Dez	–3,92%	1,73%	4,58%	1,39%	–3,10%

Solução

Em notação matricial[63], tem-se o seguinte sistema representativo para o modelo da Eq. (6.72):

$$\mathbf{Y}_{(12\times1)} = \mathbf{X}_{(12\times3)}\boldsymbol{\beta}_{(3\times1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(12\times1)} \tag{6.73}$$

Aplicando-o para o ativo PETR4, resultam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -0{,}0665 \\ -0{,}0799 \\ \cdots \\ -0{,}0471 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0{,}0160 & 0{,}0401 & 0{,}0544 \\ -0{,}0575 & -0{,}0869 & -0{,}0074 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -0{,}0389 & 0{,}0458 & 0{,}0139 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

Observe que a matriz **Y** representa o termo r_i - r_f referente ao ativo PETR4, e a primeira coluna da matriz **X** é o termo do prêmio de risco, r_m - r_f. As outras duas colunas de **X** referem-se às variações de PET e IEE. A solução do sistema em (6. 73) é obtida por meio de um estimador de mínimos quadrados, que pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\beta}_{3\times1} = \left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{3\times12}\mathbf{X}_{12\times3}\right]^{-1}_{3\times3}\left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{3\times12}\mathbf{Y}_{12\times1}\right]_{3\times1} \tag{6.75}$$

Com a ajuda de uma planilha eletrônica ou um software como o Matlab, resolve-se para o caso PETR4 e VALE5, e determinam-se as matrizes dos estimadores **β**, resultando:

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{PETR4}} = \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9762 \\ 0{,}0793 \\ -0{,}7678 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{VALE5}} = \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9186 \\ 0{,}3588 \\ -0{,}5449 \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

Assim, os modelos de precificação para os dois papéis são:

$$r_{\mathrm{PETR4}} = 0{,}0079 + 0{,}9762(r_m - 0{,}0079) + 0{,}0793\mathrm{PET} - 0{,}7678\mathrm{IEE} + e_i \tag{6.77}$$

e

$$r_{\mathrm{VALE5}} = 0{,}0079 + 0{,}9186(r_m - 0{,}0079) + 0{,}3588\mathrm{PET} - 0{,}5449\mathrm{IEE} + e_i \tag{6.78}$$

▪▪▪▪▪▪

[63] Ver detalhes de regressão com múltiplas variáveis no **Anexo 2**.

6.3. Modelos de Precificação de Opções Financeiras

Neste item são apresentados dois exemplos de precificação de opções financeiras: o modelo clássico de Black e Scholes e o modelo de Cox, Ross e Rubinstein. Antes, porém, é importante que o leitor, caso não tenha familiaridade com a área financeira, conheça alguns termos e a sistemática de cálculo de *hedge* de derivativos.

6.3.1. Derivativos

Por definição, derivativo é um ativo que depende de outro ativo, o ativo básico. Uma opção é um exemplo de derivativo. Outros exemplos são: contrato a termo, contrato futuro e *swap*. Um contrato a termo, talvez o mais simples dos derivativos, é uma obrigação de comprar ou vender um ativo básico em uma data futura, por um preço preestabelecido de entrega do ativo. Uma vez fechado o contrato, não se pode negociá-lo novamente em bolsas com terceiros, sendo levado até a data de entrega. O resultado pode ser positivo ou negativo para o detentor do contrato, dependendo do preço de mercado do ativo básico nessa data.

Os contratos futuros são semelhantes aos contratos a termo, mas com a diferença de que são normalmente negociados em bolsas, de forma que raramente existe a entrega física do ativo básico no mês de vencimento. Por exemplo, se um contrato foi grafado com preço de entrega p_0 e no dia seguinte os contratos futuros são abertos com um novo preço de entrega p_1, então o contrato do dia anterior é revisado para assumir o novo preço de entrega p_1. Assim, os detentores do contrato pagam ou recebem a diferença entre os preços p_1 e p_0.

Há no mercado de futuros dois tipos de margem: *margem inicial* e *margem de manutenção*. A margem inicial é o montante requerido pela bolsa de futuros quando uma posição de mercado futuro é aberta. A margem de manutenção é o montante que deve ser mantido em depósito na corretora para cobrir eventuais ajustes negativos. Se a margem de manutenção começar a reduzir devido a uma variação de preços, a corretora solicitará ao cliente que recomponha a sua margem de manutenção ou reduza a sua posição de contratos futuros. Esse procedimento é denominado de *chamadas de margem*. Existem contratos futuros diversos, como de óleo bruto, gás natural, gasolina, boi-gordo, bezerro, taxa de juros, índice BOVESPA, câmbio, café, ouro etc.

Os *swaps* são contratos privados entre duas firmas para trocar ativos ou fluxos de caixa em uma data futura de acordo com uma fórmula preestabelecida. Podem ser vistos como uma carteira de contratos a termo. O contrato de troca pode ter como objeto moedas, *commodities* ou ativos financeiros. Os *swaps* mais comuns no mercado brasileiro são de divisas, denominado de *swap* cambial, ou de taxas de juros. Os valores iniciais, os indicadores e a data de vencimento são livremente pactuados entre as partes.

6.3.2. Opções financeiras

Opção é um direito, e não uma obrigação, de comprar ou vender uma quantidade específica de um bem ou ativo a um preço fixo até uma data preestabelecida. Há dois tipos básicos de opções: opção de compra e opção de venda, *call option* e *put option*, respectivamente. Uma opção financeira, seja de compra ou de venda, é caracterizada por três elementos:

- Valor da opção – algumas vezes chamado de prêmio, que é o valor pago para se ter o direito de comprar ou vender um ativo financeiro.
- Preço de exercício – valor pelo qual o titular da opção poderá comprar ou vender o ativo, e
- Vencimento – data limite para que o titular da opção exerça ou não o seu direito.

As opções mais comuns são denominadas de opção americana e opção europeia. As opções americanas podem ser exercidas a qualquer tempo até a data do vencimento, e as opções europeias são exercidas somente na data do vencimento.

Analisando apenas do ponto de vista da opção, imagine que uma ação da Petrobras custe $95 hoje e admita que um investidor adquira uma *opção de compra* por $5, cujo preço de exercício seja de $100. Se o valor da ação na data do exercício recuar para $80, o investidor naturalmente não vai exercer a opção de comprar a referida ação por $100 se ela vale apenas $80. Nesse caso, o prejuízo é de $5 (valor pago pela opção). Por outro lado, se a ação subir para $110, o investidor desejará exercer a opção, pois estaria comprando uma ação que vale $110 pelo preço de $100. Dessa forma há um ganho de $5 ($10 pela compra da ação menos $5 pagos pela opção). Na verdade, se a ação subir para qualquer valor acima de $105, já compensa exercer a opção.

Suponha agora que um investidor compre uma *opção de venda* cujo valor seja $5 e o preço de exercício seja de $100. Se o valor da ação cair de $95 para $80, o investidor exercerá a opção, pois estará vendendo uma ação por $100 quando seu valor é de $80. O ganho é de $15 ($20 pela venda da ação menos $5 pago pela opção). Na verdade, qualquer valor da ação abaixo de $95 já compensa exercer a opção. Por outro lado, se o valor da ação subir para $110, o investidor não exercerá a opção, pois estaria vendendo por $100 uma ação que vale $110. Nesse caso o prejuízo é de $5, que é o valor pago pela opção. Pode-se comprar ou vender opções, que resultam quatro posições em opções (ver Figura 6.11 o *payoff* das quatro posições para o exemplo em questão).

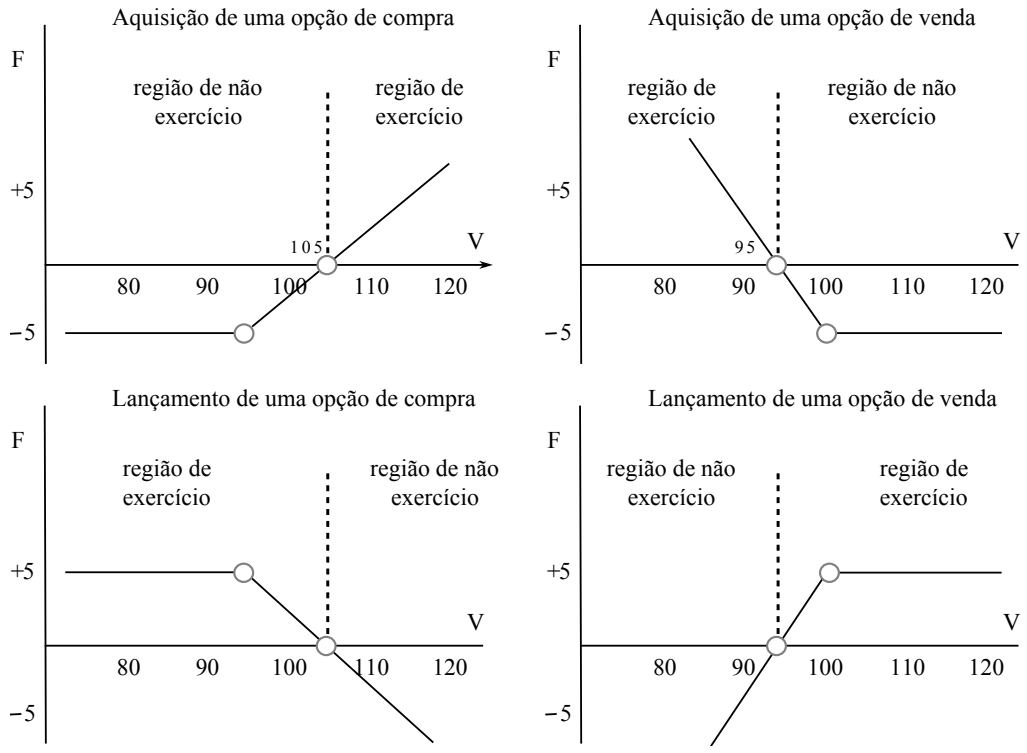


Figura 6.11 – Resultados das quatro posições em opção financeira.

Enquanto o comprador de opção de compra espera que o preço da ação suba, o comprador de opção de venda espera que ela se desvalorize. Já para o lançador de opções, a espera é no sentido contrário ao do comprador. O valor atual do ativo do qual deriva a opção influencia o valor da opção. No caso de uma opção de compra, seu valor aumenta com o aumento do ativo e, no caso de uma opção de venda, seu valor diminui com o aumento do valor do ativo. A variância do ativo do qual deriva a opção também influencia seu valor. Quanto maior a variância, maior é o valor da opção, seja de compra ou venda. Com respeito ao prazo até o vencimento da opção, quanto maior for o prazo, maior será o valor das opções. As taxas de juros influenciam também as opções, o aumento da taxa de juros incrementa o valor das opções de compra e diminui o valor das opções de venda.

6.3.3. Noção de *hedge*

As operações de compra e venda de opções ou de outros derivativos são para proteger os detentores de carteiras de ações contra oscilações do mercado. Na linguagem do mercado financeiro é um *hedge*, ou operação de proteção ao risco. Um *hedge* não é uma operação especulativa, pois não visa ao lucro proporcionado pelas oscilações das variáveis de mercado. É uma operação que diminui o risco de uma carteira de ações.

Voltando ao exemplo das ações da Petrobras, suponha, inicialmente, que o valor da ação, em um espaço de tempo, suba de $98 para $100, e isso resulte uma variação da opção de $5 para $6. Ou seja, uma variação de $2 no preço da ação resultou o aumento de $1 no preço da opção. O valor de um ativo é função do tempo V(t) e uma opção é função do preço do ativo e do tempo de exercício t, F(V, t). Black e Scholes denominaram a primeira derivada parcial de F com respeito à V de *delta da opção*, ou seja:

$$\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{V},t)}{\partial \mathrm{V}(t)} = \frac{6-5}{100-98} = 0{,}5 \tag{6.79}$$

A composição inicial de uma carteira com *hedge*, segundo a proposição de Black e Scholes, é definida conforme a seguir:

$$c_i = \mathrm{V}(t) - \frac{\mathrm{F}(\mathrm{V},t)}{\partial \mathrm{F}(\mathrm{V},t)/\partial \mathrm{V}(t)} \tag{6.80}$$

onde c_i representa o valor da carteira no tempo inicial. Utilizando-se de uma linguagem comum de mercado, a expressão em (6.80) é uma posição comprada em ativo e vendida em opção. Para o exemplo da ação da Petrobras, a posição inicial da carteira é c_i = 98 - 5/0,5 = 88. Note-se que, no caso de a ação subir de $98 para $100, a composição final da carteira não sofrerá alterações em função dessa volatilidade, pois c_f = 100 - 6/0,5 = 88.

Em outras palavras, uma carteira mantida conforme a Eq. (6.80) é uma condição de carteira com *hedge*, protegida contra variações do ativo. Mais ainda, para manter uma posição protegida, para cada ação comprada do ativo V, o número de opções vendidas desse ativo é de 1/(∂F/∂V). No exemplo em questão, mantendo uma ação da PETR4 na carteira, ela estará protegida se for mantida uma posição vendida de duas opções, ou seja 1/0,5 = 2.

6.3.4. Modelo de Black e Scholes

Black e Scholes (1973), valendo-se do Lema de Itô, desenvolveram uma engenhosa equação para derivativos financeiros que revolucionou não só a teoria de portfólio de Markowitz (1952) e o teorema de Modigliani e Miller (1958), mas também a teoria de precificação de ativos de capital. Não obstante, apesar da evolução promovida pela fórmula de Black e Scholes, muitas empresas de petróleo continuam utilizando, em suas rotinas, o CAPM para estimar o prêmio de risco e a valoração de ativos, conforme asseguram Brealey e Myers (2006).

O modelo de Black e Scholes é resultado da derivação de uma equação diferencial com as condições de contorno semelhantes a uma opção de compra do tipo europeia. O modelo determina o preço justo de um derivativo dependente de um ativo, utilizando-se de uma técnica que ficou conhecida como avaliação neutra ao risco. Antes da publicação desse trabalho, já existiam fórmulas de precificação de opções. Não obstante, todas dependiam de um ou mais parâmetros arbitrados ou desconhecidos, além dos parâmetros referentes à opção.

De acordo com Black e Scholes, as fórmulas publicadas por Sprenkle (1964) e outros são julgadas incompletas por dependerem de parâmetros arbitrados. A genialidade da fórmula de Black e Scholes está exatamente na solução dessa lacuna. A título de ilustração, a fórmula proposta por Sprenkle (1964) para o valor da opção é

$$\mathrm{F} = k\mathrm{VN}(b_1) - k^*\mathrm{KN}(b_2) \tag{6.81}$$

onde

$$b_1 = \frac{\ln(kV/K) + (1/2)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{6.82}$$

e

$$b_2 = \frac{\ln(kV/K) - (1/2)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{6.83}$$

onde V é o preço do ativo (ação), K é o preço de exercício, σ^2 é variância da taxa de retorno do ativo, T é a data de expiração ou de exercício e *t* é a data corrente. O termo N(·) é a função acumulada da distribuição normal N(0,1). Já os parâmetros *k* e *k** são desconhecidos. O autor definiu *k* como sendo uma relação entre o valor esperado do ativo na data de vencimento e o valor corrente, e *k** como um fator de desconto que depende do risco do ativo. Esses parâmetros eram estimados empiricamente, mas de consistência duvidosa.

Já a EDP de Black e Scholes é obtida aplicando-se o Lema de Itô com as seguintes condições de contorno:

- A taxa de juros é conhecida e constante.
- O preço do ativo segue um processo estocástico de tempo contínuo com taxa de variação proporcional ao quadrado do preço do ativo. Isso garante que a distribuição do preço da ação segue uma distribuição lognormal, com taxa de variação de retorno constante.
- Não há pagamento de dividendos ou qualquer outra distribuição de valores.
- A opção é do tipo europeia, ou seja, só é exercida na data de expiração.
- Por último, não há custo de transação.

Com essas condições, o valor da opção só depende do preço do ativo, do tempo e das variáveis assumidas como conhecidas e constantes. Note que uma carteira protegida pode assumir uma fração ou um múltiplo do valor indicado na Eq. (6.80). Assim, a expressão a seguir é válida para uma posição protegida, onde

$$c = \frac{\partial F(V,t)}{\partial V(t)} V(t) - F(V,t) \tag{6.84}$$

A variação desta carteira em um intervalo Δt é igual a

$$\Delta c = \frac{\partial F}{\partial V}\Delta V - \Delta F. \tag{6.85}$$

Por questão de simplificação, foram omitidos os parâmetros (V, *t*). Note que a Eq. (48) – ver **Anexo 3** – em valores discretos, após um intervalo Δt, é igual a:

$$\Delta F = \left(\mu V\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)\Delta t + \frac{\partial F}{\partial V}\sigma V\Delta z \tag{6.86}$$

Já a variação discreta do preço da ação, desde que o retorno siga um processo MGB, é:

$$\Delta V = \mu V\Delta t + \sigma V\Delta z \tag{6.87}$$

Substituindo as Eq. (6.87) e (6.86) na (6.85) resulta:

$$\Delta c = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma^2 V^2\right)\Delta t \tag{6.88}$$

Observe que o termo Δz desaparece na Eq. (6.88), implicando que uma parcela de incerteza foi eliminada na composição do portfólio. Já o retorno de um portfólio protegido deve ser igual ao retorno de um ativo

qualquer sem risco, pois, de outra forma, haveria arbitragem. Em outras palavras, se *r* é a taxa livre de risco no intervalo Δt, vale a seguinte relação:

$$rc\Delta t = \Delta c \tag{6.89}$$

Substituindo *c* e Δc na Eq. (6.89) resulta

$$\left(-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{V}^2}\sigma^2\mathrm{V}^2\right)\Delta t = r\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{V}}\mathrm{V} - \mathrm{F}\right)\Delta t \tag{6.90}$$

Simplificando os termos e rearranjando-os obtém-se

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{V}^2}\sigma^2\mathrm{V}^2 + r\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{V}} - r\mathrm{F} = 0 \tag{6.91}$$

A Eq. (6.91) é a *equação diferencial parcial* de Black e Scholes. Eles introduziram a moderna valoração de uma opção por meio da solução de uma EDP com as seguintes condições de contorno para uma opção de compra com $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathrm{V}\to 0^+} \mathrm{F}(\mathrm{V}, t) &= 0 \\ \lim_{\mathrm{V}\to\infty} \mathrm{V} - \mathrm{F}(\mathrm{V}, t) &= \mathrm{K}e^{-r(\mathrm{T}-t)} \end{aligned} \tag{6.92}$$

e condição final igual a

$$\mathrm{F}(\mathrm{V}, \mathrm{T}) = \max[\,\mathrm{V} - \mathrm{K}, 0] \tag{6.93}$$

onde T é o tempo de expiração e K é seu valor na data de exercício. A EDP de Black e Scholes é reduzida pela mudança de variáveis para uma EDP de *difusão*, e solucionada por métodos analíticos usuais. Assim, tem-se a seguinte solução para o preço da ação:

$$\mathrm{F}(\mathrm{V}, \mathrm{T}) = \mathrm{V}\mathrm{N}(d_1) - \mathrm{K}e^{-r(\mathrm{T}-t)}\mathrm{N}(d_2) \tag{6.94}$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(\mathrm{V}/\mathrm{K}) + (r + \sigma^2/2)(\mathrm{T} - t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T} - t}} \tag{6.95}$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(\mathrm{V}/\mathrm{K}) + (r - \sigma^2/2)(\mathrm{T} - t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T} - t}} \tag{6.96}$$

sendo *r* a taxa livre de risco. Os termos $\mathrm{N}(d_1)$ e $\mathrm{N}(d_2)$ são funções acumuladas de distribuições normais de média 0 e desvio padrão 1. Desse modo, Black e Scholes concluíram que o valor de uma opção financeira depende de cinco parâmetros:

- Preço do ativo básico, V.
- Preço do ativo na data de exercício, K.
- Volatilidade do ativo básico, σ.
- Prazo para a expiração da opção, $\tau = \mathrm{T} - t$.
- Taxa de juros livre de risco, *r*.

A volatilidade do ativo básico é definida como sendo o desvio padrão da taxa de retorno do ativo básico, ou seja, o desvio padrão de *d*V/V (% *a.a.*, por exemplo). Observe que, na Eq. (6.94), não aparecem parâmetros do tipo *taxa ajustada ao risco* ou crescimento esperado no valor da ação. A falta desses parâmetros na equação

causou grande impacto, na época. Também gerou debates o fato de conter um desvio padrão e não a covariância, o que levou muita gente a achar que a equação não considerava a diversificação.

No entanto, a ideia de Black e Scholes partiu diretamente do CAPM, que considera a covariância como risco relevante. Ou seja, a fórmula não tem nada de contraditório com a teoria da diversificação de carteiras. A fórmula é, inclusive, mais geral ou menos restritiva do que o modelo CAPM, pois tem validade mesmo quando este último não se aplica, sendo necessário apenas que o mercado seja suficientemente completo de forma a não permitir arbitragem.

A Figura 6.12 a seguir mostra o valor de uma opção de compra do tipo europeia sem dividendos antes da expiração. Agora, em vez de linear, o valor da opção segue uma curva.

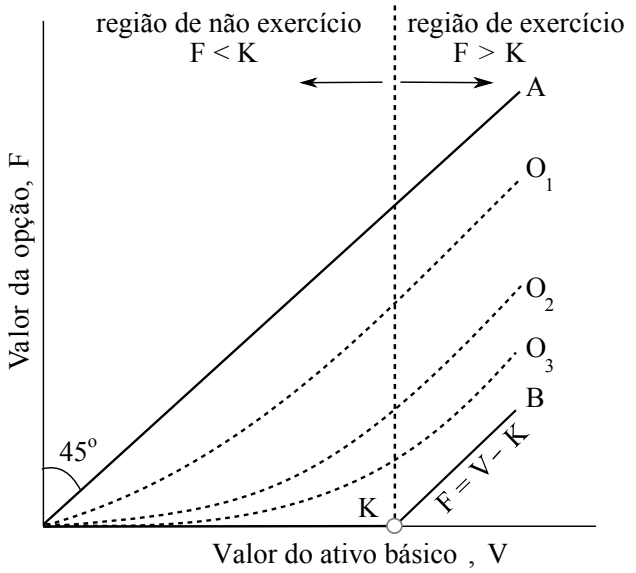


Figura 6.12 – Valor de uma opção de compra do tipo europeia antes da expiração.

A linha A representa o máximo do valor de uma opção, uma vez que ela nunca pode ser maior que o valor do ativo. A linha B representa o mínimo valor de uma opção, uma vez que não pode ser negativo nem menor do que V - K. Já as linhas O_1, O_2 e O_3 representam os preços de opções para prazos em ordem decrescente de maturidade, ou seja, o prazo para a opção O_3 é menor que o prazo da opção O_2, que por sua vez é menor que o da opção O_1.

Black e Scholes assumiram que a distribuição de probabilidades das variações de preços do ativo básico é lognormal. No entanto, a fórmula não depende da média dessa distribuição, apenas da volatilidade e dos demais parâmetros. Assim, a valoração de opções sob incerteza independe das atitudes dos indivíduos em relação ao risco. Generalizando, para o caso de aquisição de opções de compra, considere que o ativo básico vale V hoje e que seu valor alcance K na data de exercício. Assim, pode-se assegurar que:

- Caso V seja maior que nessa data, é vantajoso exercer a opção. Se o ativo for negociado no mercado, realiza-se o lucro imediatamente vendendo o ativo. O resultado do exercício da opção de compra é nesse caso F = (V - K) > 0, e
- Caso V seja menor que na data de expiração[64], o melhor é não exercer a opção, já que V - K < 0. O prejuízo é igual ao prêmio pago pela opção.

[64] Se V for igual a K, tanto faz exercer ou não, uma vez que o resultado é zero. Na prática, como existe custo de transação, o melhor seria não exercer a opção.

Resumindo, o resultado do exercício é F = max [0, V - K]. Já a equação de Black e Scholes para uma opção de compra europeia, cuja ação paga dividendos δ, é uma equação diferencial com a solução a seguir:

$$\mathrm{F} = \mathrm{V}e^{-\delta(\mathrm{T}-t)}\mathrm{N}(h) - \mathrm{K}e^{-\delta(\mathrm{T}-t)}\mathrm{N}\left(h - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}\right) \tag{6.97}$$

onde

$$h = \left[\ln\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}} \tag{6.98}$$

Note que, fazendo δ = 0 nas Eqs. (6.97) e (6.98) resulta a Eq. (6.94). Já o preço de uma opção de venda é obtido a partir da paridade compra e venda, que resulta

$$\mathrm{F}(\mathrm{V}, t) = \mathrm{K}e^{-r(\mathrm{T}-t)}\mathrm{N}(-d_2) - \mathrm{V}\mathrm{N}(-d_1) \tag{6.99}$$

A Tabela 6.4 resume o efeito de cada variável no valor da opção de compra e venda.

Tabela 6.4 – Sensibilidade do valor da opção

Variável	Efeito na opção de compra	Efeito na opção de venda
Aumento de V (valor da ação)	Aumenta	Diminui
Aumento de K (preço de exercício)	Diminui	Aumenta
Aumento da volatilidade, σ	Aumenta	Aumenta
Aumento do tempo de expiração, τ = T - t	Aumenta	Aumenta
Aumento na taxa de juros, *r*	Aumenta	Diminui
Aumento na taxa de dividendos, δ	Diminui	Aumenta

Outros tipos de opções, menos usuais, são as que dependem da trajetória do ativo básico, como as opções com barreira. Nessa modalidade, o direito de exercício cessa se o valor do ativo ultrapassar ou cair de um determinado valor pré-fixado. Há duas possibilidades: o direito de exercício cessa se o ativo ultrapassar um valor de barreira (opções *up and out*), ou o direito cessa se o valor do ativo cair abaixo do valor de barreira (opções *down and out*). O exercício dessa modalidade pode ser europeu ou americano. A barreira pode ser imposta também em sentido inverso, ou seja, o direito de exercício surge se o ativo ultrapassar ou cair de um determinado valor. Dessa forma também são duas as possibilidades (opções *up and in* e *down and in*).

A opção asiática é um tipo específico de opção baseada nas taxas de câmbio, de forma que, o detentor da opção adquire o direito de comprar ou vender o ativo básico pela média de suas cotações durante a vigência do contrato. Há outras opções chamadas exóticas, que são variações sobre os tipos básicos. Um exemplo são as chamadas "*as you like it*", isto é, as opções que dão ao seu portador o direito, decorrido um prazo determinado, de escolher se será uma opção de venda "*put option*" ou uma opção de compra "*call option*".

6.3.5. Modelo de Cox, Ross e Rubinstein

Cox, Ross e Rubinstein (1979) publicaram um método genérico de precificação de opções denominado BOPM (binomial options pricing model). Trata-se de um método largamente aplicado por profissionais que operam em bolsas de valores, dada sua adequação para condições de contorno adversas, o que o diferencia de outros modelos em que tais condições são mais restritivas.

A motivação de Cox, Ross e Rubinstein foi a complexidade da equação de Black e Scholes para precificar derivativos. Graças à sugestão de William Sharpe, foi possível derivar um método obtendo os mesmos resultados usando apenas a matemática elementar.

O modelo binomial é um método iterativo de tempos discretos que prevê a evolução do preço da opção sobre todo o período de exercício. Embora o método BOPM seja computacionalmente mais lento que a equação de Black e Scholes, seus resultados são mais precisos quando aplicados em períodos maiores ou para ativos com pagamento de dividendos.

Antes de expor o método BOPM, é interessante mostrar por meio de um exemplo, a ideia básica do princípio da valoração de opções pela arbitragem. Suponha que o preço atual de uma ação sem dividendo seja V = \$50 e, por hipótese, após um período seu preço atinja V* = \$25 ou V* = \$100. Considere uma opção disponível no mercado desse ativo com um preço de exercício K = \$50 expirando ao final do período. Admita também que seja possível tomar emprestado e emprestar a uma taxa de juros de 25%. Note que a única variável não definida, até o momento, é o preço da opção F. Se a arbitragem sem risco não for admitida, pode-se deduzir, a partir das informações dadas, o valor justo da opção.

Considere, seguindo Cox, Ross e Rubinstein (1979), uma carteira protegida com a seguinte composição: inscrito em três opções de compra ao custo cada, comprado em dois lotes do ativo a \$50 cada e um empréstimo de \$40 à taxa de juros de 25%, com previsão de quitação ao final do período. A Tabela 6.5 a seguir ilustra o fluxo de caixa dessa carteira na data de hoje e na data de expiração para os dois valores prováveis do ativo V.

Tabela 6.5 – Condição de não arbitragem sem risco na formação de uma carteira com *hedge*

	Hoje	Data do exercício (fluxo de caixa)	
		V* = \$25	V* = \$100
Inscrito em três opções de compra	3F	–	–150
Comprado em dois lotes de ação	–100	50	200
Empréstimo à taxa de 25%	40	–50 = (40×1,25)	–50 = (40×1,25)
Total	0	0	0

Em não existindo lucro e sem incorrer em risco por arbitragem, o custo corrente desse portfólio deve ser zero, logo:

$$3\mathrm{F} - 100 + 40 = 0 \tag{6.100}$$

o que resulta o valor corrente da opção de compra F = \$20. Note que, se a opção não fosse cotada a \$20, seria possível garantir um lucro líquido e certo já na formação da carteira. Caso a opção seja F = \$25, por exemplo, de acordo com a Eq. (6.100), resultaria um fluxo de caixa resultante de \$15.

Em função disso, o que se espera é determinar o valor exato de uma opção de compra como função do preço de exercício, preço da ação correspondente, variação do ativo durante o prazo de exercício e da taxa de juros. Observe, o que não deixa de ser um ponto interessante, que não há necessidade de se conhecer a probabilidade da ação subir ou cair.

O método BOPM consiste em acompanhar uma árvore binomial em que todas as possibilidades de preços do ativo são igualmente espaçadas no tempo e geradas a partir de um nó. A partir de cada nó, há somente duas probabilidades de ocorrência quanto ao preço do ativo: valorizar ou desvalorizar. Em outras palavras, o preço do ativo pode subir, "*up*", ou cair de valor, "*down*", com probabilidades u e $d = 1 - u$ (ver Figura 6.13).

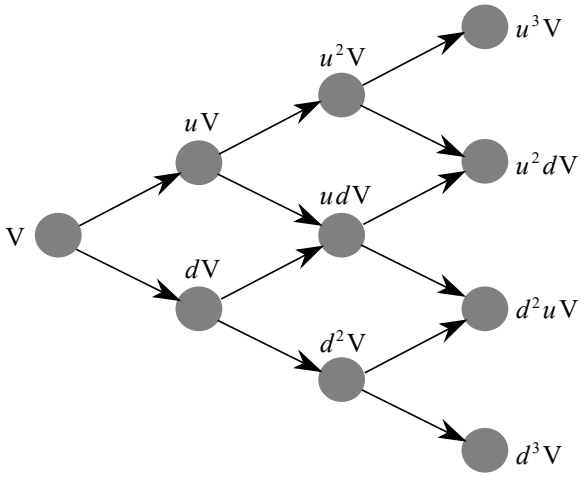


Figura 6.13 – Árvore binomial com três passos de tempo.

A raiz da árvore é o preço do ativo hoje e cada coluna da árvore representa todas as possibilidades de preço em um dado tempo. Cada nó tem dois ramos com valores *u*V e *d*V, de forma que *u* e *d* representam os fatores de elevação e queda do preço da ação em um determinado período *dt.* Os fatores *u* e *d* podem assumir quaisquer valores, por exemplo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}} \quad \text{e} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} \tag{6.101}$$

onde σ representa a volatilidade do ativo. Observe, nesse caso, que $ud = 1$ e, portanto, $ud\text{V} = \text{V}$. Se V é o valor do ativo no tempo *t*, então em um tempo $t + dt$ seu valor é $\text{V}e^{rdt}$. Com essas condições, após um delta de tempo, obtém-se a seguinte relação:

$$\text{V}e^{rdt} = pu\text{V} + (1-p)d\text{V} \tag{6.102}$$

onde *r* é a taxa livre de risco. A probabilidade *p* é determinada levando-se em consideração que, durante o período *dt*, o retorno de uma carteira protegida é igual ao de um investimento livre de risco. Esse foi o mesmo princípio utilizado na formulação da EDP de Black e Scholes. Da Eq. (6.102) se conclui que:

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d} \tag{6.103}$$

Observe, adotando o mesmo raciocínio da árvore na Figura 6.13 para os ativos, que cada ramo da árvore binomial pode representar também a data de expiração de uma opção. Assim sendo, se V é o preço da ação na data de expiração e K é o preço de exercício da opção, então uma opção de compra de valor F, na data de hoje, é precificada com o tempo conforme o lado esquerdo da Figura 6.14 a seguir:

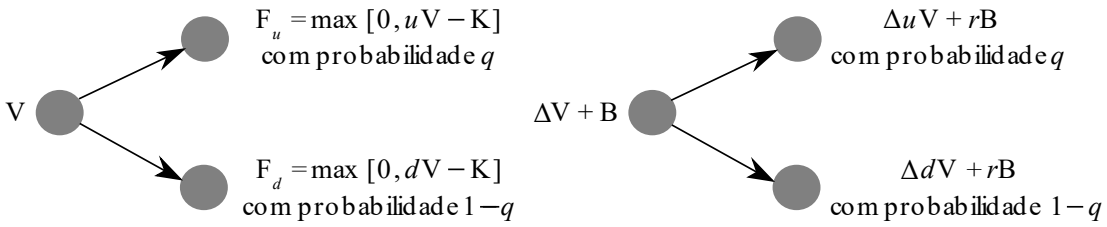


Figura 6.14 – Opção de compra no modelo BOPM.

Da mesma forma, se for possível uma carteira com Δ lotes de ação e um montante B a uma taxa livre de risco *r*, a posição da carteira, ao final de um período, será conforme o lado direito da Figura 6.14. Supondo que seja possível comprar ou vender lotes de ação e tomar emprestado ou emprestar em quaisquer proporções, escolhe-se uma que torne o retorno da carteira igual ao retorno das opções, logo

$$\Delta uV + rB = F_u \quad \text{e} \quad \Delta dV + rB = F_d \tag{6.104}$$

de onde se deduz que:

$$\Delta = \frac{F_u - F_d}{(u-d)V} \quad \text{e} \quad B = \frac{uF_d - dF_u}{(u-d)r} \tag{6.105}$$

Os valores de Δ e B representam o *hedge* do portfólio. Dessa forma, em caso de não arbitragem, o valor corrente da opção de compra não pode ser maior nem menor do que ΔV + B. Assim, o preço da opção fica definido como:

$$F = \Delta V + B = \frac{F_u - F_d}{(u-d)} + \frac{uF_d - dF_u}{(u-d)r} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)F_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)F_d\right] \tag{6.106}$$

se esse valor for maior que V - K. Caso contrário, F = V - K. Definindo

$$p = \frac{r-d}{u-d} \quad \text{e} \quad 1-p = \frac{u-r}{u-d} \tag{6.107}$$

a Eq. (6.106) é simplificada para

$$F = \frac{1}{r}[pF_u + (1-p)F_d] \tag{6.108}$$

Note que a Eq. (6.108) é para qualquer valor de *p*; logo, mesmo que diferentes investidores esperem probabilidades diferentes de subida ou queda dos valores de seus ativos, concordarão com o valor da opção relacionada ao ativo. O valor da opção independe da atitude do investidor frente ao risco. A única variável aleatória da qual o valor da opção depende é o próprio valor da ação.

O valor de *p* é igual ao valor de *q* se o investimento for neutro ao risco. Para ver isso basta igualar o retorno do investimento com o retorno de um ativo livre de risco. Logo

$$q(uV) + (1-q)(dV) = rV \tag{6.109}$$

resultando

$$q = \frac{r-d}{u-d} = p \tag{6.110}$$

Considere agora um portfólio com uma opção de compra com dois períodos antes da data de exercício, conforme a Figura 6.15 a seguir:

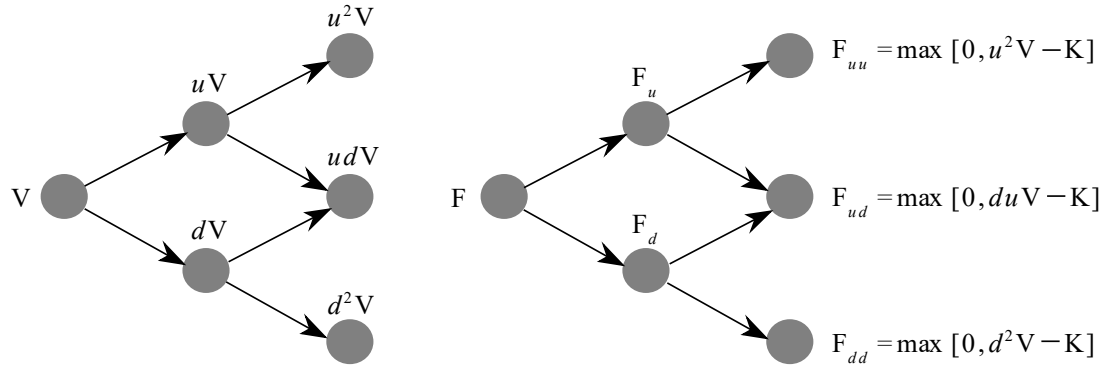


Figura 6.15 – Opção de compra com dois períodos antes da data de exercício (BOPM).

Aplicando ao portfólio da Figura 6.15, por analogia com o caso anterior, resulta nos seguintes valores para a opção de compra:

$$\mathrm{F}_u = \frac{1}{r}[p\mathrm{F}_{uu} + (1-p)\mathrm{F}_{ud}] \tag{6.111}$$

$$\mathrm{F}_d = \frac{1}{r}[p\mathrm{F}_{du} + (1-p)\mathrm{F}_{dd}] \tag{6.112}$$

Substituindo as Eqs. (6.111) e (6.112) na Eq. (6.108) resulta:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{r^2}[p^2\mathrm{F}_{uu} + 2p(1-p)\mathrm{F}_{ud} + (1-p)^2\mathrm{F}_{dd}] \tag{6.113}$$

ou

$$\mathrm{F} = \frac{1}{r^2}[p^2 \max[\,0, u^2\mathrm{V} - \mathrm{K}] + 2p(1-p)\max[\,0, ud\mathrm{V} - \mathrm{K}] + (1-p)^2 \max[\,0, d^2\mathrm{V} - \mathrm{K}]] \tag{6.114}$$

Usando um método recursivo, determina-se então o valor da opção de compra para qualquer período com a seguinte proposição:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{r^n}\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\max[\,0, u^j d^{n-j}\mathrm{V} - \mathrm{K}]\right] \tag{6.115}$$

Além do modelo binomial, um modelo similar foi publicado por Boyle em 1986, utilizando-se uma árvore trinomial. Com raciocínio similar, Korn, Kreer e Lenssen (1998) propuseram um modelo baseado em três ramos, incluindo a taxa de dividendos do ativo. No caso de uma árvore trinomial, de cada nó resultam as seguintes possibilidades: elevação do preço, queda ou manutenção (*u* "*up*", *d* "*down*" e *m* "*midle*", respectivamente). Nesse caso,

$$u = e^{\sigma\sqrt{2dt}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} \qquad \text{e} \qquad m = 1 \tag{6.116}$$

com as probabilidades correspondentes, conforme a segue:

$$p_u = \left(\frac{e^{(r-\delta)dt/2} - e^{-\sigma\sqrt{dt/2}}}{e^{\sigma\sqrt{dt/2}} - e^{-\sigma\sqrt{dt/2}}}\right)^2 \tag{6.117}$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{dt/2}} - e^{(r-\delta)dt/2}}{e^{\sigma\sqrt{dt/2}} - e^{-\sigma\sqrt{dt/2}}}\right)^2 \tag{6.118}$$

e

$$p_m = 1 - (p_u + p_d) \tag{6.119}$$

onde δ é a taxa de dividendos do ativo.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6.7 – Considere os valores da Tabela 6.6 a seguir e aplique o modelo BOPM para determinação do valor da opção F. Comente alguma estratégia de *hedge* caso o mercado ofereça preços diferentes do apresentado pelo modelo BOPM.

Tabela 6.6 – Valores hipotéticos.

V	*n*	K	*u*	*d*	*r*
$80	3	$80	1,5	0,5	1,1

Solução

De acordo com os dados, resulta

$$p = \frac{r - d}{u - d} = \frac{1{,}1 - 0{,}5}{1{,}5 - 0{,}5} = 0{,}6 \tag{6.120}$$

As árvores binomiais para os casos $n = 3$ e V = 80, $n = 2$ e V = 120 e $n = 2$ e V = 40 estão ilustradas na Figura 6.16 a seguir:

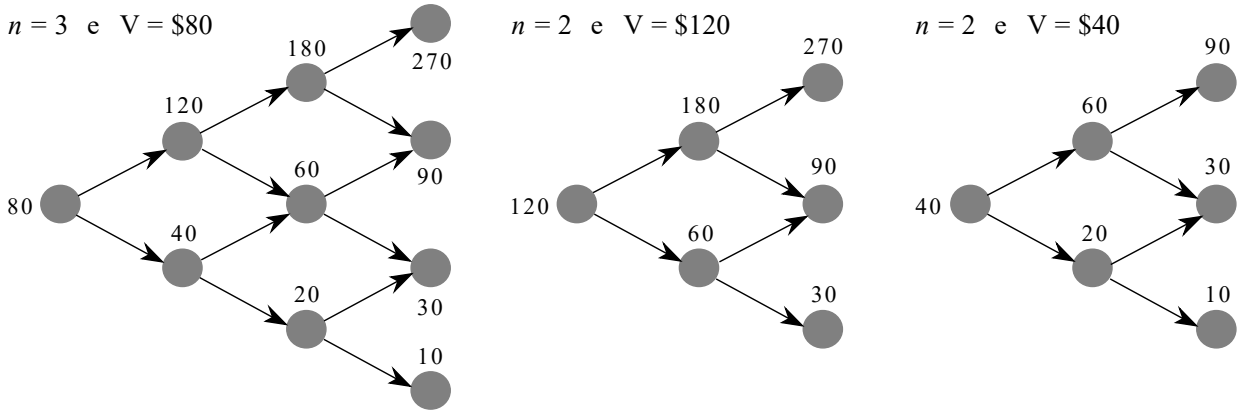


Figura 6.16 – Árvores binomiais – Exemplo 6.7.

Aplicando os dados na Eq. (6.115) resulta:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{1,1^3}[0{,}064(0) + 0{,}288(0) + 0{,}432(90 - 80) + 0{,}216(270 - 80)] = \$34{,}08 \tag{6.121}$$

Para um *hedge* adequado, a cada opção de compra vendida, deve-se manter na carteira ΔV em ações e B aplicado à taxa livre de risco, de forma que $\Delta = (\mathrm{F}_u - \mathrm{F}_d)/(u - d)\mathrm{V}$. A árvore da Figura 6.17 dá o caminho de valoração da opção com o correspondente valor de Δ.

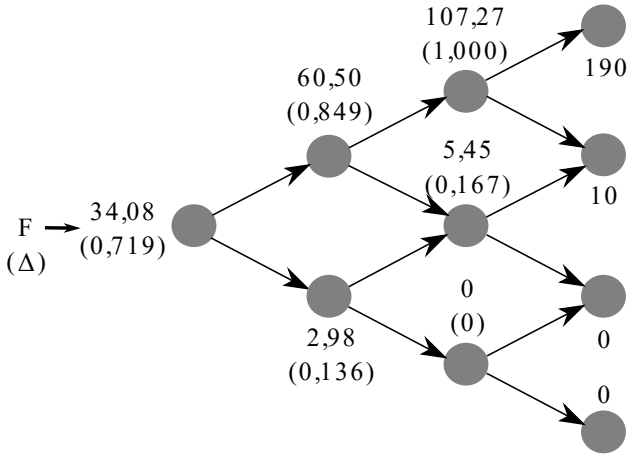


Figura 6.17 – Árvore binomial para o valor da opção.

Com a fórmula de cálculo do preço da opção em mãos, o investidor fica livre para realizar estratégias de posição visando ao ganho em caso de o mercado ofertar um preço diferente do valor indicado. Por exemplo, suponha que o preço de mercado da opção de compra seja de \$36 quando $n = 3$. O preço de equilíbrio indicado é de \$34,08, portanto, a opção está superestimada. Assim sendo, o investidor pode vender a opção de compra e assegurar um ganho relativo a essa diferença. Por exemplo, vendendo por \$36 a opção de compra e tomando

$34,08 desse valor para investir e manter 0,719 ações e aplicando 0,719×80 – 34,08 = $23,44, obtendo um lucro de 36 – 34,08 = $1,92. Alternativas e estratégias podem ser realizadas à medida que o tempo passa caso o mercado ofereça um preço diferenciado do indicado pelo modelo BOPM.

▪▪▪▪▪▪

6.4. Limitações dos Métodos de Precificação

Ainda que os métodos de precificação de ativos contribuam para a análise de investimentos em projetos de produção de petróleo, é na aplicação prática de alguns modelos propostos, como o da diversificação de portfólio de Markowitz (1952) e outros, que surgem problemas decorrentes da natureza dos investimentos reais. Lemme (2001), por exemplo, aponta alguns desses problemas em um trabalho de revisão sobre os métodos de valoração e suas aplicações nas práticas de negócios, dentre os quais se destacam:

- A indivisibilidade dos ativos.
- A baixa liquidez e os altos custos de transação.
- A repetição dos eventos é mínima, impossibilitando medidas estatísticas confiáveis.
- A assimetria de informação entre os investidores é desconhecida.
- Os investidores atuam de forma concentrada, inviabilizando a formação de carteiras.

Somem-se a esses fatores, o fato inconteste de que o mercado de petróleo é imperfeito e eventuais decisões estratégicas assumidas pelas corporações, sobretudo nas estatais, decorrem de influências políticas nem sempre alinhadas com a ciência financeira ou a estatística.

7

A MODERNA TEORIA DE INVESTIMENTO

Creio que, em qualquer época, eu teria amado a liberdade; mas, na época que em vivemos, sinto-me propenso a idolatrá-la.
Alexis de Tocqueville

O VPL como critério de decisão de projetos de produção de petróleo, por desconsiderar inúmeras alternativas operacionais, como postergar o início da produção, reduzir ou aumentar, suspender, reativar ou abandonar a produção, acaba por subestimar o retorno do investimento. A moderna teoria de investimento leva em consideração a precificação dessas alternativas, tidas como *opções reais* na linguagem empresarial.

Já era consenso, desde a década de 1970, que o critério do VPL, conforme proposto por Fisher (1907), ignorava três aspectos fundamentais:

- A irreversibilidade de parte ou de todo o investimento.
- A incerteza dos fluxos de caixa futuros, e
- O custo de oportunidade.

Esses aspectos, que juntos formam a base da metodologia das opções reais, foram explorados por autores como Dixit e Pindyck (1994), Trigeorgis (1995) e Copeland e Antikarov (2001), que se tornaram referências da moderna teoria de investimentos em condições de incertezas. A vantagem da metodologia de opções reais, frente à análise convencional do VPL, é a oportunidade de considerar inúmeras alternativas operacionais ao longo da maturidade do projeto que não podem ser desprezadas, pois representam ganhos financeiros.

7.1. Custo Afundado, Irreversibilidade e Timing

A moderna teoria de investimento, surgida em meados da década de 1960 e intensificada após o primeiro choque do petróleo, considera que a maioria das decisões de investimento compartilha, no mínimo, três características fundamentais. Em primeiro lugar, o investimento é *parcial* ou totalmente *irreversível*. Em outras palavras, isso implica que o custo inicial é, no mínimo, parcialmente não recuperável, tornando-se custo afundado. Em segundo lugar, há *incertezas* sobre a recompensa futura oriunda dos investimentos. O melhor que se pode fazer é avaliar as probabilidades das alternativas em termos de retorno.

Em terceiro e último, o investidor tem sempre algum grau de liberdade para decidir sobre o tempo mais apropriado para aplicar seus recursos. Dito de outra forma, o investidor pode prorrogar suas ações para obter mais informações, mesmo sabendo que em tempo algum terá certeza sobre os resultados futuros. Essas três características interagem para determinar a melhor alternativa do investidor. A teoria clássica de investimento não reconhece a importância das implicações qualitativas e quantitativas entre a irreversibilidade e o momento ótimo de investir, denominado de *timing* do investimento.

7.1.1. Custo afundado

Em economia, custos irrecuperáveis, também chamados de custos afundados, são recursos empregados no desenvolvimento de ativos que, uma vez realizados, não podem ser recuperados em qualquer grau de significância. Ou seja, o custo de oportunidade desses recursos, uma vez empregado, é próximo de zero. Um bom exemplo é o dispêndio que uma operadora de petróleo se compromete a realizar na fase de exploração de um

campo de petróleo, denominado de Programa Exploratório Mínimo (PEM). Em caso do campo se revelar não comercial, esse dispêndio é tratado como custo irrecuperável, se não todo, ao menos parcialmente.

Para que um dispêndio de investimento seja tratado como custo irrecuperável, deve-se referir às atividades fins da empresa em questão. Por exemplo, a maioria dos investimentos em *marketing* ou propaganda não é recuperada, mas também não é considerada custo afundado. Uma plataforma de petróleo de uma operadora, por outro lado, é usada somente para produzir petróleo, ou seja, em caso de não produzir por motivo de queda do preço do óleo, transforma-se em num custo afundado.

7.1.2. Irreversibilidade

A irreversibilidade pode ser parcial ou total, ou seja, depois de realizado e em caso de arrependimento não é possível recuperar todo o capital investido, nem mesmo um valor que seja significativo. A perfuração de um poço e o lançamento de um duto rígido marítimo são exemplos de investimentos totalmente irreversíveis, já que o custo de recuperação é maior que o valor de revenda. Já a completação de um poço submarino é parcialmente reversível, pois em alguns casos é vantajoso recuperar, por exemplo, uma árvore de natal molhada (ANM).

7.1.3. *Timing*

O *timing* do investimento é a terceira característica relevante, embora muitas vezes subestimado. O gerente tem de decidir se é melhor investir já ou aguardar por novas informações ou melhores condições. Conforme Dias (2005), por exemplo, em um cenário de monopólio estatal de E&P é possível, teoricamente, aguardar o tempo necessário para decidir investir ou não. Há, no caso, uma opção perpétua de investimento. Já em um cenário de competição, as empresas disputam os blocos em licitações por concessões do governo, e as que ganham o direito de investir têm um período para fazê-lo. Se findado o período não houver investimento, o bloco é devolvido ao governo para nova licitação. Nesse caso, se tem uma opção finita de investimento.

Uma patente também dá uma opção finita para investir em desenvolvimento do produto patenteado. Findo o período de validade da patente, que é estabelecido em legislação, a tecnologia cai em domínio público e outras empresas podem desenvolver produtos com essa tecnologia. Em outras situações, o tempo de expiração não é estabelecido em legislação, devendo ser estimado em função da probabilidade de entrada de concorrentes, já que, em muitos casos, essa entrada pode reduzir significativamente o valor da oportunidade de investimento. Em resumo, em um ambiente de incerteza, deve-se avaliar o momento certo para realizar um investimento irreversível, de forma que o projeto tenha probabilidades maiores de sucesso, maximizando a riqueza da empresa.

7.2. Irreversibilidade e Timing Aplicados em Projetos de Petróleo

Nos exemplos a seguir são explorados os conceitos de irreversibilidade e *timing* no cálculo do VPL de projetos, utilizando-se de dois casos: um envolvendo uma decisão em dois períodos discretos no tempo e outro com três. Essa abordagem, a mesma adotada por Dixit e Pindyck (1994, p. 27-54), tem por objetivo mostrar o quanto os dispêndios envolvidos em investimentos irreversíveis afetam, de forma significativa, o processo de decisão, o que implica reavaliar a regra tradicional do VPL.

7.2.1. Exemplo com dois períodos

Considere um processo de decisão de investimento completamente irreversível em uma plataforma destinada a produzir uma batelada anual de petróleo. Por simplificação, admita que essa plataforma é usada apenas para esse fim, e pode ser construída a um custo I e produzir instantaneamente, no início de cada ano, uma batelada indefinidamente a um custo operacional zero. O preço da batelada é de $200 e pode variar no início do ano seguinte, com probabilidade q de subir para $300 e 1 - q de cair para $100, a depender do preço da *commodity* no mercado internacional. Daí em diante, o preço é mantido nesse novo nível de valor indefinidamente. Ainda

por simplificação, o risco do preço futuro é totalmente diversificável, isto é, não está relacionado com o que ocorre com os indicadores da economia. Admita também uma taxa de desconto livre de risco de 10% *a.a.*

A Figura 7.1 mostra o esquema desse problema, indicando o preço da batelada de petróleo produzido pela plataforma nos tempos $t = 0$, 1 e 2 anos. Considere I = \$1600 o valor corrente do investimento e $q = 0{,}5$. Mais adiante é mostrado que a decisão de investimento também depende de I e q.

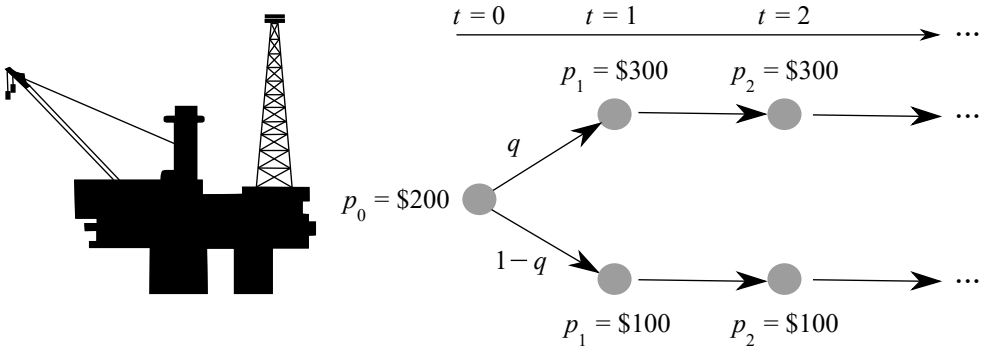


Figura 7.1 – Esquema de decisão envolvendo dois períodos, = 0, 1 e 2 anos.

Diante dos valores de I e q, surgem as seguintes questões: trata-se de um bom investimento? Você investiria agora ou esperaria por mais um ano para observar se o preço da *commodity* subirá ou cairá de valor? Para responder a essas e outras questões, suponha inicialmente que o investimento seja realizado hoje. O VPL calculado de maneira convencional, levando em consideração que o preço médio esperado é constante e igual a \$200, é

$$\text{VPL} = \overbrace{-\text{I}}^{investimento} + \overbrace{\text{V}_0}^{ativo} = -1600 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}1)^t} = -1600 + 220 = \$600. \qquad (7.1)$$

À primeira vista o VPL desse projeto é bem atrativo. O valor corrente do investimento (ativo plataforma produzindo uma batelada anual), denotado por V_0, é igual a \$2200, excedendo o custo de investimento, que é de \$1600. Tudo indica, portanto, que se deve seguir com o investimento. Mais adiante é mostrado que essa conclusão é precipitada, pois a Eq. (7.1) ignora o custo de oportunidade de investir agora, em vez de esperar e manter aberta a possibilidade de não investir em caso do preço cair.

Para avaliar a fragilidade de uma decisão que não leva em consideração o custo de oportunidade, calcule o VPL desse projeto no caso de se realizar o investimento no segundo momento. Em outras palavras, em vez de agir agora, o investidor deve esperar um ano e somente realizar o investimento caso o preço suba. Assim procedendo, resulta

$$\text{VPL} = 0{,}5\left[-\frac{1600}{1{,}1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{300}{(1{,}1)^t}\right] = \$773 \qquad (7.2)$$

Observe que no ano zero não há desembolso nem receita. No ano 1, o dispêndio de \$1600 é realizado somente se o preço subir para \$300, que ocorrerá em 50% das vezes. Conclui-se que, se a espera for de um ano antes de se tomar a decisão de investir, o VPL do projeto será de \$773, ao passo que seria de apenas \$600 se o investimento fosse realizado hoje. Claramente, é melhor esperar do que investir imediatamente. É claro que se a condição for investir hoje ou nunca, o investimento deve ser realizado de imediato. Nesse caso, não há a opção de espera, portanto, não há custo de oportunidade a ser avaliado e a simples regra do VPL como critério de decisão é suficiente. A mesma regra poderia ser aplicada se o investimento realizado hoje pudesse ser recuperado no ano seguinte, caso o preço caia de valor.

Como já referido, duas condições são necessárias para que se adote o custo de oportunidade no cálculo do VPL: irreversibilidade e a possibilidade de investir no futuro como uma alternativa de investir hoje (*timing*). Há situações em que a empresa não pode esperar, ou não pode esperar por um longo tempo para investir. Por exemplo, quando há fortes indícios de entrada antecipada de competidores no mercado. Outro exemplo são os casos de recursos minerais com data de expiração para serem explorados, sob pena de serem devolvidas as concessões ou extinções de contratos de exploração por força de leis regulatórias.

Qual o valor de se ter então a *flexibilidade* de tomar uma decisão de investimento no próximo ano em vez de investir agora ou nunca? No exemplo em questão, sabe-se que é melhor esperar do que investir agora, portanto esta flexibilidade há de ter um valor. É fácil, nesse caso, determinar o valor dessa *opção de flexibilidade*, que é justamente a diferença entre os dois VPLs, ou seja, \$773 - \$600 = \$173. Outra forma de enxergar o valor da flexibilidade é calcular o custo que o investidor estaria disposto a aceitar para ter a flexibilidade de investir no ano seguinte em vez de agora ou nunca. Esse valor pode ser obtido igualando os VPLs das Eqs. (7.2) e Eq. (7.1), ou seja, resolvendo a seguinte proposição:

$$\text{VPL} = 0{,}5\left[-\frac{\tilde{\text{I}}}{1{,}1} + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{300}{(1{,}1)^t}\right] = \$600 \tag{7.3}$$

que resulta $\tilde{\text{I}} = 1980$. Em outras palavras, implica que a oportunidade de realizar o investimento hoje e somente hoje a um custo de \$1600 tem o mesmo valor de uma oportunidade de realizar o investimento agora ou no próximo ano a um custo de investimento de \$1980. Como se vê, a flexibilidade implica custo adicional.

Suponha agora que exista um mercado futuro para as bateladas de petróleo com entrega ao final de um ano ao preço esperado de \$200. A possibilidade desse *hedge* mudaria a decisão do investidor? Especificamente, tal condição o levaria a investir na plataforma hoje em vez de esperar por mais um ano? A resposta é não.

Para perceber isso, considere o investimento hoje e uma operação de proteção ao risco que garanta o preço futuro da batelada por contrato. Para proteção do risco associado ao preço, seria necessário vender, no mercado futuro de curto prazo, bateladas[65] ao preço de \$2200 ($200 \times 1{,}1/0{,}1 = 2200$) Isso asseguraria o VPL do projeto para qualquer flutuação de preço. Se o preço aumentasse para \$300, o projeto teria um valor presente de \$3300 e a perda seria de \$1100 no mercado de futuro. Se o preço cair para \$100, o valor do projeto seria de \$1100 e o ganho, no mercado de futuro, seria de \$1100.

Como a chance é de 50% do preço subir ou cair, o hedge protegeria o VPL de qualquer flutuação do preço, mas sem nada adicionar. De qualquer forma o valor do projeto, hoje, é de \$2200 e, com efeito, o VPL hoje, com o hedge, seria de \$600 (ou seja, \$2200 - \$1600). Logo, seu valor seria exatamente o mesmo sem o hedge, ver Eq. (7.1). Não há resultado adicional realizando um *hedge* e ainda continua sendo a melhor alternativa esperar um ano para realizar o investimento. Esse resultado é uma variante do teorema de Modigliani e Miller (1958).

A oportunidade de investimento é análoga à opção de compra em mercado de ativos financeiros, uma *call option*. No exemplo em questão, tem-se uma opção que é favorável financeiramente, uma opção *in the money*. Significa que se exercida a decisão de investir hoje, o resultado é positivo. Uma opção é desfavorável, ou seja, é *out of the money*, se exercida hoje resultar negativo. Deduz-se, nesse caso, que mesmo a opção sendo *in the money*, o melhor é esperar do que exercê-la hoje. No próximo ano, se o preço subir, a opção é exercida e paga-se \$1600 para um ativo que vale $V_1 = 3300$, ou seja,

[65] Hedge = spot$[(1 + r)/r]$ = spot$[(1{,}1)/0{,}1]$ = 11×spot

$$V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1{,}1)^t} = 3300 \tag{7.4}$$

se o preço cair para \$100, o ativo terá um valor de apenas \$1100 e a opção não será exercida. Não há sentido em pagar \$1600 por um ativo que vale \$1100. Ou seja, em vez de usar o VPL como critério, é melhor dispor de um critério que expresse o valor da oportunidade de investimento para qualquer tempo, o qual é denominado de valor da opção.

Considere F_0 o valor da oportunidade de investimento hoje, isto é, o que o investidor se dispõe a pagar hoje para ter a oportunidade de investir e, F_1, o valor da oportunidade de investimento no próximo ano. Observe que F_1 é uma variável aleatória e depende do que ocorre com o preço futuro. Se o preço subir para \$300, então o valor de F_1 é igual a:

$$F_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1{,}1)^t} - 1600 = \$1700 \tag{7.5}$$

Por outro lado, se o preço cair para \$100, a opção de investir não será exercida, e neste caso F_1 é igual a zero. É possível, portanto, conhecer todos os valores de F_1. O problema é determinar F_0, o valor da oportunidade de investir hoje. Para a solução do problema, considere um portfólio com dois componentes: a oportunidade do investimento em si e um certo número de bateladas de petróleo. O número de bateladas deve ser de tal modo que o investimento nesse portfólio seja livre de risco, isto é, o seu valor, no próximo ano, seja independente do aumento ou queda do preço.

Especificamente, considere um portfólio no qual se mantém a oportunidade ótima de investir e uma posição vendida[66] de n bateladas. Assim, o valor desse portfólio é $\phi_0 = F_0 - np_0 = F_0 - 200n$ e, no ano seguinte, $\phi_1 = F_1 - np_1$. Esse último portfólio depende de p_1. Se p_1 atingir o preço de \$300, conforme a Eq. (7.5), resulta $F_1 =$ \$1700 e $\phi_1 = 1700 - 300n$. Se p_1 cair para \$100, então resulta $F_1 = 0$ e $\phi_1 = -100n$. Agora, deve-se escolher um valor de de tal modo que o portfólio ϕ_1 seja livre de risco e independa do que ocorra com o preço da batelada. Para isso, basta igualar os valores do portfólio nos dois períodos, ou seja:

$$1700 - 300n = -100n \tag{7.6}$$

que resulta $n = 8{,}5$. Com esse valor, tem-se que $\phi_1 = -850$.

O importante, agora, é calcular o retorno caso o investidor decida manter posição nesse portfólio. O retorno do capital, após um ano, será $\phi_1 - \phi_0$ menos o dispêndio adicional para manter essa posição. Uma vez que a taxa esperada de ganho de capital do produto é zero, pois o preço esperado para o ano seguinte é o mesmo dos demais anos (\$200), nenhum investidor racional manteria essa posição; a menos que tal investidor espere ganhar, no mínimo, 10% por ano, que é a taxa de desconto (TMA). Uma posição vendida, portanto, requer um dispêndio de $0{,}1p_0 =$ \$20 por batelada por ano. Como a posição, nesse portfólio, representa manter bateladas, o dispêndio total para tal posição é de $8{,}5 \times \$20 = \$170$. Assim, o retorno desse portfólio durante um ano é:

$$\phi_1 - \phi_0 - 170 = \phi_1 - (F_0 - np_0) - 170 = -850 - F_0 + 1700 - 170 = 680 - F_0 \tag{7.7}$$

Como o retorno é livre de risco, isso implica que deva ser igual ao retorno da taxa livre de risco, que nesse caso é de 10% do valor inicial do portfólio. Assim, tem-se que:

$$680 - F_0 = 0{,}1(F_0 - 8{,}5p_0) = 0{,}1(F_0 - 1700) \tag{7.8}$$

que resulta $F_0 =$ \$773. Note que esse valor é igual ao calculado pela Eq. (7.2); ou seja, é o mesmo valor do VPL considerando a oportunidade de investimento seguindo a estratégia ótima de esperar um ano antes de qualquer decisão de investimento.

[66] As posições compradas e/ou vendidas em ações têm o objetivo de eliminar ou reduzir riscos sistemáticos. É comum o termo *long* e *short*, uma estratégia de compra de um ativo que se espera que aumente de valor (posição *long*), ao mesmo tempo em que se vende outro ativo que se espera que caia de valor (posição *short*). O objetivo é lucrar com a diferença.

Conclui-se que o valor da oportunidade de investimento, isto é, o valor da opção de investir no projeto é \$773. O *payoff* do investimento, desde que exercendo hoje a opção, é \$2200 - \$1600 = \$600. No entanto, quando se exerce a opção, há de se considerar o custo de oportunidade. Assim, o custo total do investimento é, de fato, \$1600 + \$773 = \$2373 > \$2200. Como resultado, deve-se esperar e manter a opção de investir em aberto, em vez de investir hoje.

a) Incerteza do custo de investimento

Neste item é mostrada a incerteza quanto ao custo de investimento. Para o exemplo em questão, sabe-se que o custo de investimento direto é I = \$1600. Daí se pode questionar: de quanto seria então a opção de investir se o investimento fosse abaixo ou acima de \$1600? É fácil deduzir que manter uma posição vendida de bateladas em um portfólio livre de risco dependerá do valor I, conforme a Eq. (7.9) a seguir:

$$n = 16{,}5 - 0{,}005 \times \mathrm{I} \tag{7.9}$$

Note que a Eq. (7.9) é obtida igualando os valores de ϕ_1 para qualquer cenário de preço, ou seja, $\phi_1 = F_1 - np_1 = 3300 - I - 300n = -200n$ ou $200n = 3300 - I \rightarrow n = 16{,}5 - 0{,}005 \times I$. Da Eq. (7.8) pode-se deduzir que $80n - F_0 = 0{,}1(F_0 - 200n)$. Substituindo o valor de n, obtém-se o valor corrente da opção de investir em função de I, ou seja:

$$\mathrm{F_0} = 1500 - 0{,}455 \times \mathrm{I} \tag{7.10}$$

A Eq. (7.10) indica que o valor da oportunidade ótima de investimento é função direta do custo de investimento. Como já demonstrado, se I = \$1600 é melhor esperar um ano do que investir hoje. Daí surge outra questão: existirão valores de I para o qual a estratégia de investir hoje é a preferida?

Para responder a essa questão é necessário lembrar que se deve investir hoje se o resultado do investimento for, no mínimo, tão alto quanto o custo total, isto é, o custo direto I somado ao custo de oportunidade F_0. Como o resultado de investir hoje é de V_0 = \$2200, logo se tem que para investir hoje é necessário que $2200 > I + F_0$. Substituindo na Eq. (7.10), resulta que:

$$\mathrm{I} + 1500 - 0{,}455 \times \mathrm{I} < 2200 \tag{7.11}$$

Portanto, se I < \$1284 é melhor investir hoje do que esperar. A razão disso é que esperar significa desistir do retorno do primeiro ano; nesse caso, a perda no retorno excede o custo de oportunidade. Se I = \$1284, F_0 = \$916 = V_0 - I, e torna-se indiferente investir hoje ou esperar por mais um ano, ao passo que se I > \$1284, é melhor esperar. A dependência de F_0 em função de I está indicada na Figura 7.2 a seguir.

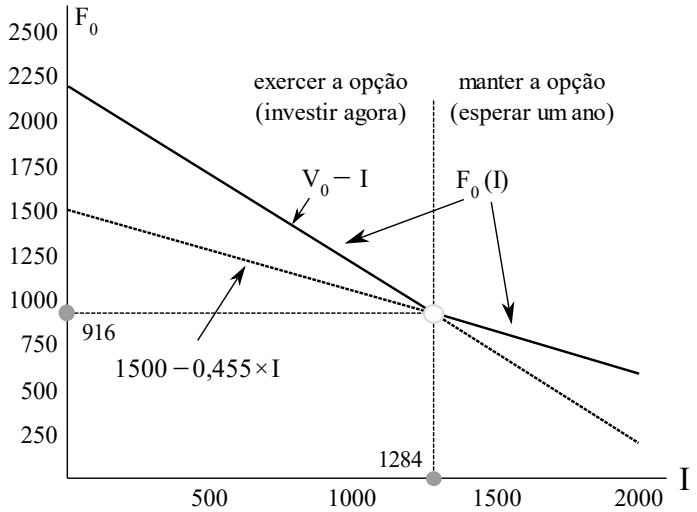


Figura 7.2 – Valor da opção como função do custo direto.

b) Incerteza do preço inicial

Considere agora manter o custo de investimento fixo I = \$1600, mas o preço inicial p_0 variando. Independentemente do valor inicial de p_0, a probabilidade de o preço subir 50% no próximo ano é de 0,5, e de cair 50% é também de 0,5. A partir do ano seguinte o preço se mantém constante indefinidamente (ver esquema na Figura 7.3).

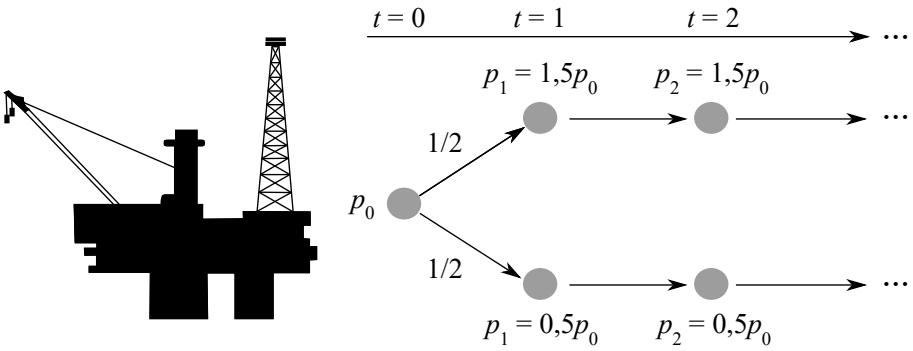


Figura 7.3 – Variação do preço para dois períodos.

Para avaliar a opção, considere novamente um portfólio livre de risco no qual a opção é mantida em conjunto com uma posição vendida de certo número de bateladas. O valor do portfólio hoje é, portanto, $\phi_0 = F_0 - np_0$. O valor do portfólio no próximo ano depende de p_1, para um projeto que vale:

$$V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p_1}{(1,1)^t} = 11p_1 \tag{7.12}$$

O investimento só será realizado se o valor de V_1 na Eq. (7.12) for maior que \$1600, o custo direto de investimento. Assim, segue que $F_1 = \max[0,11p_1 - 1600]$. Suponha que o valor de p_0 esteja em um range de tal modo que, se o preço subir no próximo ano ($p_1 = 1,5p_0$), valerá a pena investir, e se o preço cair não será vantajoso. Para esta condição, segue que $\phi_1 = V_1 - I - np_1 = 16,5p_0 - 1600 - 1,5np_0$ se o preço subir, e $\phi_1 = -0,5np_0$ se o preço cair. Igualando os valores de ϕ_1 para os dois cenários, tem-se que:

$$n = 16,5 - \frac{1600}{p_0} \tag{7.13}$$

Note que se o valor de n for escolhido conforme a Eq. (7.13), resulta que $\phi_1 = -8,25p_0 + 800$ vale tanto para um cenário de preço em alta como para um cenário de preço em queda. Para o cálculo do retorno desse portfólio, é importante lembrar que uma posição vendida requer um dispêndio adicional de $0,1np_0 = 1,65p_0 - 160$. Dessa forma, o retorno desse portfólio é $\phi_1 - \phi_0 - 0,1np_0 = 6,6p_0 - F_0 - 640$. Desde que o retorno seja livre de risco, espera-se que o valor seja igual a $0,1\phi_1 = 0,1F_0 - 1,65p_0 + 320$. Resolvendo o problema, chega-se no seguinte valor da opção de investimento em função de p_0.

$$F_0 = 7,5p_0 - 727 \tag{7.14}$$

Observe que, se o valor de p_0 for baixo o suficiente, não será vantajoso investir em nenhum momento, e se p_0 for alto o suficiente, talvez seja melhor investir agora do que daqui a um ano. Surge então a seguinte questão: abaixo de qual preço não será vantajoso investir em nenhum momento? A partir da Eq. (7.14), se $F_0 = 0$ então tem-se que $7,5p_0 = \$727$ ou $p_0 = \$97$. Portanto, se $p_0 < \$97$, V_1 será menor que \$1600, mesmo que o preço suba 50% no próximo ano. Outra questão seria: para qual valor de p_0 se deve investir agora em vez de esperar um ano? Mais uma vez se deve investir agora se o valor do projeto, hoje, exceder o custo total, ou seja, exceder o valor \$1600 + F_0. Assim, o preço crítico, denotado por p_0^*, satisfaz o valor $V_0 = \$1600 + F_0$, isto é:

$$11p_0^* = 1600 + 7{,}5p_0^* - 727 \tag{7.15}$$

que resulta p_0^* = \$249. Assim, a dependência de F_0 em função de p_0 pode ser ilustrada por meio de um gráfico semelhante ao da Figura 7.4, cujos valores estão reportados na Tabela 7.1 a seguir.

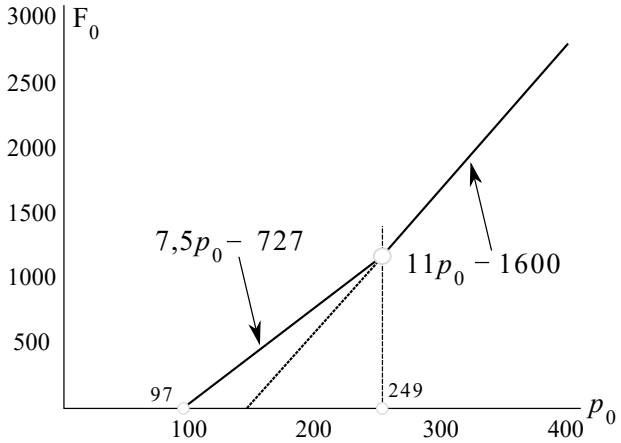


Figura 7.4 – Valor da opção como função do preço inicial (dois períodos).

Tabela 7.1 – Estratégia ótima de investimento.

Range de p_0	Valor da opção	Regra do investimento ótimo
$p_0 \leq 97$	$F_0 = 0$	Nunca investir
$97 < p_0 \leq 249$	$F_0 = 7{,}5p_0 - 727$	Investir no período 1 somente se o preço subir
$p_0 > 249$	$F_0 = 11p_0 - 1600$	Investir agora, no período 0

c) Incerteza do preço futuro

Pode-se determinar o valor da opção de investir como função da probabilidade q, isto é, como função da probabilidade de o preço subir no próximo ano. O leitor relembra que, para manter uma posição vendida no portfólio em questão e livre de risco, é necessário um número de bateladas n = 8,5. Esse valor é independente de q. A razão disso é que esse valor depende dos possíveis valores que o portfólio terá no período 1, e não das probabilidades de o portfólio ter um daqueles valores futuros. No entanto, o dispêndio requerido para uma posição vendida depende de q, pois o ganho esperado de capital por manter as bateladas depende de q.

Para esse cálculo, considere $\varepsilon_0(p_1)$ o valor esperado da batelada no próximo ano, com base no conhecimento do preço no período inicial. Logo, ainda com base no esquema da Figura 7.3, tem-se que:

$$\varepsilon_0(p_1) = 1{,}5qp_0 + (1-q)0{,}5p_0 = (q + 0{,}5)p_0 \tag{7.16}$$

Portanto, a taxa de ganho esperada de capital de uma batelada é $[\varepsilon_0(p_1) - p_0]/p_0 = q - 0{,}5$ e o dispêndio requerido por batelada para uma posição vendida fica reduzido a $[0{,}1 - (q - 0{,}5)]\,p_0 = (0{,}6 - q)\,p_0$. O retorno do portfólio, considerando que esteja livre de risco, ou seja, com dispêndio de uma posição vendida em n bateladas, será então $\phi_1 - \phi_0 - (0{,}6 - q)np_0 = 0{,}1\phi_0$. Admitindo n = 8,5 e considerando $p_0 >$ \$97 (ver Tabela 7.1), o valor da opção F_0 em função de q seria

$$F_0 = 15qp_0 - 1455q \tag{7.17}$$

Note que o valor de F_0 cresce à medida que q cresce, desde que $p_0 >$ \$97. Isso é esperado, pois valores elevados de q significam probabilidades altas de que o preço subirá e a opção de investir será exercida. Se $p_0 <$ \$97, o investidor não optará pelo investimento nem agora nem depois, mesmo que o preço aumente de valor e, de acordo com a Eq. (7.17), tem-se que $F_0 = 0$.

De que forma então a decisão de investir dependerá da probabilidade q? Relembre que é melhor esperar investir do que agir agora desde que $F_0 > V_0 - I$. Nesse caso, tem-se que:

$$V_0 = p_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0(p_1)}{(1,1)^t} = p_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(q+0,5)p_0}{(1,1)^t} = (6+10q)p_0 \tag{7.18}$$

Portanto, é melhor esperar desde que

$$15qp_0 - 1455q > (6+10q)p_0 - 1600 \tag{7.19}$$

Isto é, desde que o preço inicial seja menor que um determinado preço crítico obtido a partir da Eq. (7.19), ou seja:

$$p_0 < p_0^* = \frac{1600 - 1455q}{6 - 5q} \tag{7.20}$$

Note que o preço crítico decresce à medida que q cresce. Em outras palavras, altas probabilidades de o preço subir induz a empresa a investir mais facilmente, pois o custo de esperar representa a renúncia da receita por não vender a batelada hoje, e cresce com q.

d) Aumento da incerteza sobre o preço

Quando a probabilidade q é alterada, mantendo todos os demais parâmetros fixos, o preço esperado para o período 1 é alterado. Suponha que o preço esperado no período 1 mantenha-se fixo no nível do preço inicial p_0, mas o percentual de aumento ou queda do preço futuro seja alterado para valores maiores. Nesse caso, a variância do preço para o período 1 aumentará. Daí surge a seguinte pergunta: qual o efeito sobre o valor da opção de investir F_0 de uma distribuição de p_1 em torno da média, e qual o efeito sobre o preço crítico acima do qual a opção de investir imediatamente é melhor do que esperar?

Considere inicialmente q igual a 0,5 e o preço futuro flutue 75%, tanto para cima como para baixo. Embora a variância seja alta, considere que p_0 seja o valor futuro esperado. Para encontrar o valor de F_0, o procedimento é o mesmo, criando um portfólio livre de risco e equacionando o seu retorno, depois comparando-o com um portfólio livre de risco. Novamente aqui, a posição é vendida envolvendo n bateladas. Assim, tem-se que $\phi_0 = F_0 - np_0$. No período 1, caso o preço aumente para $1,75p_0$, o valor do projeto será $V_1 = 11p_1 = 11(1,75p_0) = 19,25p_0$. Dado que $\phi_1 = F_1 - np_1$ e $F_1 = V_1 - I$, com essas igualdades chega-se ao seguinte valor do portfólio no período 1:

$$\phi_1 = 19,25p_0 - 1600 - 1,75np_0 \tag{7.21}$$

Se o preço cair para $0,25p_0$, neste caso $\phi_1 = -0,25np_0$. Equacionando os dois possíveis valores de ϕ_1, chega-se ao número de bateladas n:

$$n = 12,83 - 1067/p_0 \tag{7.22}$$

Dessa forma, $\phi_1 = -3,2p_0 + 267$. Relembrando que manter uma posição vendida requer um dispêndio de $0,1np_0 = 1,28p_0 - 107$. Assim, o retorno desse portfólio será $8,35p_0 - F_0 - 693$. Com isso, chega-se à expressão $0,1\phi_1 = 0,1F_0 - 1,28p_0 + 107$. Resolvendo para , obtém-se:

$$F_0 = 8,75p_0 - 727 \tag{7.23}$$

Se o preço for \$200, resulta $F_0 = 1023$, que é substancialmente maior que o valor \$773 determinado antes, quando a probabilidade era de apenas 50%, Eq. (7.2). Outra questão que se impõe é: por que há um aumento do valor da opção quando a incerteza sobre o preço futuro do produto aumenta? Esse acréscimo vem do aumento do potencial *payoff* da opção, resultando ainda o valor zero para a opção em caso de queda de preço, desde que não seja exercida.

É possível calcular o preço crítico inicial que garanta investir hoje em vez de esperar. Novamente, basta igualar o valor corrente do projeto $V_0 = 11p_0$ com o custo total do projeto, \$1600 + F_0. Utilizando a Eq. (7.23) para F_0, resulta um preço crítico $p_0^* = \$388$, bem superior ao valor determinado anteriormente, de \$249. Uma vez que o valor da opção é alto, o custo de oportunidade de investir hoje é maior do que o custo de oportunidade para o período 1, o que representa um grande incentivo para esperar e não decidir hoje.

É interessante considerar a variância do preço com mais detalhes analisando-a em conjunto com a variação da probabilidade q. Dessa forma, é possível estabelecer como os efeitos de boas notícias, preço futuro em alta, e de más notícias, preço futuro em queda, afetam o preço crítico. É possível demonstrar que o preço crítico só depende do quanto o preço futuro cai, e não do quanto o preço futuro aumenta. Ou seja, a capacidade do investidor de evitar as consequências das más notícias o levam a esperar. Esse princípio, *bad new principle*, termo cunhado inicialmente por Bernanke (1983), é encontrado também nos trabalhos publicados por Cukierman (1980).

Suponha que o preço inicial é p_0 e no período 1 comporte-se conforme a seguir:

$$p_1 = \begin{cases} (1+u)p_0 \text{ com probabilidade } q \\ (1-d)p_0 \text{ com probabilidade } 1-q \end{cases} \tag{7.24}$$

onde u é *up* e d é *down*. Admitindo que o custo de investimento direto seja I, o VLP, em caso de investir hoje, é:

$$\text{VPL} = -\text{I} + p_0 + q\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(1+u)p_0}{(1{,}1)^t} + (1-q)\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(1-d)p_0}{(1{,}1)^t} = -\text{I} + 10[1{,}1 + q(u+d) - d]p_0 \tag{7.25}$$

Por outro lado, em caso de esperar por um ano, o VLP será:

$$\text{VPL} = \frac{1}{1{,}1}\{q\max[0, -\text{I} + 11(1+u)p_0] + (1-q)\max[0, -\text{I} + 11(1-d)p_0]\} \tag{7.26}$$

É fácil mostrar e é intuitivo que o ponto que diferencia investir agora ou esperar ocorre no range dos valores de p_0, em que o investimento no período 1 é garantido se o preço subir, mas não se o preço cair. Assim sendo, a Eq. (7.26) pode ser reduzida para

$$\text{VPL} = \frac{q}{1{,}1}[-\text{I} + 11(1+u)p_0] \tag{7.27}$$

Igualando os VPLs obtidos nas Eqs. (7.25) e (7.27) e resolvendo para p_0, obtém-se:

$$p_0^* = \text{I}\left(\frac{0{,}1}{1{,}1}\right)\left(\frac{0{,}1 + (1-q)}{0{,}1 + (1-q)(1-d)}\right) \tag{7.28}$$

Note que o preço crítico na Eq. (7.28) não depende de u, o quanto o preço sobe, depende somente do quanto o preço cai e de sua probabilidade de ocorrência, 1 - q. Observe também que, quanto maior o valor de d, maior o preço crítico.

7.2.2. Exemplo com três períodos

No exemplo anterior foi considerada uma suposição, um pouco irreal, de certeza sobre o preço futuro após o primeiro ano. Na maioria dos mercados, o preço futuro é sempre uma incerteza e cresce com o horizonte temporal. Enquanto o preço futuro esperado é sempre igual ao preço corrente, a variância do preço futuro é normalmente maior à medida que se prolonga no tempo. Agora é mostrada uma evolução do preço por meio de um processo estocástico. Inicialmente, é interessante avaliar com mais detalhes o problema do investimento estendendo o exemplo analisado para três períodos.

Suponha que no tempo $t = 0$ preço do produto é p_0 e no tempo $t = 1$, o preço sobe ou cai 50% com probabilidade 0,5 cada. No tempo $t = 2$, o preço novamente sobe ou cai 50% com igual probabilidade. A partir do tempo $t = 2$, o preço se mantém constante (ver Figura 7.5 a seguir).

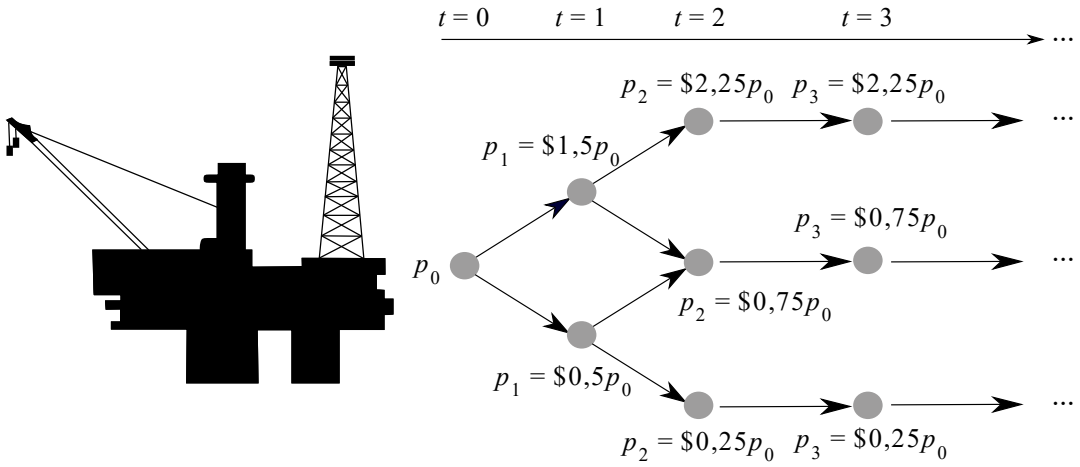


Figura 7.5 – Preço de uma batelada anual de petróleo nos tempos 1, 2 e 3 anos.

A diferença, agora, é que o problema de decisão se torna um pouco mais complicado, pois com o aumento de mais um período surgem cinco diferentes estratégias de investimento:

- Investir imediatamente.
- Esperar um ano e investir se o preço subir, e não investir em tempo algum se o preço cair.
- Esperar um ano e investir se o preço subir e, caso o preço caia, esperar mais um ano e investir se o preço subir.
- Esperar dois anos e somente investir se o preço subir nos dois anos.
- Nunca investir.

A regra ótima de investimento dependerá do preço inicial e do custo de investimento, e o valor da opção deve ser calculado para cada estratégia. Outra complicação é que o cálculo do valor da opção de investimento é construído com base em um portfólio livre de risco, que nesse caso não é a mesma estrutura durante os dois anos, pois o número de bateladas para manter uma posição vendida muda com a mudança do preço após o ano 1. Novamente, aqui é usado o método de precificação de opções, obtendo o valor da opção de investir hoje como função do preço inicial.

Nesse caso resolvem-se dois problemas de investimento separados, olhando a partir do tempo $t = 1$ primeiro para $p_1 = 0{,}5p_0$ e depois para $p_1 = 1{,}5p_0$, assumindo, em ambos os casos, que o investidor ainda não decidiu agir. Em cada caso é determinado um valor de F_1, construindo um portfólio livre de risco e calculando o seu retorno. Suponha que no tempo $t = 1$, $p_1 = 0{,}5p_0$ e que p_0 é tal que o investidor decide investir se o preço subir e não investir se o preço cair. Agora, imagine um portfólio que inclua a opção de investir mantendo uma posição vendida de n_1 bateladas. O valor desse portfólio é $\phi_1 = F_1 - n_1 p_0$. Se o preço subir no período 2 para $0{,}75p_0$, há o investimento. Assim sendo, a opção F_2 e o valor do portfólio ϕ_2 valem respectivamente:

$$F_2 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{0{,}75p_0}{(1{,}1)^t} - 1600 = 8{,}25p_0 - 1600 \tag{7.29}$$

e

$$\phi_2 = 8{,}25p_0 - 1600 - 0{,}75n_1 p_0 \tag{7.30}$$

Se o preço cair no período 2 para $0{,}25p_0$, não haverá investimento, resultando $F_2 = 0$ e $\phi_2 = -0{,}25n_1p_0$. Equacionando os valores de ϕ_2 para os dois cenários, chega-se ao valor n_1:

$$n_1 = 16{,}5 - 3200/p_0 \tag{7.31}$$

Resultando $\phi_2 = 800 - 4{,}125p_0$ tanto para o preço em alta como em queda. Calculando o retorno desse portfólio ($\phi_2 - \phi_1 - 0{,}1n_1\,p_1$) e igualando ao de um portfólio livre de risco ($0{,}1\phi_1$) chega-se ao valor de $F_1 = 3{,}75p_0 - 727$. Nesse caso, $F_1 = 0$ quando $p_0 = 194$. Portanto, se o preço cair no período 1 e $p_0 < 194$, o investidor não investirá sob nenhuma hipótese. Repetindo o mesmo raciocínio, agora assumindo o preço subindo no período 1, isto é $p_1 = 1{,}5p_0$. Isso exigirá uma posição vendida de $n_1 = 16{,}5 - 1067/p_0$ para que o portfólio seja livre de risco, e o valor da opção será $F_1 = 11{,}25p_0 - 727$. Nesse caso, $F_1 = 0$ quando $p_0 = 65$. Portanto, se o preço subir e $p_0 < 65$, o investidor não agirá sob nenhuma hipótese, mesmo se o preço subir nos dois períodos. Considerando que o investidor decida agir no período 1 em vez de esperar até o período 2, o valor líquido do investimento será $V_1 - I = 11(1{,}5p_0) - 1600$. Igualando esse valor ao de F_1 e resolvendo para p_0, obtém-se $p_0 = 166$. Portanto, se $p_0 > 166$, o investidor agirá no período 1 se o preço subir em vez de esperar outro ano.

O leitor perceberá que a estratégia de investimento dependerá de p_0 e não apenas de um valor, mas para diferentes ranges de p_0. Por exemplo, para $65 < p_0 \leq 166$, há o investimento no período 2 somente se o preço subir nos dois períodos; para $166 < p_0 \leq 194$, há o investimento no período 1 se o preço subir, mas não haverá investimento sob nenhuma hipótese se o preço cair, e assim por diante. A Figura 7.6 indica os valores da opção de investimento como função do preço inicial, e a Tabela 7.2 seguinte indica as estratégias ótimas de investimento para o caso de três períodos.

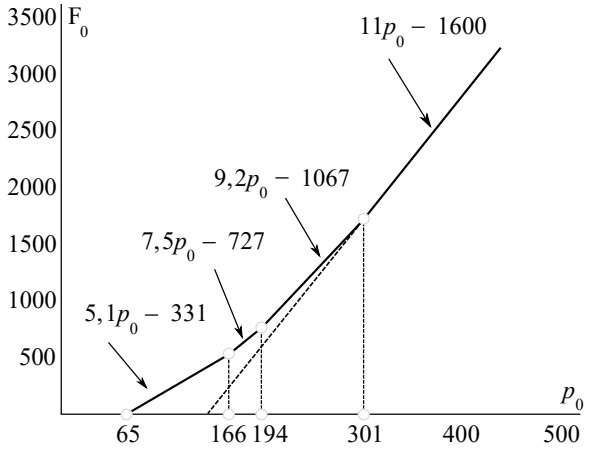


Figura 7.6 – Valor da opção como função do preço inicial (três períodos).

Tabela 7.2 – Estratégia ótima de investimento para três períodos

Range de P_0	Valor da opção	Regra do investimento ótimo
$p_0 \leq 65$	$F_0 = 0$	Nunca investir
$65 < p_0 \leq 166$	$F_0 = 5{,}1p_0 - 331$	Investir no período 2 somente se o preço subir no período 1 e no período 2
$166 < p_0 \leq 194$	$F_0 = 7{,}5p_0 - 727$	Investir no período 1 se o preço subir. Se o preço cair no período 1 não investir
$194 < p_0 \leq 301$	$F_0 = 9{,}2p_0 - 1067$	Investir no período 1 se o preço subir. Se o preço cair no período 1, então esperar e investir no período 2 se o preço subir
$p_0 > 301$	$F_0 = 11p_0 - 1600$	Investir no período 0

Note que, à medida que aumentam os períodos, a função F_0 vai se tornando uma curva suave. É mostrado adiante que essa curva inicia no ponto zero e cresce até encontrar o valor do retorno para o investimento imediato, V_0 - I. A curva e a reta encontram-se tangencialmente, e o ponto onde se encontram define o preço crítico p_0^*, acima do qual o investimento imediato é ótimo.

a) Incerteza sobre o custo

Retornando ao exemplo de dois períodos, é possível avaliar outras fontes de incertezas, por exemplo o custo. Esse tipo de incerteza torna-se importante em projetos de longa maturação, tais como refinarias de grande porte, complexos petroquímicos e produção de petróleo em condições de lâmina d'água ultraprofunda.

Considere duas fontes de incertezas. Em primeiro lugar, a plataforma requer aço, tubulações, equipamentos de alta tecnologia e mão de obra para construção, montagem e partida, e esses preços podem flutuar de maneira aleatória. Em segundo lugar, a legislação do governo pode alterar quantidades requeridas de alguns equipamentos em função de conteúdo nacional, metas de importação etc. Esses tipos de incertezas têm a mesma natureza da incerteza sobre o valor futuro do retorno do investimento V. Isso resulta também um custo de oportunidade caso a decisão seja de investir agora em vez de esperar por novas informações ou condições. Como resultado, é possível um VPL convencional indicando positivo e que, talvez, seja antieconômico iniciar o investimento.

Suponha, como exemplo, que I seja igual a \$1600 hoje e que no próximo ano aumente para \$2400 ou caia para \$800, com probabilidade de 0,5 cada. Surge daí a pergunta: deve-se investir hoje ou esperar um ano? Se o investimento for realizado hoje o VPL é –1600 + 2200 = \$600. O valor é positivo, mas esse cálculo ignora o custo de oportunidade, como nos demais casos. Para ver isso, calcule o VPL assumindo que o investidor espere um ano. Nesse caso, a estratégia ótima é investir se o custo cair para \$800. Assim, tem-se que:

$$\text{VPL} = 0{,}5\left[\frac{-800}{1{,}1} + \sum_{t=1}^{\infty}\frac{200}{(1{,}1)^t}\right] = \frac{700}{1{,}1} = \$636 \qquad (7.32)$$

o que prova que esperar, nesse caso, é melhor do que investir hoje.

Em qualquer projeto de longo prazo, o custo total do investimento direto só é conhecido, precisamente, ao término do projeto. Existem alguns valores adicionais do custo direto que são obscuros para o investidor. Esses valores adicionais são chamados de *shadow value*, pois não são percebidos diretamente no fluxo de caixa. Suponha, por exemplo, que o preço da batelada hoje e no futuro seja de \$200 e o custo de construção da plataforma seja incerto. Admita, em um primeiro momento, que o investimento seja de \$1000 com probabilidade de 0,5 de que esse valor seja suficiente para finalizar a obra, mas com probabilidade de 0,5 de demandar um adicional de \$3000 para concluí-la. Como o custo esperado é 1000 + 0,5(3000) = \$2500 e o valor do projeto hoje é de \$2200, o VPL parece ser negativo, sugerindo que não se deve investir. Mais uma vez, esse cálculo ignora o valor da informação obtida a partir do término do primeiro estágio da obra. É fato, também, que a obra deve ser abandonada caso requeira um adicional de \$3000. Nesse caso o VPL correto seria –1000 + 0,5(2200) = \$100. Esse valor é positivo e o investidor deve investir na primeira fase do projeto.

b) Incerteza sobre a taxa de atratividade

A próxima suposição é o custo de investimento e o retorno futuro como certos, mas a taxa de atratividade usada para o FCD como incerta. A ideia é investigar como essa incerteza afeta a decisão de investimento. A incerteza na taxa de atratividade tem dois efeitos sobre a decisão de investimento. Primeiro, a flutuação na taxa pode aumentar o valor esperado do resultado futuro do investimento.

Por exemplo, suponha um investimento com perpetuidade que paga \$1 por ano indefinidamente. O valor presente dessa perpetuidade é \$1/*r*, sendo *r* a taxa de atratividade. Se *r* = 10%, o valor é 1/0,1 = \$10. Suponha, no entanto, um valor de *r* incerto, que pode ser de 15% ou 5%, com 0,5 de probabilidade cada. O valor espera-

do da taxa é $\varepsilon(r) = 10\%$ e o valor esperado da perpetuidade é $0{,}5(1/0{,}05) + 0{,}5(1/0{,}1) = \$13{,}33 > \$10$. Isso faz com que o investimento se torne mais atrativo. Por outro lado, as incertezas sobre a taxa de atratividade podem conduzir ou postergar o investimento. Esse é o segundo efeito da incerteza da taxa de atratividade.

Para clarear o conceito, observe o retorno do exemplo de dois períodos. Dessa vez será assumido que o preço é fixo igual a \$200, e o custo da plataforma é também fixo e igual a \$2000. A única incerteza é sobre a taxa de atratividade. Hoje, a taxa é de 10%, mas no ano seguinte há uma probabilidade de 0,5 de subir para 15% e 0,5 de cair para 5%. Qual é, então, o valor da plataforma no próximo ano? Se não há incerteza, isto é, se a taxa de atratividade se mantém em 10%, o valor no próximo ano é:

$$V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}1)^t} = \$2200 \tag{7.33}$$

Em caso de incerteza sobre a taxa, o valor seria:

$$V_1 = \begin{Bmatrix} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}15)^t} = \$1533 \text{ com probabilidade de } 0{,}5 \\ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}05)^t} = \$4200 \text{ com probabilidade de } 0{,}5 \end{Bmatrix} \tag{7.34}$$

Portanto, o valor esperado de V_1 é igual a $(0{,}5)(1533) + 0{,}5(4200) = \$2867$, que é maior que o obtido na Eq. (7.33), em que não há incerteza sobre a taxa. Observa-se assim que a incerteza sobre a taxa de atratividade aumenta o valor esperado do projeto. Daí surge a seguinte questão: a incerteza sobre a taxa afeta a decisão de investimento? Primeiro observe que, se não há incerteza sobre a taxa de atratividade, claramente o investidor desejará investir hoje, pois:

$$\text{VPL} = -2000 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}1)^t} = \$200 \tag{7.35}$$

Se o investimento for realizado no próximo ano o valor é \$2200/1,1–\$2000 = \$0. A situação é diferente se há incerteza na taxa de atratividade. Se o investimento for realizado hoje, o VPL é:

$$\text{VPL} = -2000 + 200 + \frac{\varepsilon(V_1)}{1{,}1} = -1800 + \frac{2867}{1{,}1} = \$806 \tag{7.36}$$

Considere agora que o investidor espere um ano antes de decidir. Se a taxa aumentar para 15%, o valor da plataforma é somente \$1533, que é menor que o custo de investimento, \$2000. Portanto, o investimento só será realizado se a taxa cair para 5%. Como a probabilidade é de 0,5 de ocorrer essa redução, o VPL será:

$$\text{VPL} = 0{,}5\left[\frac{-2000}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}05)^t}\right] = \$1000 \tag{7.37}$$

O VPL, neste caso, é maior que o valor indicado na Eq. (7.36). Logo, é melhor esperar do que investir agora. Essa é uma análise simples da incerteza sobre a taxa de atratividade, mas que traduz uma implicação importante.

7.2.3. Escala e flexibilidade

Estudantes de economia ou de negócios aprendem muito cedo que a economia de escala pode ser uma importante fonte de redução de custos. Uma empresa poderá reduzir o custo médio e aumentar sua lucratividade construindo, por exemplo, uma planta de grande porte em vez de duas ou três pequenas. A decisão de aumentar a estrutura de produção é fácil de ser tomada se houver certeza do aumento da procura dos produtos.

Esse problema pode ser verificado com plantas industriais de geração de energia elétrica. Sabe-se que é mais barato gerar energia construindo uma planta de grande porte do que gerar a mesma quantidade de energia adicionando pequenos incrementos na capacidade de uma planta de pequeno porte. Por outro lado, em caso da demanda não se justificar, embora o custo seja maior, se ganha com a flexibilidade com pequenos incrementos. Assim sendo, é importante valorar essa flexibilidade. Essa ideia básica é ilustrada, aqui, com um exemplo de geração de energia eólica *offshore versus* termoelétrica a gás.

Considere uma demanda de energia que cresce constantemente 100 MW por ano. Sabe-se, portanto, que há a necessidade de aumentar a capacidade do parque de geração a cada ano, seja uma planta de termoelétrica a gás ou uma planta de eólica *offshore*. A questão é como fazê-lo. Para tanto, considere duas alternativas: uma planta de eólica *offshore* pode ser construída com 200 MW, o suficiente para atender dois anos de demanda, a um custo de $180 MM (Planta A), ou uma planta de termoelétrica a gás que pode ser construída com 100 MW a um custo de $100 MM (Planta B). Note que, ao preço corrente, a planta de eólica *offshore* é mais barata não somente em termos de custo de capital ($90 MM/100 MW contra 100 MW/100 MW), mas também em termos de custo operacional. Enquanto a Planta A tem um custo operacional de $19 MM por ano por cada 100 MW de capacidade, a Planta B tem um custo de $20 MM. Assuma também que a taxa de desconto é de 10% *a.a.* e que as plantas duram para sempre (ver esquema na Figura 7.7).

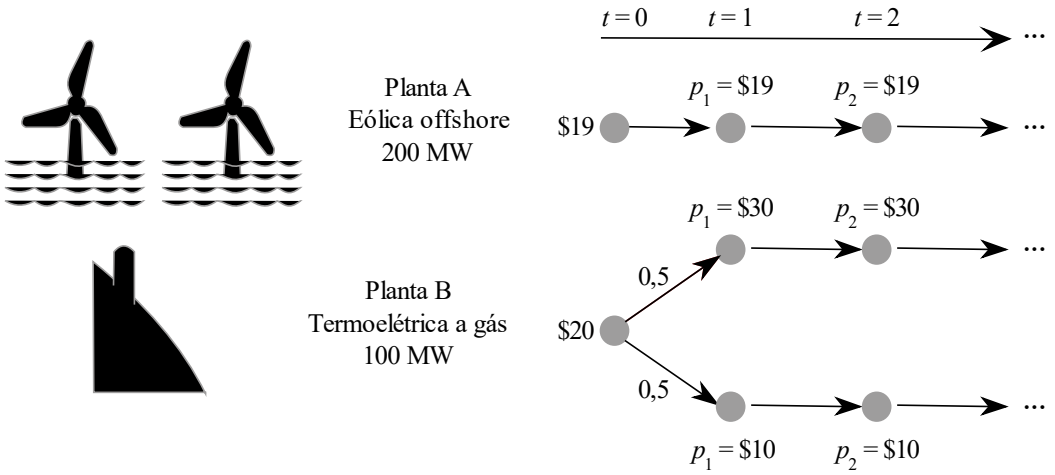


Figura 7.7 – Decisão entre duas plantas (termoelétrica a gás ou eólica *offshore*).

Se o preço se mantiver constante, a opção A é obviamente a melhor escolha. No entanto, é pouco provável que os preços se mantenham constantes. Sabe-se, porém, que o preço da eólica *offshore* é menos volátil que uma termoelétrica a gás (petróleo). Assume-se, portanto, que o preço da eólica *offshore* se mantém constante e que o preço da termoelétrica a gás poderá subir ou descer com igual probabilidade no próximo ano e se mantém constante ao longo do tempo. Se subir, o custo operacional sobe para $30 MM por ano; se descer, o custo operacional cai para $10 MM por ano.

A escolha agora é um pouco mais complexa. Embora o custo de capital e operacional da Plana A seja mais atraente do que a Planta B, considerando-se o preço corrente, a Planta B permite mais flexibilidade. Para avaliar qual a melhor decisão, deve-se calcular, para cada situação, o valor presente esperado do custo de geração de 100 MW por ano, iniciando no ano zero e para os demais anos indefinidamente.

Suponha um compromisso para atender a 200 MW de energia, independentemente da planta. Se a escolha for a planta de eólica *offshore*, o valor presente do custo será:

$$\mathrm{VP}_{\text{Custo A}} = 180 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{19}{(1{,}1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1{,}1)^t} = \$579 \tag{7.38}$$

Note que \$180 é o custo de capital para gerar \$200 MW e \$19 é o custo operacional anual para cada 100 MW. O primeiro somatório dos custos inicia-se na data de hoje e o segundo, no próximo ano. No entanto, se a escolha for a planta de termoelétrica a gás, o valor presente esperado dos custos será:

$$\mathrm{VP}_{\text{Custo B}} = 100 + \frac{100}{1{,}1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1{,}1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{20}{(1{,}1)^t} = \$611 \tag{7.39}$$

Portanto, a Planta A é a escolha preferida. Esse cálculo, porém, ignora a flexibilidade permitida pela planta de menor porte. Suponha uma instalação de \$100 MW de capacidade hoje, com a termoelétrica a gás, e se o preço subir no próximo ano, investe-se em uma planta de eólica *offshore* de \$200 MW de capacidade em vez de outra termoelétrica. O total, nesse caso, seria de \$300 MW de capacidade. Assim, para um cálculo adequado de comparação, deve-se considerar o valor presente dos \$100 MW adicionais, que seriam utilizados iniciando dois anos a partir de hoje, logo

$$\mathrm{VP}'_{\text{Custo B}} = 100 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1{,}1)^t} + \frac{1}{2}\left[\frac{100}{1{,}1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{(1{,}1)^t}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{180}{1{,}1} - \frac{90}{(1{,}1)^2} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1{,}1)^t}\right] = \$555 \tag{7.40}$$

Note que o terceiro termo do lado direito da Eq. (7.40) é o valor presente do capital e o custo operacional da segunda termoelétrica a gás de 100 MW (que é construída somente se o preço cair). O quarto termo é o valor presente do capital, e o custo operacional é apenas dos primeiros 100 MW da eólica *offshore* de 200 MW. Observa-se que, nesse caso, manter a flexibilidade é a decisão preferida.

Uma maneira de avaliar essa flexibilidade é respondendo à seguinte questão: de quanto é a redução do custo de capital da Planta A para que se torne a opção preferida? Para esse cálculo, considere $\mathrm{I_A}$ o custo de capital da Planta A. Assim, o valor presente de custo de instalação e operação da Planta A é:

$$\mathrm{I_A} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{19}{(1{,}1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1{,}1)^t} = \mathrm{I_A} + 399 \tag{7.41}$$

O valor presente do custo de fornecer 200MW instalando uma Planta B agora e no próximo ano uma Planta A ou B (dependendo do preço da termoelétrica subir ou cair), é:

$$100 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1{,}1)^t} + \frac{1}{2}\left[\frac{100}{1{,}1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{(1{,}1)^t}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{I_A}}{1{,}1} - \frac{0{,}5\mathrm{I_A}}{(1{,}1)^2} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1{,}1)^t}\right] = 510{,}5 + 0{,}248\mathrm{I_A} \tag{7.42}$$

Igualando a Eq. (7.41) com a Eq. (7.42), resulta que

$$\mathrm{I_A} + 399 = 510{,}5 + 0{,}248\mathrm{I_A} \tag{7.43}$$

ou $\mathrm{I_A}$ = \$148,3 MM. Veja que esse valor (Planta A de 200 MW) representa 75% de duas termoelétricas a gás. Em outras palavras, a *economia de escala* que compensaria a flexibilidade de uma planta de menor porte ocorreria se fosse possível construir uma planta de eólica *offshore* de 200 MW com um custo um pouco menor que 75% de duas plantas termoelétrica a gás de 100 MW.

7.3. Otimização Dinâmica sob Incerteza

Todo analista de projeto olha para o futuro no momento de decidir, e os modelos estocásticos são ferramentas poderosas para auxiliar nessa decisão, além de evidenciar oportunidades de investimentos e a forma como elas podem ser exercidas.

7.3.1. Programação dinâmica

O leitor deve ter notado que a abordagem sobre o valor da espera nas opções de investimento, conforme mostrado nos dois exemplos anteriores, segue um raciocínio recorrente. Isso sugere uma programação lógica que sirva para aplicações mais gerais na determinação do valor das opções. Essa é a ideia básica da programação dinâmica sob incerteza, que é apresentada aqui tanto para dois períodos como para períodos, seguindo o mesmo desenvolvimento de Dixit e Pindyck (1994, p. 95-106).

a) Dois períodos

No exemplo exposto, o valor da opção de espera foi determinado comparando o VPL da opção de espera com o VPL do investimento se exercido de imediato. O investimento representa o custo direto em uma plataforma que produz uma batelada anual de petróleo indefinidamente, sendo r a taxa de juros. Por simplificação, a plataforma é usada apenas para esse fim e pode ser construída instantaneamente a um custo , produzindo apenas uma batelada de petróleo por ano a um custo operacional zero.

Considere agora que o preço inicial no período 0 é p_0 e no período 1 é $(1 + u)\, p_0$ com probabilidade q ou $(1 - d)\, p_0$ com probabilidade $(1 - q)$. Os preços do período 1 se mantêm constantes para os demais períodos indefinidamente (ver Figura 7.8).

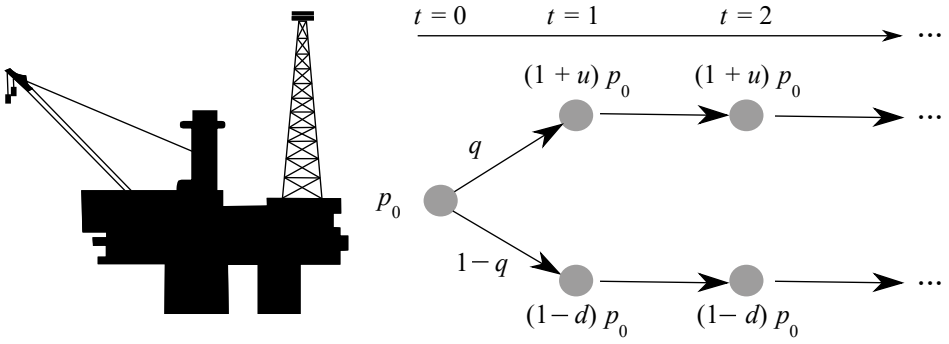


Figura 7.8 – Preço de uma batelada anual de petróleo nos tempos $t = 0$, 1 e 2 anos.

Suponha inicialmente que a oportunidade de investimento está disponível somente para o período 0. Caso a operadora decida não investir, não poderá agir de maneira diferente no período 1. O valor V_0 denota o valor presente esperado das receitas se a operadora decidir investir. Assim, ponderando as duas alternativas de preços pelas suas respectivas probabilidades, resulta

$$V_0 = p_0 + [q(1+u)p_0 + (1-q)(1-d)p_0]\left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots\right] \tag{7.44}$$

ou

$$V_0 = p_0[1 + r + q(u+d) - d]/r \tag{7.45}$$

Se $V_0 > I$, o investimento é indicado e o resultado é $V_0 - I$. Se $V_0 < I$, o investimento não é realizado e o ganho é 0. Portanto, se Ω_0 representa o *payoff* líquido do projeto quando a operadora é forçada a decidir se investe com base no critério do agora ou nunca, então

$$\Omega_0 = \max[V_0 - I, 0] \tag{7.46}$$

Agora, considere a situação em que a oportunidade de investimento é mantida para os períodos futuros. Surge daí uma nova abordagem: investir agora ou esperar para o que for melhor quando o período 1 chegar?

Suponha que a empresa não invista no período 0, em vez disso, espere. No período 1, os preços podem assumir os seguintes valores:

$$p_1 = \begin{cases} (1+u)p_0 & \text{com probabilidade } q \\ (1-d)p_0 & \text{com probabilidade } 1-q \end{cases} \tag{7.47}$$

e se mantém neste nível nos períodos seguintes. O valor presente da receita no período 1, descontando o fluxo de caixa de todos os períodos futuros a uma taxa *r*, é:

$$\mathrm{V}_1 = p_1 + \frac{p_1}{(1+r)} + \frac{p_1}{(1+r)^2} + \ldots = \frac{p_1(1+r)}{r} \tag{7.48}$$

para cada uma das duas possibilidades. Lembre-se que o preço pode subir ou cair entre os períodos 0 e 1. A empresa irá investir, portanto, se $\mathrm{V}_1 > \mathrm{I}$, ou seja

$$\mathrm{F}_1 = \max[\mathrm{V}_1 - \mathrm{I}, 0] \tag{7.49}$$

onde F_1 é chamado de valor de *continuidade* ou valor de *continuação*. Note que, a partir do período 0, tem-se o valor p_1 para o período 1 e os valores V_1 e F_1 são variáveis aleatórias. A expectativa do valor ponderado usando a informação disponível no período 0, denotado por E_0, é:

$$\mathrm{E}_0[\mathrm{F}_1] = q \max\left[\frac{(1+u)p_0(1+r)}{r} - \mathrm{I}, 0\right] + (1-q)\max\left[\frac{(1-d)p_0(1+r)}{r} - \mathrm{I}, 0\right] \tag{7.50}$$

Retornando agora à decisão no período 0, com a operadora dispondo de duas escolhas: investe imediatamente e obtém um resultado esperado do retorno da venda menos o investimento, V_0 - I, ou não investe e segue com um valor de continuação $\mathrm{E}_0[\mathrm{F}_1]$, conforme definido na Eq. (7.50), descontado de um fator $1/(1 + r)$, que representa seu valor no período 0. Obviamente, a escolha ótima para o período 0, denominado de F_0, recai sobre a de maior valor, ou seja:

$$\mathrm{F}_0 = \max\left\{\mathrm{V}_0 - \mathrm{I}, \frac{1}{1+r}\mathrm{E}_0[\mathrm{F}_1]\right\} \tag{7.51}$$

Em outras palavras, a decisão da operadora é aquela que maximiza a função definida na Eq. (7.51). Essa é a ideia da programação dinâmica. Toda a sequência do procedimento de escolha é dividida em duas etapas: a escolha imediata e a manutenção da decisão para o período seguinte. Todos os demais efeitos são sumarizados na equação de continuação.

b) Diversos períodos – Equação de Bellman

Na maioria das aplicações reais, o tempo é contínuo e as variáveis comportam-se como um processo de Wiener ou outro processo de difusão. No entanto, é recomendável, inicialmente, modelar essas variáveis usando um processo de Markov em tempo discreto, o que torna fácil a demonstração e compreensão de algumas propriedades do problema.

Nessa abordagem, em uma data qualquer *t*, o valor corrente de uma variável x_t é conhecida e seus valores futuros, x_{t+1}, x_{t+2}, … , são variáveis aleatórias. A suposição fundamental é que o processo estocástico é markoviano, ou seja, todas as informações relevantes para determinar a distribuição de probabilidade dos valores futuros estão sumarizadas no valor do estado atual x_t. Em cada período *t*, a empresa dispõe de algumas escolhas, que são representadas por uma variável de controle *u*. No exemplo de dois períodos, as opções eram investir agora ou esperar. A variável *u*, nesse exemplo, é um escalar binário, de forma que o valor 0 representa esperar, e o valor 1 investir agora. Em outras aplicações, *u* pode assumir uma variável contínua se, por exemplo, a escolha refere-se a um range de valores de investimento. Se a operadora tem outras escolhas além daquelas que influenciam o investimento, tal como a contratação de trabalhadores no tempo *t*, a variável *u* pode assumir um vetor, e assim por diante.

O estado x e a variável de controle u em qualquer tempo t afetam diretamente o *payoff* imediato da empresa, que é denotado por $\pi(x_t,u_t)$. As variáveis x_t e u_t de cada período também afetam as distribuições de probabilidades dos estados futuros, em que $\Phi_t(x_{t+1} \mid x_t,u_t)$ denota a função de distribuição de probabilidade acumulada do próximo estado sujeita às informações de estado e variável de controle atuais. O fator de desconto entre dois períodos quaisquer é sempre $1/(1+\rho)$, em que ρ é a taxa de desconto.

Assim, o objetivo é escolher uma sequência de controle $[u_t]$ no horizonte temporal que maximize o VPL esperado. Algumas vezes é necessário forçar um processo de decisão finalizando em algum tempo T, com um *payoff* líquido de terminação que depende do estado alcançado no processo, denotado por $\Omega_T(x_T)$. Com essas definições, pode-se aplicar a técnica de programação dinâmica sob incerteza. Lembre-se de que a ideia básica é dividir o período de decisão em duas etapas: o período imediato e todos os demais além deste.

Suponha que no tempo corrente t, o estado seja x_t e $F_t(x_t)$ o valor presente líquido de todo o fluxo de caixa quando a empresa toma todas as decisões ótimas a partir desse ponto. Quando a empresa opta pelas variáveis de controle u_t, o resultado imediato gerado é denotado por $\pi(x_t,u_t)$. O objetivo é tomar as decisões ótimas a partir de então, representadas por $F_{t+1}(x_{t+1})$. Dessa forma, a partir da perspectiva do período t, $F_{t+1}(x_{t+1})$ é tratado como uma variável aleatória. Assim sendo, deve-se tomar o seu valor esperado, $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$. Esse termo, como já definido anteriormente, é o valor de continuação esperado. Ao descontar deste um período, e somando-o ao payoff imediato, chega-se ao valor da continuação

$$\pi(x_t,u_t)+\frac{1}{1+\rho}E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \tag{7.52}$$

O objetivo é escolher u_t de tal modo que maximize o valor em (7.52), ou seja

$$F_t(x_t)=\max_{u_t}\left\{\pi_t(x_t,u_t)+\frac{1}{1+\rho}E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]\right\} \tag{7.53}$$

Essa é a ideia do princípio de *otimalidade* formulado por Bellman (1957), por meio do qual se afirma que uma estratégia ótima de otimização de um problema tem a seguinte propriedade: de qualquer ponto de uma trajetória ótima, a trajetória remanescente é ótima para um problema correspondente que se inicie naquele ponto e termine no mesmo ponto do problema anterior. Por esse motivo, a Eq. (7.53) é chamada de equação de Bellman ou equação fundamental de otimalidade. O valor de continuação para tempo contínuo é definido por:

$$E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]=\int F_{t+1}(x_{t+1})\,d\Phi_t(x_{t+1}|x_t,u_x) \tag{7.54}$$

onde o range de integração é sobre o intervalo em que x_{t+1} está distribuído, comumente denominado de suporte da função $\Phi_t(x_{t+1} \mid x_t,u_x)$.

No caso de dois períodos, por exemplo, o investimento imediato retorna V_0 - I, enquanto a espera não resulta *payoff* imediato no período 0, mas retorna o valor de continuação descontado, $E_0[F_1]/(1+\rho)$. Assim, a escolha ótima binária é o maior valor entre essas duas alternativas, ver Eq. (7.51). No caso de muitos períodos e com um horizonte temporal finito T, pode-se iniciar um processo numérico de simulação partindo do final do período para o início. Esse processo é conhecido pelo termo *work backward*. Como já definido, no final do horizonte temporal a empresa tem um *payoff* líquido de terminação $\Omega_T(x_T)$, portanto, o período anterior pode ser definido como

$$F_{T-1}(x_{T-1})=\max_{u_{T-1}}\left\{\pi_{T-1}(x_{T-1},u_{T-1})+\frac{1}{1+\rho}E_{T-1}[\Omega_T(x_T)]\right\} \tag{7.55}$$

que representa o valor da função F no período T - 1. De forma recursiva, pode-se resolver o problema de maximização para o estado u_{T-2} considerando o valor de $F_{T-1}(x_{T-1})$ calculado com a Eq. (7.55), ou seja:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{T}-2}(x_{\mathrm{T}-2}) = \max_{u_{\mathrm{T}-2}}\left\{\pi_{\mathrm{T}-2}(x_{\mathrm{T}-2}, u_{\mathrm{T}-2}) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}_{\mathrm{T}-2}[\mathrm{F}_{\mathrm{T}-1}(x_{\mathrm{T}-1})]\right\} \tag{7.56}$$

e assim sucessivamente, de forma *work backward*.

c) Horizonte infinito

No caso de não se ter um horizonte temporal finito para o processo de decisão, não há como calcular o valor da função no período final que possa ser usado num processo do tipo *work backward*. Em vez disso, pode-se usar um processo recursivo que facilite uma análise teórica, mas que permita também programação numérica. Note que a simplificação fundamental que um horizonte infinito traz para a Eq. (7.53) é a independência do tempo. É evidente que o estado atual x_t importa, mas não a data, no calendário, para o tempo t. As funções π e Φ, bem como a taxa ρ, são variáveis independentes da data corrente do calendário. Essa hipótese é assumida em muitas aplicações econômicas. Com efeito, a função F é a mesma para todos os períodos, embora avaliada em diferentes pontos x_t. Assim, ela é reescrita sem nenhum subscrito adicional referente ao tempo. Logo, a equação de Bellman (1957), para um tempo qualquer, se reduz para

$$\mathrm{F}(x_t) = \max_{u_t}\left\{\pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}[\mathrm{F}(x_{t+1})]\right\} \tag{7.57}$$

Uma vez que x_t e x_{t+1} podem se referir a qualquer estado possível, então, de forma geral, podem também ser reescritos como x e x'. Logo, para qualquer x resulta

$$\mathrm{F}(x) = \max_{u}\left\{\pi(x, u) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}[\mathrm{F}(x')|x, u]\right\} \tag{7.58}$$

onde agora o valor esperado está condicionado ao conhecimento do período atual relativo a x e u. A Eq. (7.58) é a equação de Bellman para tempo infinito, ou equação recursiva de Bellman para programação dinâmica. Apesar da aparência simples da Eq. (7.58), trata-se de uma equação não linear. Sabe-se que a escolha ótima de u depende de todos os valores de x. No livro teórico intitulado *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Stokey, Lucas e Prescott (1989) aprofundam as aplicações utilizando-se das funções recursivas de Bellman.

d) Parada ótima

O critério de parada ótima pode ser modelado com programação dinâmica. Nesse caso, a escolha em qualquer período do horizonte temporal é binária. Uma alternativa corresponde à parada do processo (máquina, produção, abandono de um campo de petróleo etc.) que resulta um *payoff* final e outra implica a continuação para mais um período, quando outra escolha binária é então disponibilizada. Para o caso de dois períodos, por exemplo, a parada do processo corresponde a fazer o investimento de imediato e a continuação é esperar. Nesse caso a opção esperar não gera resultado imediato dentro do período, no entanto, em outras aplicações pode até gerar fluxo de caixa.

Considere $\pi(x)$ o *payoff* imediato da empresa e $\Omega(x)$ o *payoff* de terminação. Assim, a equação de Bellman pode ser reescrita como:

$$\mathrm{F}(x) = \max\left\{\Omega(x), \pi(x) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}[\mathrm{F}(x')|x]\right\} \tag{7.59}$$

Para certos ranges de x, o valor máximo está no *payoff* de terminação, em outros ranges o valor máximo se expressa na função de continuação. Embora a prática seja adotar um critério de parada apenas para a função de terminação, é possível definir um *cutoff* x^* ótimo também para a função de continuação. Note que, no exemplo de dois períodos (Figura 7.4), o valor de \$249 para o preço determina duas regiões, de forma que o lado direito recomenda como estratégia ótima investir agora, e o lado esquerdo recomenda esperar.

Por enquanto, considere o caso em que a função de continuação é ótima para uma região onde $x > x^*$ e a função de parada é ótima para $x < x^*$. Em outras palavras, o objetivo é examinar situações em que a continuação é mais atrativa do que a parada para altos valores de x. Em termos matemáticos, a primeira condição é que a diferença definida por

$$\pi(x) + \frac{1}{1+\rho}\mathrm{E}[\Omega(x')|x] - \Omega(x) \tag{7.60}$$

aumente à medida que x aumenta. A segunda condição é que qualquer vantagem atual não deve ser suscetível de ser revertida em um futuro próximo. Se o período cresce, significa que a distribuição condicional $\Phi(x' \mid x)$ nos próximos períodos resulta também em maiores pesos para os valores de x. Em linguagem matemática, isso implica *dominância estocástica de primeira ordem*[67]. Essas condições juntas são suficientes para assegurar o resultado desejado. Se a expressão em (7.60) decresce à medida que x cresce, então a continuação será ótima para a região do lado esquerdo de x^* e a terminação do lado direito de x^*.

e) Tempo contínuo

Considere agora que o problema de controle de variável definido na Eq. (7.53) tenha uma extensão de tempo de Δt. Nesse caso, o interesse está no limite em que $\Delta t \to 0$. Se $\pi(x, u, t)$ representa a *taxa do payoff* imediato, então $\pi(x, u, t)\Delta t$ representa o retorno total para um intervalo Δt. De forma similar, se ρ representa a taxa de desconto por unidade de tempo, o desconto total para um intervalo Δt pode ser representado pelo fator $1/(1 + \rho\Delta t)$. Logo, para o tempo contínuo, a equação de Bellman se torna

$$\mathrm{F}(x,t) = \max_u \left\{ \pi(x,u,t)\Delta t + \frac{1}{1+\rho\Delta t}\mathrm{E}[\mathrm{F}(x', t+\Delta t)|x,u] \right\} \tag{7.61}$$

Multiplicando por $(1 + \rho\Delta t)$ e rearranjando os termos, resulta

$$\rho\Delta t\mathrm{F}(x,t) = \max_u \left\{ \pi(x,u,t)\Delta t(1+\rho\Delta t) + \overbrace{\mathrm{E}[\Delta \mathrm{F}]}^{\mathrm{E}[\mathrm{F}(x',t+\Delta t)-\mathrm{F}(x,t)]} \right\} \tag{7.62}$$

Finalmente, dividindo por Δt e tomando o limite para zero, tem-se

$$\rho\mathrm{F}(x,t) = \max_u \left\{ \pi(x,u,t) + \frac{1}{dt}\mathrm{E}[d\mathrm{F}] \right\} \tag{7.63}$$

onde $(1/dt)\mathrm{E}[d\mathrm{F}]$ é o limite de $\mathrm{E}[\Delta\mathrm{F}]/\Delta t$. Lembrando que o valor da esperança é condicionado aos valores correntes de x e u.

A equação de Bellman em tempo contínuo transmite claramente a ideia de que o fluxo de resultado é um ativo, isto é, $\mathrm{F}(x,t)$ tem um valor. No lado esquerdo da Eq. (7.63), tem-se o retorno normal por unidade de tempo que o tomador de decisões, usando ρ como taxa de desconto, requer para manter o ativo. No lado direito tem-se dois termos, o *payoff* imediato ou os dividendos sobre o ativo, enquanto o segundo termo é a taxa de retorno de capital, que pode ser um ganho, se positivo, ou perda, se negativo. Logo, o lado direito da Eq. (7.63) representa o retorno por unidade de tempo por manter o ativo. Note que o limite no lado direito depende dos valores esperados correspondentes para a variável aleatória x' no tempo Δt.

f) Parada ótima e continuação

Aqui é considerado um problema de decisão binária. A cada instante, a empresa pode tanto continuar com a situação corrente, visando auferir um fluxo de lucro, "*smooth pasting*", como parar e auferir o *payoff*

[67] Uma distribuição F tem dominância estocástica de primeira ordem sobre uma distribuição G se, para toda função não decrescente u, $\int u(x)\mathrm{F}(x) \geq \int u(x)\mathrm{G}(x)$.

de terminação. O termo usado em inglês é "*smooth pasting*", uma condição de contorno para modelar opções americanas que garante maximizar o valor com uma estratégia de exercício[68].

Nesse caso, tanto o fluxo de resultado $\pi(x, t)$ como o *payoff* de terminação $\Omega(x)$ dependem da variável x e do tempo t, em que x segue um processo de Itô

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{7.64}$$

Um exemplo comum é a situação em que a firma está decidindo se para as operações ao mesmo tempo em que está vendendo os equipamentos por pequenos valores. A decisão de investimento pode ser posta da seguinte forma: a continuação significa esperar, e o *payoff* é zero; parar significa investir, e o *payoff* de terminação é apenas o valor presente esperado de lucros futuros do projeto menos o custo do investimento.

Isso sugere, intuitivamente, que para cada tempo t haverá um valor crítico $x^*(t)$, em que a continuação ótima ocorre se x_t fica de lado de $x^*(t)$, e a parada é ótima se x_t fica do outro lado de $x^*(t)$. Sabe-se que a continuação será relativamente mais atrativa para valores elevados de x se a expressão em (7.60) for uma função crescente em x. Assim, em um tempo contínuo, e se x segue o processo em (7.70), então

$$\pi(x) - \rho\Omega(x) + a(x,t)\Omega_x(x,t) + (1/2)b(x,t)^2 + \Omega_{xx}(x,t) + \Omega_x(x,t) \tag{7.65}$$

deve ser crescente em x para cada t. De forma similar, a continuação será menos atrativa em relação à parada para grandes valores de x se for decrescente em x para cada t.

Para essas condições, é oportuno determinar valores críticos $x^*(t)$ para vários valores de t, resultando uma curva que divide o espaço (x,t) em duas regiões: uma acima da curva para a opção de continuação ótima, e outra região abaixo da curva para a função de terminação ótima. É claro que a equação da curva $x = x^*(t)$ não é conhecida com antecedência, mas é determinada como parte da solução de um problema de programação dinâmica. Aqui é apenas uma ilustração de como a solução funciona, uma vez demanda uma sistemática de programação mais complexa, que pode ser consultada em Dixit e Pindyck (1994, p. 130-132, Apêndices A, B e C).

A equação recursiva de Bellman para programação dinâmica, Eq. (7.59), aplicada ao problema de parada ótima resulta

$$\mathrm{F}(x,t) = \max\left\{\Omega(x,t), \pi(x,t) + \frac{1}{1+\rho dt}\mathrm{E}[\mathrm{F}(x+dx, t+dt)|x]\right\} \tag{7.66}$$

onde o segundo termo do lado direito da Eq. (7.66) é o maior dos dois argumentos de $\mathrm{F}(x,t)$. Expandindo este termo, aplicando o Lema de Itô e simplificando, resulta a EDP que satisfaz o valor da função:

$$(1/2)b^2(\cdot)\mathrm{F}_{xx}(\cdot) + a(\cdot)\mathrm{F}_x(\cdot) + \mathrm{F}_t(\cdot) - \rho\mathrm{F}(\cdot) + \pi(\cdot) = 0 \tag{7.67}$$

onde, por simplificação, $(\cdot) = (x,t)$ e os subscritos representam as derivadas parciais. Isso é válido para $x > x^*(t)$, e deve-se procurar uma condição de contorno que seja válida também ao longo de $x = x^*(t)$.

A partir da equação de Bellman, sabe-se que na região de parada $\mathrm{F}(x,t) = \Omega(x,t)$, portanto, pode-se impor a seguinte condição de contorno:

$$\mathrm{F}(x^*(t), t) = \Omega(x^*(t), t) \quad \text{para todo } t \tag{7.68}$$

algumas vezes chamada de "*value-macthing condition*", pois corresponde os valores de uma função desconhecida $\mathrm{F}(x,t)$ com os valores conhecidos de uma função *payoff* de terminação $\Omega(x,t)$. A fronteira em si é desconhecida, e a região no espaço (x,t) em que é válida a equação diferencial em (7.73) é endógena. A fronteira

[68] Lembrando que os titulares de opções americanas podem exercê-las a qualquer momento antes do vencimento da opção.

dessa região, denominada aqui de curva $x^*(t)$, é chamada de "*free boundary*", e todo o problema da solução da equação e determinação da região é chamado de "*free boundary problem*".

Fica evidente que apenas essa condição de contorno não resolve o problema, há a necessidade de uma segunda condição se o objetivo é determinar a $x^*(t)$ com a função $F(x,t)$. A teoria geral de solução de equações diferenciais parciais ajuda nesse caso, afirmando as condições de contorno aplicáveis para o problema de *limite livre* são específicas para cada determinação, e devem vir, neste caso, de considerações da economia (assim ocorre em outras ciências como a física, química e biologia). Aqui, é requerido que para cada t, o valor de $F(x,t)$ e $\Omega(x,t)$ com respeito a x tangencie a fronteira em $x^*(t)$, ou

$$F_t(x^*(t), t) = \Omega_t(x^*(t), t) \quad \text{para todo } t \tag{7.69}$$

chamada de contado de alta ordem ou "*smooth pasting condition*", pois requer não somente os valores, mas também que as derivadas ou as inclinações de duas funções sejam as mesmas na fronteira.

7.3.2. Análise de ativos contingentes

Quando se estuda o problema de parada ótima em programação dinâmica, $F(x,t)$ é interpretado como um ativo de mercado que dá direito, ao investidor, um fluxo futuro de resultado $\pi(x, t)$. A Eq. (7.63) expressa para o investidor que mantém uma posição neste ativo durante um pequeno intervalo dt, o lucro imediato e um ganho esperado de capital a uma determinada taxa de desconto ρ. Até aqui, essa taxa de desconto foi considerada exógena, mas na prática ela é interpretada como um custo de oportunidade do capital, pois o investidor poderia ter igual retorno investindo em outras oportunidades de ativos com características de riscos comparáveis. Essa ideia é explorada aqui, seguindo o mesmo desenvolvimento em Dixit e Pindyck (1994, p. 114-119), resultando em um tratamento mais adequado para o risco.

A economia financeira tem desenvolvido teorias sofisticadas para descrever as decisões dos investidores. O equilíbrio de mercado tem como causa, em última análise, essas decisões e, subjacente a esse equilíbrio, estão os preços dos ativos. A ideia básica, aqui, é uma economia com um menu rico de ativos negociáveis com diferentes características de risco e retorno. Para valorar um novo ativo, por exemplo, replica-se suas características de risco e retorno por meio de um portfólio de ativos existentes negociados no mercado. O preço do novo ativo deve ser igual ao valor de mercado desse portfólio. Qualquer discrepância de preços é resolvida por arbitragem, de forma que um lucro certo é obtido comprando o ativo com menor preço e vendendo-o por um preço mais favorável. De todo modo, a discrepância entre preços de ativos ou portfólios equivalentes não persistiria em um mercado em equilíbrio.

a) Replicando o ativo

Suponha que um *payoff* dependa de uma variável x. Pense nisso como o preço da produção de uma empresa. Em se tratando de uma taxa proporcional de retorno, é conveniente assumir que x siga um processo tipo movimento geométrico browniano, em que

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \tag{7.70}$$

onde α é a taxa de crescimento, σ é o parâmetro proporcional de variância e dz é um incremento padrão de Wiener. Assuma agora que a produção pode ser negociada como um ativo de mercado. Esse seria exatamente o caso se a saída da empresa fosse uma *commodity* de petróleo ou cobre, por exemplo. No item seguinte é mostrado que o risco das flutuações de x, devido ao incremento dz, pode ser replicado nos portfólios mais abrangentes de ativos negociados no mercado.

Como qualquer outro ativo, a produção da empresa é mantida por um investidor se houver um retorno que compense. Parte do retorno do ativo emana da apreciação dele, representado por α. A outra parte pode vir na forma de um dividendo direto (o produto pode ser uma árvore que produz mais madeira) ou na forma indireta (se o investidor tivesse uma planta, por exemplo, e desejasse manter o produto em seu inventário para uso

como carga em vez de confiar no preço *spot* do mercado, o dividendo estaria implícito – *convenience yield*). De qualquer forma, o retorno total seria $\mu = \alpha + \delta$, em que representa o dividendo.

O retorno esperado deve ser o suficiente para compensar o risco assumido pelo investidor. É claro que, sem risco, o retorno esperado não importará, somente o risco não-diversificável. O portifólio de mercado, como um todo, disponibiliza um máximo de diversificação, indicado pela covariância do retorno do ativo com o mercado, que responderia pelo prêmio de risco do ativo. Em toda análise é assumido que o retorno de um ativo sem risco é tratado de forma exógena, que pode ser, por exemplo, a remuneração dos títulos do governo, a SELIC. Ademais, sabe-se que a condição fundamental de equilíbrio do modelo CAPM estabelece que

$$\mu = r + \phi\sigma\rho_{x,m} \tag{7.71}$$

onde ϕ é um parâmetro agregado de mercado (o preço de risco do mercado), que é exógeno nessa análise, e $\rho_{x,m}$ é o coeficiente de correlação entre o retorno de uma ativo particular e o retorno de todo o portfólio de mercado *m*.

Para determinar o valor F(*x, t*) da empresa com um *payoff* $\pi(x, t)$, basta replicar seu retorno e risco característicos utilizando-se do valor de um ativo conhecido. Especificamente, considere investir \$1 em um ativo livre de risco e comprado em *n* unidades do produto da empresa; a escolha de *n* deve ser tal que alcance a replicação desejada. O custo desse portfólio seria $\$(1 + nx)$. Mantendo-o durante um pequeno intervalo de tempo *dt*, o ativo livre de risco gera *rdt*, enquanto o outro ativo paga um dividendo $n\delta xdt$ e um ganho esperado de capital $ndx = n\alpha xdt + n\sigma xdz$. Assim, o total de retorno esperado por cada \$ investido nesse portfólio é

$$\frac{r + n(\alpha + \delta)x}{1 + nx}dt + \frac{n\sigma x}{1 + nx}dz \tag{7.72}$$

Agora, compare o retorno indicado na Eq. (7.72) com o retorno que um investidor teria caso mantivesse a empresa pelo mesmo intervalo de tempo. O custo, para o investidor, seria F(*x, t*). Já o dividendo seria $\pi(x, t)$ *dt*, que não envolve incerteza, desde que *x* seja conhecido quando a decisão da compra *é* tomada. O ativo ainda retorna um ganho esperado de capital, o qual é expresso pelo Lema de Itô (ver **Anexo 3**):

$$d\mathrm{F} = [\mathrm{F}_t(x,t) + \alpha x\mathrm{F}_x(x,t) + (1/2)\sigma^2x^2\mathrm{F}_{xx}(x,t)]dt + \sigma x\mathrm{F}_x(x,t)dz \tag{7.73}$$

Assim, o retorno total por cada \$ investido é

$$\frac{\pi(x,t) + \mathrm{F}_t(x,t) + \alpha x\mathrm{F}_x(x,t) + (1/2)\sigma^2x^2\mathrm{F}_{xx}(x,t)}{\mathrm{F}(x,t)}dt + \frac{\sigma x\mathrm{F}_x(x,t)}{\mathrm{F}(x,t)}dz \tag{7.74}$$

Se o risco do portfólio é replicado com o risco do ativo empresa, a escolha de *n* deve atender à seguinte condição:

$$nx/(1 + nx) = x\mathrm{F}_x(x,t)/\mathrm{F}(x,t) \tag{7.75}$$

Com isso, o termo de risco da Eq. (7.72) tem que ser igual ao da Eq. (7.74). Mais ainda, em um mercado em equilíbrio, dois ativos com idêntico risco hão de ter o mesmo retorno, portanto

$$\frac{\pi(x,t) + \alpha x\mathrm{F}_x(x,t) + (1/2)\sigma^2x^2\mathrm{F}_{xx}(x,t)}{\mathrm{F}(x,t)} = \frac{r + n(\alpha + \delta)x}{1 + nx}, \tag{7.76}$$

ou seja, o termo de retorno da Eq. (7.72) tem que ser igual ao lado direito da Eq. (7.76). Substituindo *nx*/(1+*nx*) no lado direito da Eq. (7.76), resulta

$$r\left[1 - \frac{x\mathrm{F}_x(x,t)}{\mathrm{F}(x,t)}\right] + (\alpha + \delta)\frac{x\mathrm{F}_x(x,t)}{\mathrm{F}(x,t)} \tag{7.77}$$

rearranjando os termos da Eq. (7.76), resulta a EDP para o valor de F(*x,t*):

$$(1/2)\sigma^2 x^2 \mathrm{F}_{xx}(x,t) + (r-\delta)x\mathrm{F}_x(x,t) + \mathrm{F}_t(x,t) - r\mathrm{F}(x,t) + \pi(x,t) = 0. \tag{7.78}$$

b) Uso de ativos abrangentes

Ainda que o risco de *x* não possa ser diversificado no mercado, é suficiente que o investidor seja capaz de negociar outros ativos cujos riscos acompanhem ou abranjam a incerteza de *x*. Suponha que haja um ativo negociado cuja flutuação estocástica esteja correlacionada com o processo estocástico de *x*. Esse ativo pode ser uma simples ação ou um contrato futuro, ou um portfólio dinâmico de ativos simples, isto é, um portfólio de ativos possíveis de serem ajustados continuamente de tal modo que o valor do portfólio esteja perfeitamente correlacionado com o processo de *x*. Por exemplo, seja X o preço de mercado desse portfólio e que flutue conforme o seguinte processo estocástico:

$$d\mathrm{X} = \mathrm{A}(x,t)\mathrm{X}dt + \mathrm{B}(x,t)\mathrm{X}dz \tag{7.79}$$

com duas observações importantes: em primeiro lugar os coeficientes A(*x,t*) e B(*x,t*) são funções da variável de estado *x*, não o preço de replicação de X. Isso está de acordo com a noção de que uma variável de estado pode sumarizar todas as informações sobre o estado da economia. Em segundo lugar, os coeficientes A(*x, t*) e B(*x, t*) não guardam relação com os coeficientes *a*(*x, t*) e *b*(*x, t*) de um possível processo de *x*, mas os dois incrementos de Wiener devem ser exatamente o mesmo se a ideia é que X acompanhe as flutuações estocásticas de *x*.

Considere que o ativo replicado pague um dividendo D(*x, t*). Assim, cada $1 investido nesse portfólio durante um intervalo de tempo *t* até *t* + *dt*, deve gerar o seguinte retorno:

$$[\mathrm{D}(x,t) + \mathrm{A}(x,t)]dt + \mathrm{B}(x,t)dz. \tag{7.80}$$

A pergunta que cabe agora é: que taxa de retorno faria o investidor manter posição nesse portfólio? Como se sabe, a fórmula do modelo CAPM para o retorno do capital investido é

$$\mu_{\mathrm{X}}(x,t) = r + \phi\rho_{x,m}\mathrm{B}(x,t) \tag{7.81}$$

exatamente a mesma em (7.71). Note que o desvio padrão do retorno de X é B(*x, t*), e uma vez que *dX* e *dx* estão correlacionados perfeitamente, o coeficiente de correlação do retorno do ativo X com o do mercado é o mesmo coeficiente de correlação do retorno do ativo *x* com o do mercado, $\rho_{x,m}$. Finalmente, em um mercado em equilíbrio em que X é de fato mantido, tem-se

$$\mu_{\mathrm{X}}(x,t) = \mathrm{D}(x,t) + \mathrm{A}(x,t) \tag{7.82}$$

Agora, considere um portfólio composto da firma e uma posição vendida em *n* unidades do ativo X. O custo para a compra desse portfólio é [F(*x, t*) - *nX*]. Mantendo-o durante um pequeno intervalo de tempo *dt*, a empresa pagaria um dividendo sobre π(*x, t*)*dt*. Ademais, desde que X pague um dividendo D(*x, t*)*dt*, um investidor em uma posição de curto prazo pagaria o mesmo para alguns investidores com posição de longo prazo, o que fortalece a ideia de que se trata de um portfólio abrangente. O ganho esperado de capital desse portfólio, utilizando-se do Lema de Itô e suprimindo os argumentos (*x, t*), *é*

$$d\mathrm{F} - nd\mathrm{X} = [\mathrm{F}_t + a\mathrm{F}_x + (1/2)b^2\mathrm{F}_{xx} - n\mathrm{AX}]dt + [b\mathrm{F}_x - n\mathrm{BX}]dz. \tag{7.83}$$

Para que esse portfólio seja livre de risco, deve-se escolher $n = bF_x/(\mathrm{B}X)$, valor que anula o termo de risco da Eq. (7.83). Quando isso é feito, pode-se esperar um retorno para cada $ investido igual ao retorno de um ativo livre de risco, *r*[F - *n*X]*dt*. Fazendo isso e rearranjando os termos, suprimindo o argumento (*x, t*) por questões de simplificação, resulta a EDP que satisfaz o valor de F(*x, t*):

$$(1/2)b^2(\cdot)\mathrm{F}_{xx}(\cdot) + \{a(\cdot) - [b(\cdot)/\mathrm{B}(\cdot)][\mu_{\mathrm{X}}(\cdot) - r]\}\mathrm{F}_x(\cdot) - r\mathrm{F}(\cdot) + \mathrm{F}_t(\cdot) + \pi(\cdot) = 0 \tag{7.84}$$

que basicamente *é* mesma Eq. (7.73).

7.4. Opções Reais

Esse tópico sobre opções reais, com abordagem mais prática que teórica, é um resumo adaptado da tese de doutorado de Dias (2005). O professor Marco Antônio Guimarães Dias contribuiu por muito tempo na Petrobras como consultor de planejamento financeiro, incluindo aplicação dos conceitos de opções reais no projeto do campo de Marlim.

O termo "*real options*" foi incialmente proposto pelo professor Stewart Myers no MIT, em 1977, quatro anos após a publicação dos artigos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) sobre precificação de opções financeiras. Esse termo ganhou evidência nas últimas 4 décadas, e ainda é um tema em evolução. Para explicitar o conceito de forma mais prática, vale registrar as palavras de Dias (2005): "quando uma empresa faz um investimento com dispêndios irreversíveis, ela exerce ou mata a opção de investir no futuro. A empresa que desiste da possibilidade de esperar por novas informações, também se exclui da chance de escolher o melhor tempo para investir".

A perda do valor dessa opção é um custo de oportunidade, e deve ser incluído como parte do investimento, mesmo que não se classifique como custo direto. Como resultado, a regra do VPL: "investir enquanto o custo incremental de capital é no máximo igual ao retorno incremental" deve ser reavaliada para a seguinte proposição: "o custo incremental de capital pode exceder o retorno incremental por apenas um valor igual ao de manter ativa a opção de investimento".

É claro que sempre é possível redefinir o VPL, subtraindo do valor tradicionalmente calculado o custo de oportunidade de investir. Também é possível tratar parte da irreversibilidade do projeto adotando algumas flexibilidades operacionais já no projeto original. No entanto, é importante evidenciar o valor da opção, caracterizando-o como custo de oportunidade, resultando assim em uma abordagem distinta do VPL convencional.

As razões que levam uma empresa de petróleo a optar por iniciar, suspender, aumentar ou diminuir a produção atual de um campo é a esperança de obter melhores resultados. O valor da espera pode ser elevado, mas há razões suficientes para que uma empresa pague por esse valor, entre elas estão:

- Maior certeza sobre os preços das *commodities* no futuro.
- Maior volume de óleo recuperado com novos métodos de recuperação suplementar.
- Desenvolvimento de novas tecnologias de perfuração que impliquem menores custos.
- Recursos financeiros com melhores taxas de financiamento.
- Aumento da demanda futura.
- Redução dos custos dos serviços necessários às operações de produção de óleo e gás etc.

As oportunidades de investimento em um projeto produzem flexibilidade associada a diferir o projeto, abandonar o projeto, contrair ou aumentar a escala ou até mesmo trocar a tecnologia existente por uma melhor. Em tese, cada uma dessas oportunidades representa uma opção. Copeland e Antikarov (2002) propuseram a seguinte lista aplicável em E&P:

- Opção de abandono – encerrar a operação de produção de um determinado projeto.
- Opção de contração – relacionada à diminuição da escala da produção do projeto.
- Opção de expansão – ampliar a escala de produção.
- Opção de conversão – associada à mudança de tecnologia. Um bom exemplo são as conversões de navios realizadas pela Petrobras.
- Opção de diferimento – associada a projetos, cujo início possa ser adiado até que as condições sejam mais favoráveis à implantação com base na espera de mais informações.
- Opção composta – opções reais que compreendam fases sucessivas do projeto. Cada etapa é uma opção contingente ao exercício anterior de outras opções.

A Figura 7.9 a seguir indica algumas opções a serem exercidas durante o tempo de maturação de um investimento de E&P, desde a exploração até a explotação do campo. A primeira opção diz respeito à participação da operadora no processo licitatório, podendo adiar para um momento mais oportuno se assim julgar conveniente. Durante a fase exploratória a operadora tem de decidir se exerce ou não, caso permita a legislação em vigor, a opção de perfurar um poço exploratório pioneiro. Esse investimento é totalmente irreversível. Essa opção pode ser exercida, e em caso de sucesso, a operadora obtém um campo não delimitado, com elevada incerteza técnica. A operadora tem a opção de investir na fase de delimitação por meio da perfuração de poços de delimitação e sísmica de reflexão 3D. O objetivo é obter mais informações sobre o volume e qualidade das reservas, reduzindo a incerteza técnica e obtendo reservas não desenvolvidas, mas já delimitadas.

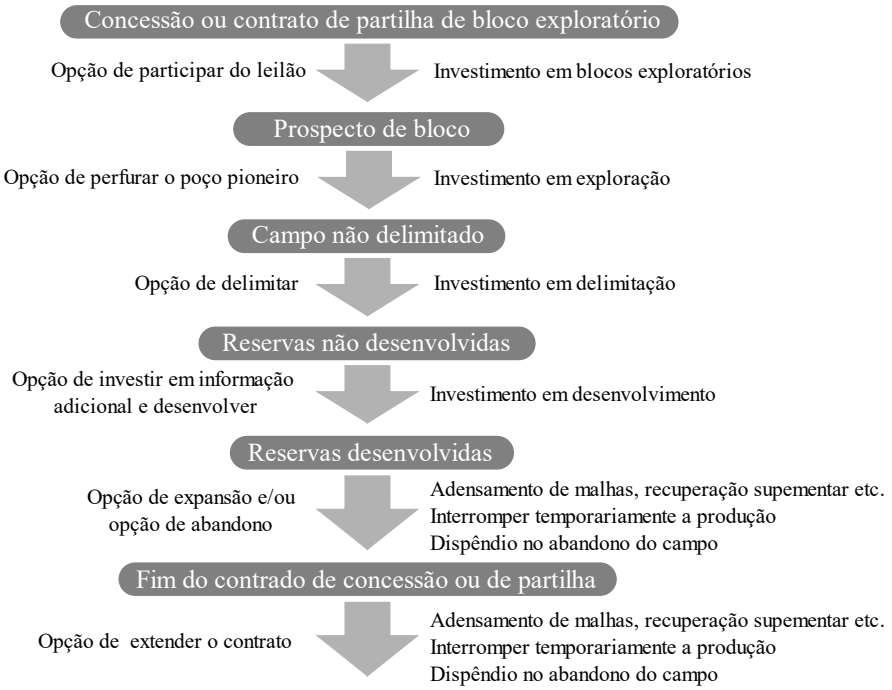


Figura 7.9 – Opções reais sequenciais em projetos de E&P (Dias, 2005).

Quando a incerteza técnica remanescente não justificar investimentos em informações adicionais, tem-se a opção de desenvolver a reserva por meio de um investimento na fase de desenvolvimento. A operadora pode, também, devolver a reserva não desenvolvida para a agência governamental ou esperar por melhores condições de mercado. Em caso de desenvolvimento, obtém-se reservas desenvolvidas. Finalmente a operadora tem opções operacionais durante a vida produtiva, tais como: expandir a produção, parar temporariamente, estender a produção ou abandar a concessão etc.

7.4.1. Opções financeiras e opções reais – diferenças e semelhanças

Existem analogias e diferenças entre opções financeiras e opções reais:

- Tipicamente, as opções financeiras são de curto prazo (menos de um ano para expiração, embora existam algumas de cinco e de dez 10 anos, *warrants*[69]), enquanto as opções reais são de longo prazo, algumas não têm nem mesmo data de expiração, como as opções perpétuas.

[69] *Warrant* – é um caso particular de opção não padronizada. É um título que garante ao seu titular o direito (não a obrigação) de comprar um determinado ativo ao qual está subjacente a um preço preestabelecido (preço de exercício, ou *striking price*) em uma data preestabelecida.

- Apesar das opções americanas poderem ser exercidas antes da expiração, a análise dessa decisão é geralmente secundária, pois o custo de não exercer exatamente no instante certo, na maioria das vezes não é significativo para opções de vida curta.
- Opções financeiras são escritas sobre ativos básicos que são negociados em vários mercados. Esses ativos negociados não podem ter preços negativos, o que limita a escolha do processo estocástico do ativo básico. No caso de opções reais, o ativo básico pode ser um ativo não negociado no mercado e não existe impedimento do preço do ativo ter valor negativo.

7.4.2. A função VPL para projetos de produção de petróleo

É de interesse, para as aplicações de OR, que o VPL seja função do preço do petróleo e de outras variáveis relevantes, tais como a qualidade e o volume da reserva a ser desenvolvida. Por exemplo, considere a Eq. (7.85) a seguir:

$$\text{VPL} = \text{V} - \text{I} \tag{7.85}$$

onde V é o valor da reserva desenvolvida ou, em termos mais gerais, é o valor do projeto. Em termos de fluxo de caixa, V pode ser visto como o valor presente das receitas líquidas de custos operacionais e impostos. Já o investimento I pode ser visto como o valor presente dos investimentos líquidos de benefícios fiscais. Na linguagem de OR, V (ou p) é o ativo básico e I é o preço de exercício da opção.

Existem pelo menos três alternativas para considerar tanto as incertezas técnicas como as de mercado na função VPL de projetos de produção de petróleo.

- Usar modelos paramétricos tão simples quanto possível, que considerem os fatores técnicos e de mercado para a valoração econômica. Essa parametrização pode vir da visão de negócio.
- Simular explicitamente o fluxo de caixa de um projeto, considerando as receitas e os custos como funções de variáveis incertas. A programação, em geral, é complexa, com inúmeras variáveis e regras para diversos tipos de tributos, demandando um tempo computacional elevado nas simulações Monte Carlo.
- Usar modelos complexos de fluxo de caixa com simulação de reservatórios em paralelo. Nesse caso, as incertezas técnicas são introduzidas na simulação de fluxo de fluidos nos reservatórios, o que gera uma distribuição de curvas de produção e seus valores associados para V e I do FCD. O problema adicional é que o simulador de reservatórios é chamado em cada iteração da simulação Monte Carlo, demandando um tempo computacional ainda maior.

A parametrização da função VPL depende do regime fiscal, e os dois principais são o regime de concessões e o regime de partilha de produção. Para concessões, é razoável assumir que o VPL é uma função linear do preço do petróleo, diferente do regime de partilha de produção, que não segue uma reta. A Figura 7.10 a seguir mostra um gráfico típico não linear da função VPL(p) para o regime de partilha baseado em um caso real. para o regime de partilha baseado em um caso real.

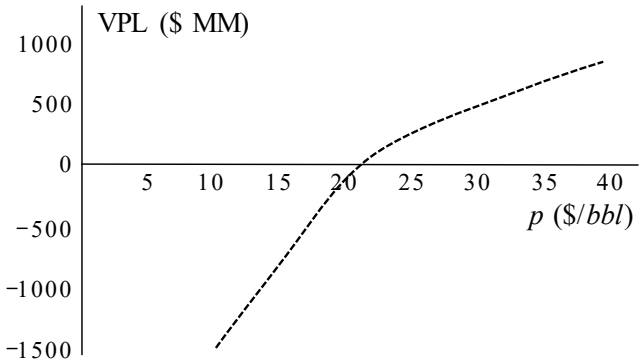


Figura 7.10 – VPL *versus* para regime de partilha de produção.

No modelo de concessão, a função VPL é linear em p caso não se considere a opção de abandono ou outras opções operacionais. O caso indicado na Figura 7.11 a seguir é baseado em um caso simples, em que não há o custo de abandono. Apesar da simplicidade, o gráfico dá uma intuição qualitativa do efeito da opção de abandono na função VPL. Observe que a opção de abandono só é relevante para o caso de baixo preço da *commodity*, quando ela adiciona um prêmio relevante para a função VPL. No entanto, quando o preço é baixo, a probabilidade de exercer a opção de investir é pequena.

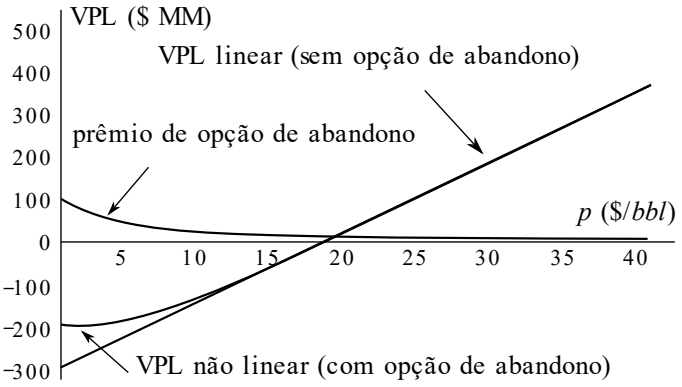


Figura 7.11 – VPL *versus* – função não linear devido à opção de abandono.

Quando a opção de investir no projeto está atrativa para ser exercida, a opção de abandono vale pouco. Outro motivo é que os projetos de desenvolvimento da produção são de longa duração[70] e com abandono distante no tempo, tornando seu valor baixo devido ao efeito da taxa de desconto.

O modelo linear mais simples é considerar que o valor de mercado da reserva desenvolvida é proporcional ao preço do petróleo p e ao volume da reserva B (número de barris). Esse modelo é chamado de *business model*, e é expresso por:

$$\mathrm{V} = q\mathrm{B}p \qquad q < 1 \tag{7.86}$$

onde q é um parâmetro agregado que reflete a qualidade econômica da reserva, envolvendo fatores técnicos, tais como a qualidade da rocha e dos fluídos e fatores econômicos, tais como o custo operacional, taxa de desconto ajustada ao risco etc. Na maioria das vezes se pode estimar o valor de q usando dados de mercado de reservas. Para o caso geral, válido para VPL não linear, a qualidade econômica da reserva é definida por

$$q(p) = \frac{1}{\mathrm{B}}\frac{\partial \mathrm{V}(p)}{\partial p} \tag{7.87}$$

Note que se V é linear em p, a qualidade econômica é independente de p. Em alguns problemas, pode ser de interesse decompor a qualidade como produto de dois fatores, um refletindo a qualidade técnica da reserva q_{T} e outro os aspectos econômicos de mercado, ou seja, a qualidade de mercado da reserva $q_{\mathrm{M}}(p, t)$. Logo, a qualidade econômica da reserva q pode ser reescrita como:

$$q(p,t) = q_{\mathrm{T}} q_{\mathrm{M}}(p,t) \tag{7.88}$$

Dessa forma, quando se estuda a incerteza da qualidade, pode-se considerar as incertezas técnica e de mercado. No caso de q_{M}, pode ser conveniente estabelecer um valor em t_0 igual a 1, isto é $q_{\mathrm{M}}(t_0) = 1$, e assumir algum processo estocástico para esse fator. No entanto, é necessário modelar o processo estocástico de $q_{\mathrm{M}}(p,t)$

[70] Em geral, um projeto de produção de petróleo só é viável se, no início, a receita for muito maior que o custo operacional. Durante vários anos a probabilidade de abandono é muito baixa. Com o declínio da produção, a probabilidade muda.

de forma que o seu valor não cresça muito – pois o produto $q(p, t)$ precisa ser menor que 1, e nem diminua para valores igual ou menor que zero.

A alternativa linear para o modelo de negócio é o chamado modelo do *fluxo de caixa rígido*, que é apresentado a seguir:

$$\mathrm{V} = q'\mathrm{B}p - \mathrm{C} \tag{7.89}$$

onde B representa o volume de reserva, q' é a qualidade econômica da reserva (excluindo o fator custo operacional) e C é o custo operacional em valor presente. Uma variante desse modelo é considerar como uma função linear de B:

$$\mathrm{C} = c_1\mathrm{B} + c_2 \tag{7.90}$$

onde c_1 é o custo operacional variável por barril atualizado[71] e c_2 um custo operacional fixo atualizado. Combinando a Eq. (7.85) com as Eqs. (7.86) e (7.89), se obtém os dois modelos lineares para o VPL(p), que são mostrados na Figura 7.12 a seguir:

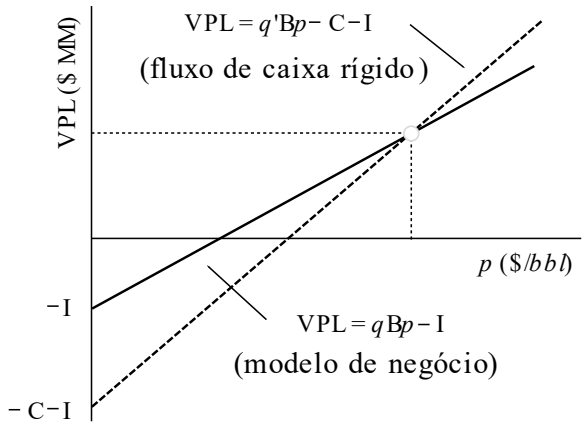


Figura 7.12 – Modelos lineares para a função VPL(p).

O gráfico da Figura 7.12 é construído com base no VPL para o caso de preço médio do petróleo, cujo valor é comum aos dois modelos. O ponto seguinte a ser definido é plotado para p = 0 em cada modelo. No caso do modelo de negócio, VPL(p_0) = -I, e para o modelo de fluxo de caixa rígido, VPL(p_0) = -C - I. Na Figura 7.12 se vê claramente, pela inclinação das retas, que o modelo de negócio é mais conservador do que o de fluxo de caixa rígido em termos de VPL. A depender dos valores q e q', os dois modelos podem até coincidir.

7.4.3. Fase de exploração

O primeiro exemplo de OR refere-se à fase de exploração, quando a principal incerteza é sobre a existência de petróleo. Suponha uma operadora com direitos exploratórios em um bloco com dois prospectos de uma mesma estrutura geológica mapeados por meio da sísmica. O fator de chance p_1, probabilidade de sucesso de encontrar petróleo no primeiro poço exploratório, é de 30% para ambos os prospectos com custo de perfuração $\mathrm{I_{EXP}}$ de $30 MM por poço. Em caso de sucesso, o projeto de desenvolvimento tem um VPL de $95 MM em ambos os casos. Em resumo, os prospectos são equivalentes economicamente. Na análise econômica tradicional, o valor do prospecto é dado em valor monetário esperado VME, definido por:

$$\mathrm{VME_1} = -\mathrm{I_{EXP}} + [p_1 \times \mathrm{VPL}] \tag{7.91}$$

[71] O mais comum é o volume de reserva atualizado B' < B. Nesse caso, c_1' seria um custo operacional variável médio, resultando no mesmo, $c_1'\,\mathrm{B}^1 = c_1\mathrm{B}_1$.

Como os prospectos são iguais, ambos têm o mesmo VME, ou seja –30 + (0,3×95) = –$1,5 MM. No entanto, pode-se considerar dois aspectos não incluídos no cálculo tradicional do VME: a revelação da informação e a natureza opcional da perfuração.

Por exemplo, pode-se considerar, em uma perfuração sequencial, a informação revelada no resultado do primeiro poço. Em caso de sucesso no primeiro prospecto, aumenta a chance de se ter petróleo no outro prospecto, de forma que o fator de chance do segundo prospecto p_2 aumenta. Em caso de insucesso no primeiro prospecto, o fator de chance do segundo prospecto p_2 diminui.

Imagine um geólogo, que utilizando-se de um método Bayesiano, conclui que em caso de sucesso, o fator de chance aumenta para $p_2 = 50\%$. Para ser consistente, a lei das expectativas iteradas[72] exige que em caso de insucesso, se tenha $p_2 = 21{,}4\%$ (50×30/70). A Figura 7.13 mostra os fatores de chance para o segundo prospecto, antes e depois da revelação de informação com a perfuração do primeiro poço 1.

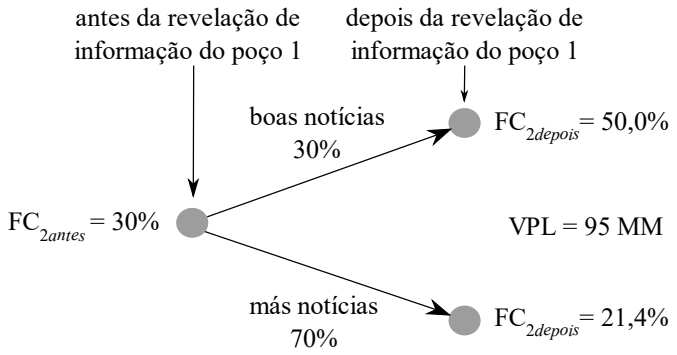


Figura 7.13 – Revelação de informação para o segundo prospecto.

Se o primeiro prospecto for perfurado e o resultado for uma revelação de informação negativa (más notícias), o VME do segundo prospecto é revisado para um valor ainda mais negativo. A operadora, entretanto, não precisa perfurar o segundo prospecto porque a perfuração é uma opção, não uma obrigação. Assim, em caso de revelação negativa, a operadora acata as perdas e o segundo prospecto vale zero. No entanto, em caso de revelação positiva com a perfuração do primeiro prospecto, o VME do segundo poço revisado é positivo (boas notícias), ou seja:

$$\text{VME}_2 = -30 + (p_2 \times 95) = -30 + (0{,}5 \times 95) = +17{,}5 \ \$\text{MM} \tag{7.92}$$

Logo, considerando tanto a revelação de informação da primeira perfuração como o caráter opcional da segunda perfuração, o valor do bloco é:

$$\text{E}[\text{VME}_1 + \text{OR}(\text{VME}_2)] = -1{,}5 + [(0{,}7 \times 0) + (0{,}3 \times 17{,}5)] = +3{,}75 \ \$\text{MM} \tag{7.93}$$

onde $\text{OR}(\text{VME}_2)$ é o VME desconsiderando que não haverá perfuração do poço 2 se a revelação do primeiro poço for negativa. Desse modo, como se pode ver o bloco que aparentemente não tinha valor é muito melhor que o valor indicado pela análise tradicional. Os fatores para esse valor positivo são: a natureza opcional da perfuração dos prospectos e o efeito da revelação de informação de prospectos dependentes.

Existem consequências importantes para negociações entre companhias de petróleo que podem ser inferidas com esse exemplo simples, tanto para compra de direitos como para venda de direitos de blocos exploratórios[73]. As operadoras podem perder muito dinheiro se utilizarem apenas ferramentas tradicionais, ignorando o caráter opcional dos investimentos e a revelação de informação com o planejamento sequencial

[72] O valor esperado da distribuição de expectativas condicionais é igual ao valor esperado original da distribuição a priori.

[73] O termo usado para compra de direitos de blocos exploratórios é *farm-in* e para venda é *farm-out*.

dos investimentos. Além disso, uma companhia de petróleo pode desenhar algumas operações especiais de parceria usando esses conceitos. Por exemplo, uma operadora X poderia vender 100% dos direitos do primeiro prospecto por um valor igual a zero para outra operadora Y, exigindo apenas que ela perfure imediatamente o primeiro prospecto e forneça as informações da perfuração para o proprietário original do prospecto. Nesse caso, o VME do bloco para a operadora X se eleva para +$5,25 MM, considerando que não perfuraria o primeiro prospecto, que tem VME_1 = -$1,5MM.

Esse tipo de negociação é possível porque as companhias de petróleo têm diferentes avaliações para o mesmo prospecto. Nesse exemplo, para aceitar o negócio a operadora Y avalia que o primeiro prospecto tem VME positivo. Essa assimetria de valoração é devida principalmente a diferenças na interpretação geológica, mas outros fatores também influenciam, tais como taxas de desconto diferentes, diferentes expectativas para o preço de longo-prazo, tecnologia de informação etc. Ou seja, a assimetria de valoração e a visão de OR geram situações *ganha-ganha* para parcerias entre companhias de petróleo.

A situação se complicaria se originalmente os prospectos se referissem a dois blocos vizinhos pertencentes a duas operadoras distintas. Evidente que continuaria existindo o potencial ganha-ganha de negociação[74], mas uma operadora poderia achar que a outra irá perfurar em primeiro lugar e, em vez de tentar um contrato de parceria, simplesmente esperaria para usar uma informação grátis para sua decisão. A outra operadora pode pensar o mesmo e esperar. Esse jogo de espera é conhecido como *guerra de atrito*. A negociação do desenho e dos valores em contratos de parceria é um jogo de barganha, um conceito que faz parte da teoria dos jogos.

Um ativo que tem a opcionalidade de postergar a decisão de investir apresenta opções embutidas. É o caráter opcional do ativo que define o valor do prêmio de OR, a diferença de valor entre um ativo real com opcionalidade e o mesmo ativo sem opcionalidade. A Figura 7.14, por exemplo, apresenta uma equação qualitativa de opções reais para ilustrar o conceito de opcionalidade. Suponha um projeto que, hoje, tem um VPL ou VME negativo, mas cuja decisão de investir possa ser postergada em até cinco anos. Na expiração T, o valor desse ativo, incluindo a sua opcionalidade, é dado pela Eq. (7.94) a seguir:

$$F(T) = \max[VPL, 0] = \max[V - I, 0] \tag{7.94}$$

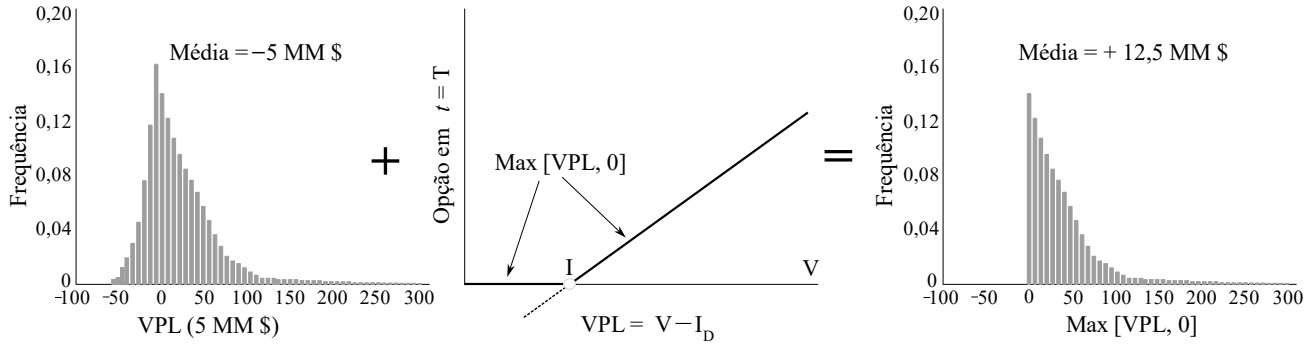


Figura 7.14 – Equação qualitativa de opções reais.

Dada a natureza estocástica das variáveis do VPL, a primeira distribuição na Figura 7.14 representa os possíveis valores do VPL desse projeto se o investidor esperar para decidir na data T. Como o investimento é opcional, nessa data ele só será feito se for positivo. Isso provoca uma assimetria na distribuição, fazendo com que os valores negativos se tornem zero, gerando uma massa concentrada no valor zero. Essa equação qualitativa captura a essência intuitiva do conceito de opções.

[74] Por exemplo, trocando 50% dos direitos de cada prospecto e repartindo o lucro de $3,75 MM.

7.4.4. Fase de desenvolvimento

O segundo exemplo de OR refere-se à fase de desenvolvimento, e serve para ilustrar o valor adicional de OR na presença de incertezas de mercado, tais como o valor da espera, o momento ótimo de investir e a regra ótima de decisão, o *gatilho*. Por razões de simplicidade, considere apenas dois períodos e dois cenários de incerteza de mercado representados pelos preços do petróleo.

Admita um campo de petróleo que foi descoberto e delimitado, mas não desenvolvido. Seja V o valor da reserva desenvolvida e I o custo de investimento para desenvolvê-la. Com isso, o VPL de desenvolvimento da produção é, resumidamente,

$$\mathrm{VPL} = \mathrm{V} - \mathrm{I_{DP}} \tag{7.95}$$

onde V e $\mathrm{I_{DP}}$ são expressos em valor presente na data de início do investimento. Considere uma situação em que o valor da reserva desenvolvida é proporcional ao preço de longo prazo do petróleo p, isto é

$$\mathrm{V} = kp \Leftrightarrow \mathrm{VPL} = kp - \mathrm{I_{DP}} \tag{7.96}$$

onde o fator k é função do volume e da qualidade da reserva de petróleo. Suponha que a operadora possa investir agora ou devolver a concessão para a agência, ou ainda, adiar a decisão por um período não postergável. Caso a decisão seja adiar, considere que o preço hoje seja de \$18/bbl e a expectativa de longo-prazo seja de subir ou descer \$1/bbl com 50% de chance cada (ver Figura 7.15).

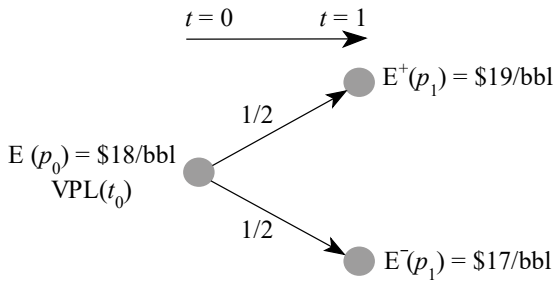


Figura 7.15 – Incerteza de mercado e opção de espera.

Os três casos analisados a seguir resultam as mesmas conclusões do exemplo de 2 períodos de Dixit e Pindyck (1994) discutidos anteriormente.

a) Caso 1

Considere inicialmente os seguintes valores numéricos: k = 100 e $\mathrm{I_{DP}}$ = \$1.850 MM. Pode-se verificar facilmente que o investimento, hoje, tem VPL negativo:

$$\mathrm{VPL}(t_0) = 100 \times 18 - 1.850 = -\$50 \text{ MM} \tag{7.97}$$

Em uma análise tradicional, esse projeto seria recusado. No entanto, a incerteza e o caráter opcional do investimento não foram considerados nesse cálculo. Por exemplo, se o preço subir ou cair no próximo período, o VPL se tornará

$$\mathrm{VPL}^{+}(t_1) = 100 \times 19 - 1.850 = +\$50 \text{ MM} \tag{7.98}$$

ou

$$\mathrm{VPL}^{-}(t_1) = 100 \times 17 - 1.850 = -\$150 \text{ MM} \tag{7.99}$$

respectivamente. Isso ocorrerá em 50% das vezes, com a mesma chance de o preço subir ou cair. Ou seja, em média se teria $\mathrm{VPL}(t_1)$ = 0,5(-150 + 50) = $\mathrm{VPL}(t_0)$ = -\$50 MM. Graças ao caráter opcional do investimento, a operadora só investirá se o preço subir, obtendo valor presente líquido positivo, VPL^{+}. Caso o preço caia,

a operadora não é obrigada a investir e assim o valor, neste cenário, se torna zero e não negativo. Para esse cálculo, considere uma taxa de desconto *r* de 10% no período. Assim, o valor da concessão F, considerando a incerteza e a opção é

$$\mathrm{F} = \max[\mathrm{VPL}(t_0), \mathrm{E}\{\max[0, \mathrm{VPL}^{+}(t_1)/(1+r)]\}] \tag{7.100}$$

Portanto, o valor da concessão no caso 1 é:

$$\mathrm{F} = \max[-50, (0{,}5 \times 0 + 0{,}5 \times 50)/1{,}1] = +22{,}73 \text{ MM} \tag{7.101}$$

ou seja, o campo é bem mais valioso que o indicado pela análise tradicional. A diferença é igual ao prêmio de espera (72,73 MM). É fácil verificar, também, que uma incerteza maior aumenta o valor da oportunidade de investimento, pois gera um prêmio de espera ainda maior. Considere, por exemplo, dois cenários: um com valores extremos equiprováveis para o preço do petróleo igual a $16 e $20/bbl e um segundo cenário com cinco preços, também igualmente prováveis, iguais a $16, $17, $18, $19 e $20/bbl. Caso o leitor realize os cálculos, encontrará os resultados indicados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 – Maior incerteza de mercado, maior valor da opção de espera

Cenários equiprováveis	Variância	VPL(t_0)	Opção, F	Prêmio de espera
Caso 1 ($17 e $18/bbl)	1	–50	22,73	72,73
$16, $17, $18, $19 e $20/bbl	2	–50	36,36	86,36
Dois cenários extremos ($16 e 20/bbl)	4	–50	68,18	118,18

Assim, quanto maior a incerteza de mercado, maior o valor da opção de um ativo. Note que esse resultado independe da modelagem probabilística, embora o seu valor exato dependa.

b) Caso 2

Considere k = 100 e I_{DP} = $1.750 MM (investimento menor que o caso 1). Com estes valores, VPL(t_0) o agora é positivo:

$$\mathrm{VPL}(t_0) = 100 \times 18 - 1.750 = +50 \text{ MM} \tag{7.102}$$

Uma pergunta básica seria: deve-se investir de imediato ou há algum prêmio adicional pela espera? Para responder a essa questão, basta aplicar a Eq. (7.100) e verificar que F > VPL(t_0), portanto, a espera tem um valor adicional de $18,18 MM que não está sendo considerado pelo VPL tradicional. Note que

$$\mathrm{F} = \max[+50, (0{,}5 \times 0 + 0{,}5 \times 150)/1{,}1] = +\$68{,}18 \text{ MM} \tag{7.103}$$

Observe que o VPL subestima o valor da concessão. Caberia então outra questão: é sempre ótimo esperar quando existe incerteza? A resposta é não, mas o projeto precisa estar suficientemente lucrativo em relação à incerteza corrente.

c) Caso 3

Considere agora k = 120 e I_{DP} = $1.750 MM. Neste caso resulta

$$\mathrm{VPL}(t_0) = 120 \times 18 - 1.750 = +410 \text{ MM} \tag{7.104}$$

Aplicando a Eq. (7.100), percebe-se que a opção de espera não tem valor, pois

$$\mathrm{F} = \max[+410, (0{,}5 \times 290 + 0{,}5 \times 530)/1{,}1] = \max[410, 410/1{,}1] = +410 \text{ MM} \tag{7.105}$$

Observando as funções F e VPL com os valores dos parâmetros dos casos 2 e 3, existirá um VPL*(t_0) tal que é indiferente investir já ou esperar, isto é, existe um VPL*(t_0) = F. Dado que o investimento é constante,

pode-se dizer que existe um valor de reserva desenvolvida V*, logo, seria indiferente esperar ou investir já. Esse valor V*, a partir do qual se deve investir imediatamente, é chamado de *gatilho* da OR, e define a seguinte regra ótima de exercício da opção: deve-se investir agora desde que $V \geq V^*$.

7.4.5. Abordagem para a reserva desenvolvida ou preço da *commodity*

No modelo de opções reais, a variável estocástica básica, chamada de ativo básico é o valor da reserva desenvolvida V ou o preço *p*, por exemplo. Sob a hipótese do MGB, a variável estocástica tem, a cada instante futuro *t*, uma distribuição lognormal. Por exemplo, se a variável é o preço *p*, a equação, para um processo estocástico em tempo contínuo, é

$$dp = \alpha p dt + \sigma p dz \tag{7.106}$$

Sob a hipótese do MGB, a previsão dos preços tem as seguintes expressões para a média e a variância em função do tempo:

$$\mathrm{E}[p(t)] = p_0 \exp(\alpha t) \tag{7.107}$$

e

$$\mathrm{Var}[p(t)] = [p_0 \exp(\alpha t)]^2 [\exp(\sigma^2 t) - 1] \tag{7.108}$$

onde $\mathbf{p}_0$ é o valor de *p* quando *t* = 0 (ver **Anexo 3**). Na Eq. (7.108), note que a variância é ilimitada, isto é, quando $t \to \infty$, $\mathrm{Var}[p] \to \infty$. A Figura 7.16 ilustra o MGB para preços, mostrando uma sequência de distribuições lognormal com variâncias que crescem monotonicamente com o tempo, com média (tendência ou *drift* α) crescendo exponencialmente para $\alpha > 0$.

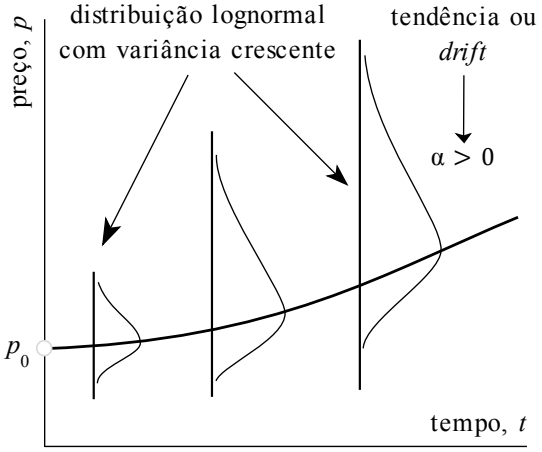


Figura 7.16 – Média e variância crescentes – MGB.

Nesse modelo assume-se que o preço siga um processo estocástico do tipo MGB livre de risco. Esse processo pode ser obtido pela subtração de um prêmio de risco π da tendência real α. Pode-se demonstrar[75] que a tendência neutra ao risco α - π é igual a:

$$\alpha - \pi = r - \delta \tag{7.109}$$

onde *r* é a taxa de desconto livre de risco e δ é a taxa de conveniência se o ativo básico for o preço *p* de uma *commodity*, ou, a taxa de distribuição de dividendos se o ativo básico for o valor V da reserva desenvolvida ou do projeto em operação. Assim, a equação neutra ao risco considerando MGB é:

[75] A taxa ajustada ao risco é $\mu = r + \pi$. Em equilíbrio, essa é a taxa de retorno total do ativo, isto é, $\mu = \alpha + \delta$. Igualando, obtém-se $\alpha + \delta = r + \pi$.

$$dp = (r - \delta)pdt + \sigma pdz \tag{7.110}$$

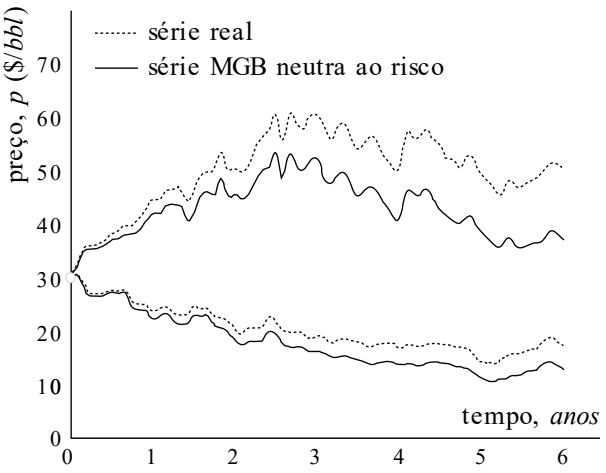


Figura 7.17 – Simulações: MGB real *versus* MGB neutro ao risco.

Comparando a Eq. (7.110) com a Eq. (7.106), nota-se que mudou apenas o termo de tendência. A Figura 7.17 mostra, apenas para ilustrar, duas séries de preço seguindo um MGB real e duas equivalentes, ou seja, com os mesmos parâmetros e os mesmos incrementos estocásticos *dz* para o caso de um MGB neutro ao risco. Note que a diferença é que a amostra neutra ao risco é sempre menor que a amostra real. A diferença é o prêmio de risco. Por essa razão se diz que a simulação neutra ao risco de um processo estocástico é a simulação real penalizada por um valor igual ao prêmio de risco.

A taxa de conveniência pode ser definida e estimada com o mercado futuro. Por exemplo, se p_0 é o preço à vista ou o preço definido em contrato de maturidade de curto prazo em $t = t_0$, e p_τ é o preço de um contrato futuro com maturidade $t = \tau$, a relação entre os dois preços seria

$$p_\tau = p_0 \exp[(r - \delta)(\tau - t_0)] \tag{7.111}$$

da qual se pode extrair a taxa de conveniência.

Para o petróleo, em particular, muitos especialistas argumentam ser mais realista considerar um modelo de reversão à média (MRM) para o preço, devido à lógica econômica de balanço de oferta *versus* demanda. A intuição é que se o preço da *commodity* estiver distante, acima ou abaixo do preço de equilíbrio ou média de longo prazo $\bar{p}$, as forças de mercado agirão para puxar os preços de volta ao nível de equilíbrio.

Do lado da oferta, as forças de mercado irão agir para aumentar a produção e o investimento no setor se $p > \bar{p}$, ou reduzir se $p < \bar{p}$. Do lado da demanda, ela tende a cair em caso de altos preços e tende a aumentar no caso de baixos preços. Quanto ao petróleo, podem ser relevantes os papéis da OPEP e da intensidade e sucesso dos investimentos em E&P de companhias fora de sua influência. Esses mecanismos de mercado criam uma força de reversão análoga à força de uma mola: ela é mais forte quanto mais distante estiver o preço em relação ao seu nível de equilíbrio.

Existem diversos modelos de reversão à média. O mais simples é o modelo do logaritmo dos preços, o qual segue um processo conhecido como processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck (1930). A equação básica é

$$x = \ln(p) \Rightarrow dx = \kappa(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \tag{7.112}$$

onde κ é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é o valor de equilíbrio de longo-prazo. A variável x tem distribuição normal, portanto, a variável p tem distribuição lognormal. As equações para a média e variância da variável estocástica x são dadas pelas expressões a seguir, onde $x_0(t_0) = \ln(p_0)$.

$$\mathrm{E}[x(t)] = x_0 \exp(-\kappa t) + \bar{x}[1 - \exp(-\kappa t)] \tag{7.113}$$

$$\mathrm{Var}[x(t)] = [1 - \exp(-2\kappa t]\sigma^2/2\kappa \tag{7.114}$$

A interpretação da Eq. (7.113) é que o valor esperado é um valor intermediário entre o valor inicial x_0 e a média de longo-prazo $\bar{x}$, em que os pesos são taxas de declínio cuja soma é 1. Note na Eq. (7.114), que a variância é limitada, ao contrário do MGB, pois $\mathrm{Var}[x(t)] = \sigma^2/2\kappa$.

Uma medida mais intuitiva de velocidade de reversão é a medida de lentidão de reversão chamada meia-vida H. Esse é o tempo esperado para uma variável alcançar a metade da distância entre o valor corrente e o nível de equilíbrio. Para o MRM descrito pela Eq. (7.112), a meia-vida seria

$$\mathrm{H}(x) = \ln(2)/\kappa \tag{7.115}$$

Em modelos de reversão à média, o parâmetro da taxa de conveniência δ é endógeno ao modelo e é função do preço do petróleo, onde

$$\delta = \mu - \alpha = \mu - \kappa(\bar{x} - x) \tag{7.116}$$

Existem pelo menos duas maneiras de relacionar a variável estocástica x com a variável de interesse p. A primeira é com a Eq. (7.112), usada no modelo de Schwartz (1997). A desvantagem é que $\bar{p} \neq \exp(\bar{x})$ e $\mathrm{E}[p(t)] \neq \exp(\mathrm{E}[p(t)])$. Na segunda opção, tem-se tanto $\bar{p} = \exp(\bar{x})$ como $\mathrm{E}[p(t)] = \exp(\mathrm{E}[p(t)])$, e a relação entre x e p é

$$p(t) = \exp\{x(t) - 0{,}5\mathrm{Var}[x(t)]\} \tag{7.117}$$

A Figura 7.18 ilustra a reversão à média com o preço corrente acima do preço de equilíbrio.

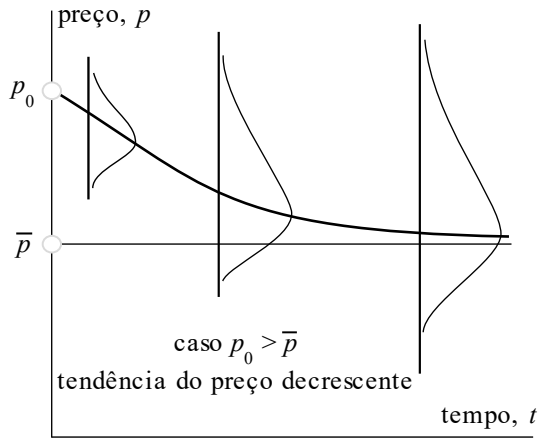


Figura 7.18 – Movimento de reversão à média, MRM.

A curva que começa em p_0 é a curva de valor esperado dos preços $p(t)$, os quais decrescem com o horizonte temporal de previsão $p_0 > \bar{p}$ se . Esse comportamento é chamado de *backwardation* dos mercados futuros, quando o preço de um contrato futuro é inferior tanto ao preço à vista (*spot*) como aos preços de contratos de maturidade mais curta. No MGB, é necessário que a taxa de conveniência δ varie com o tempo revertendo à média para explicar os fatos estilizados da estrutura a termo dos preços futuros. A Figura 7.19 mostra que a estrutura a termo dos preços do petróleo (WTI), em outubro de 2004, estava em *backwardation*.

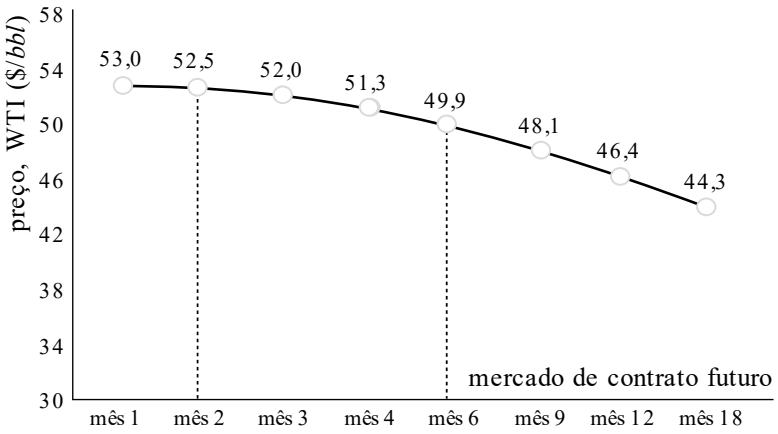


Figura 7.19 – Estrutura a termo do mercado futuro (WTI) – outubro de 2004.

Embora o MGB seja muito mais simples de se usar, o de reversão à média é mais consistente com os mercados futuros, com os testes econométricos de longo prazo e com a teoria microeconômica. Daí surgem as seguintes questões:

- O MRM é melhor que o MGB?
- O erro é significante entre os dois modelos?
- Qual seria um bom parâmetro para a velocidade de reversão?

7.5. Modelos Clássicos de OR em Projetos de Produção

A partir da década de 1980 surgiram os primeiros modelos de precificação de ativos reais. Brennan e Schwartz (1985), por exemplo, valoraram uma mina de cobre considerando as seguintes oportunidades: investimento inicial na mina, parada temporária, reativação e abandono. McDonald e Siegel (1986) propuseram, possivelmente, o mais importante trabalho da década de 1980 sobre opção de espera e, dois anos depois, o modelo publicado por Paddock, Siegel e Smith (1998) se tornou um clássico sobre valoração de reservas.

Deste então, muitos trabalhos foram publicados, adaptando a teoria de opções financeiras para ativos reais da indústria do petróleo, a exemplo da tese de Dias (2005). O brasileiro Tourinho (1979), por exemplo, foi o primeiro a aplicar as ideias da teoria das opções para valorar reservas de recursos naturais em 1979. Outros autores brasileiros, como Nepomuceno e Suslick (2000) e Lima (2004), deram contribuições sobre o tema para a formação de pós-graduandos em engenharia de reservatórios na Universidade de Campinas (UNICAMP-SP).

7.5.1. Modelo de McDonald e Siegel

De acordo com Dixit e Pindyck (1994, p. 136-139), McDonald e Siegel (1986) propuseram o seguinte problema: em que momento é vantajoso pagar um custo para um retorno de um projeto cujo valor V segue um MGB? Ou seja, um projeto cujo valor segue o processo

$$d\mathrm{V} = \alpha \mathrm{V} dt + \sigma \mathrm{V} dz \tag{7.118}$$

onde *dz* é um incremento de Wiener. A Eq. (7.118) indica que o valor atual do projeto é conhecido, mas seu valor futuro tem distribuição lognormal com variância que cresce linearmente com o tempo. Sabe-se que a

oportunidade de investimento é equivalente a uma opção de compra perpétua. A decisão de investir, portanto, é igual à decisão de exercer ou não a opção.

Define-se F(V) o valor da oportunidade de investimento, isto é, o valor da opção de investir como função do valor do projeto V. Desde que o *payoff* do investimento seja V - I, a regra que maximiza o valor é

$$\mathrm{F(V)} = \max[\mathrm{E}(\mathrm{V_T} - \mathrm{I})e^{-\rho \mathrm{T}}] \tag{7.119}$$

onde T é o tempo futuro em que o investimento é exercido, ρ a taxa de desconto e V definido de acordo com a Eq. (7.118). Para que faça sentido, é necessário que α seja menor que ρ. Do contrário, a Eq. (7.118) resulta grandes valores para grandes tempos T, e a melhor opção será sempre esperar indefinidamente. Dessa forma, se δ reflete a diferença entre α e ρ, então assume-se sempre que δ = α - ρ > 0.

Para um caso determinístico, o valor de σ na Eq. (7.118) assume o valor zero. Assim mesmo há valor em esperar. Note que, se σ = 0 então $\mathrm{V}(t) = \mathrm{V}_0 e^{\alpha \mathrm{T}}$, onde $\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}(0)$. Para um valor corrente V, o valor da oportunidade de investimento assumindo que será realizado em algum tempo arbitrário T, é:

$$\mathrm{F(V)} = \left(\mathrm{V}e^{\alpha \mathrm{T}} - \mathrm{I}\right)e^{-\rho \mathrm{T}} \tag{7.120}$$

Em caso de α ≤ 0, V(*t*) mantém-se constante ou seu valor reduz indefinidamente. Fica claro então que a opção ótima de investimento é investir agora se V > I e nunca investir se V < I. Logo

$$\mathrm{F(V)} = \max[\mathrm{V} - \mathrm{I}, 0] \tag{7.121}$$

Se 0 < α < ρ, resulta F(V) > 0 mesmo se o valor corrente V < I, pois eventualmente V excederá o valor de I. Mesmo que hoje V exceda o valor de I, pode ser melhor esperar do que investir agora. Para que se observe essas alegações, maximize F(V) dado pela Eq. (7.120) com respeito a T. A condição de primeira ordem necessária é que

$$\frac{d\mathrm{F(V)}}{d\mathrm{T}} = -(\rho - \alpha)\mathrm{V}e^{-(\rho-\alpha)\mathrm{T}} + \rho \mathrm{I}e^{-\rho \mathrm{T}} = 0 \tag{7.122}$$

que resulta

$$\mathrm{T}^* = \max\left\{\frac{1}{\rho}\log\left[\frac{\rho \mathrm{I}}{(\rho - \alpha)\mathrm{V}}\right], 0\right\} \tag{7.123}$$

Observe que se V não é tão grande quanto I, obtém-se T* > 0.

O problema seguinte é definir para qual valor de V é ótimo investir imediatamente. Note que, de acordo com a Eq. (7.123), fazendo T* = 0, é melhor investir imediatamente se V ≥ V*, onde

$$\mathrm{V}^* = \frac{\rho}{\rho - \alpha} > \mathrm{I} \tag{7.124}$$

Finalmente, substituindo a expressão em (7.123) na Eq. (7.120), obtém-se a solução para F(V):

$$\mathrm{F(V)} = \begin{Bmatrix} \left[\frac{\alpha \mathrm{I}}{(\rho - \alpha)}\right]\left[\frac{(\rho - \alpha)\mathrm{V}}{\rho \mathrm{I}}\right]^{\frac{\rho}{\alpha}}, & \text{para } \mathrm{V} \le \mathrm{V}^* \\ \mathrm{V} - \mathrm{I}, & \text{para } \mathrm{V} > \mathrm{V}^* \end{Bmatrix} \tag{7.125}$$

A Figura 7.20 mostra a função F(V) para valores de I = 1 (unitário) e ρ = 0,10 e α = (0; 0,02; 0,05 e 0,07). Em cada caso, o ponto de tangência de F(V) com a reta V - I indica o valor crítico V* = ρI / (ρ - α). Note que

F(V) cresce à medida que α cresce, bem como o valor crítico V*. O crescimento de V resulta aumento do valor da oportunidade de investimento.

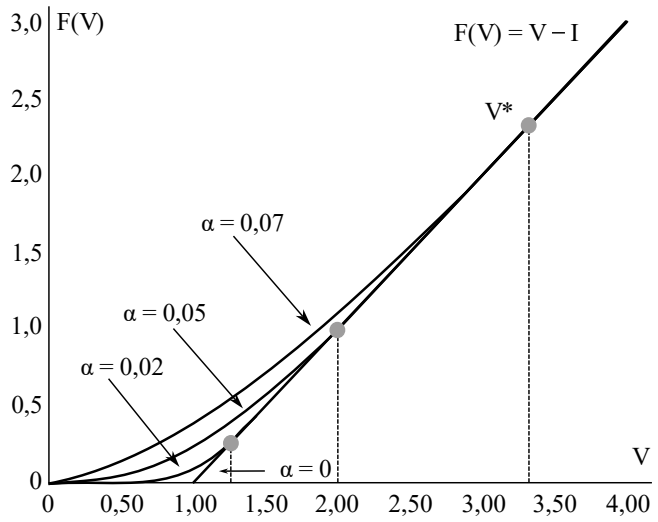


Figura 7.20 – Valor da oportunidade de investimento com σ = 0 e ρ = 0,10.

7.5.2. Modelo de Paddock, Siegel e Smith.

No começo da década de 1980, Paddock, Siegel e Smith começaram uma pesquisa no Laboratório de Energia do MIT usando a teoria das opções para estudar o valor de blocos marítimos e o momento ótimo de investimento. Eles escreveram uma série de artigos, entre os quais dois se destacaram: Siegel, Smith e Paddock (1987) e Paddock, Siegel e Smith (1988).

O modelo clássico de Paddock, Siegel e Smith (PSS) é o mais popular de OR para aplicações em E&P, aplicável para uma primeira aproximação na análise de investimento para o desenvolvimento de reservas de petróleo. Esse modelo tem vantagens práticas devido à sua simplicidade e aos poucos parâmetros de entrada para serem estimados. Um atrativo é a simples analogia entre as opções financeiras de Black e Scholes e o valor da opção real de uma reserva não desenvolvida de petróleo. Essa analogia é mostrada na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 – Analogia de opção financeira com opção real de Paddock, Siegel e Smith (1988)

Opção financeira (Black e Scholes)	Opção real (Paddock, Siegel e Smith)
Valor da opção financeira, F	Valor da opção real – reserva não desenvolvida
Preço corrente da ação, V	Valor corrente da reserva desenvolvida
Preço de exercício da opção, K	Custo de investimento para desenvolver a reserva, I
Taxa de distribuição de dividendos, δ	Fluxo de caixa líquido de depleção – proporção de F
Taxa de juros livre de risco, *r*	Taxa de juros livre de risco
Volatilidade da ação, σ	Volatilidade do valor da reserva desenvolvida
Tempo de expiração do contrato de opção, τ	Tempo de expiração dos direitos de investimento

A analogia da Tabela 7.4 é também útil para outras aplicações de OR. Em vez do valor da reserva desenvolvida, é possível considerar qualquer valor V de projeto operando como ativo básico para esse modelo de opções.

a) Proposição 1

Se o preço do petróleo segue um MGB, com parâmetros α, δ e σ, e se V(p) é definido pela Eq. (7.86), então V segue um MGB com os mesmos parâmetros α, δ, e σ.

b) Proposição 2

Considere o problema de escolha do momento ótimo de investimento para o desenvolvimento de um campo de petróleo com tempo de expiração finito (opção real de espera). Se o preço do petróleo segue um MGB, então a equação diferencial parcial estocástica, que rege o valor da opção real F(p, t), é exatamente a mesma, tanto no modelo de negócio como no modelo do fluxo de caixa rígido, e é dada pela equação a seguir.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 \mathrm{F}_{pp} + (r-\delta)p\mathrm{F}_p - r\mathrm{F} + \mathrm{F}_t = 0 \qquad (7.126)$$

onde os subscritos denotam derivadas parciais. Essa equação é igual à equação de Black e Scholes e Merton na versão com dividendos contínuos, ver Eq. (6.91) no **Capítulo 6**. A diferença se dá apenas nas condições de contorno (ver Tabela 7.5).

Tabela 7.5 – Condições de contorno para os modelos lineares de VPL

Condição de contorno	Modelo de negócio	Fluxo de caixa rígido
Trivial, $p = 0$	F(0, t) = 0	$\mathrm{F}_p(p^*, t) = qB$
Expiração, t = T	F(p, T) = max(qBp - I, 0)	F(p,T) = max(q'Bp - C - I, 0)
Continuidade, $p = p^*$	F(p^*, t) = qBp^* - I	F(p^*, t) = q'Bp^* - C - I

onde p^* é o gatilho a partir do qual é ótimo o investimento imediato e C é o custo operacional em valor presente. A outra variável de estado é o tempo t ∈ [0,T], onde T é o tempo legal de expiração do direito de investir no desenvolvimento do campo. A solução da Eq. (7.126), sujeita às condições de contorno da Tabela 7.5, pode ser obtida pelo método das diferenças finitas, ou por meio de aproximações analíticas, inclusive por simulação Monte Carlo para opções americanas.

A ideia é que os modelos de negócio e do fluxo de caixa rígido estabeleçam, respectivamente, os limites inferiores e superiores de opções reais, tanto para o valor da OR quanto para o gatilho de investimento ótimo. A Tabela 7.6 a seguir mostra um exemplo de OR para efeito de comparação entre os dois modelos. Os parâmetros usados foram r = δ = 6% *a.a.*, σ = 20% *a.a.*, T = 2 anos, C = $400 MM. Os demais valores são mostrados na Tabela 7.6 a seguir.

Tabela 7.6 – Exemplo de opções reais comparando os modelos de VPL

Variáveis	Modelo de negócio	Fluxo de caixa rígido
V ($MM)	640	640
I ($MM)	500	500
VPL = V - I ($MM)	140	140
Opção real F ($MM)	147,53	178,95
Gatilho p^* ($/bbl)	21,88	24,24
Probabilidade de exercício (%)	84,3	71,2
Tempo esperado de exercício em anos	0,61	1,06

A volatilidade em PSS é o desvio-padrão anual de dV/V. Conforme Proposição 1, no caso de V ser proporcional a *p*, as volatilidades de *p* e V são iguais e assim é mais prático estimar a volatilidade de V usando uma série temporal de preços do petróleo. Dixit e Pindyck (1994) recomendam σ entre 15% e 25% *a.a.* Estimativas dos autores usando dados de janeiro de 1985 a outubro de 2004, para os petróleos Brent e WTI, indicavam volatilidades em torno de 30% para preços *spot* e 15% para preços futuros longos.

Outra possibilidade para estimar a volatilidade de V, considerando-se outras variáveis com incerteza de mercado além do preço do petróleo, taxa diária de sondas e outros custos, é a simulação Monte Carlo de processos estocásticos das variáveis que afetam V. Essa metodologia é recomendada por Copeland e Antikarov (2001), que dessa forma obtém uma variância combinada em $t = 1$ ano e, com a ajuda da Eq. (7.108) aplicada a V, pode-se estimar a volatilidade de V.

Nessa abordagem, Copeland e Antikarov recorrem a um teorema de Samuelson (1965) que tem as seguintes implicações: mesmo com inúmeras variáveis estocásticas seguindo diferentes processos, tais como reversão à média e outros e, mesmo que esses processos sejam correlacionados, o retorno agregado ou valor agregado do projeto V é aproximadamente um MGB. Isso implica que o retorno da operadora segue um MGB, mesmo que haja variações cíclicas em vários componentes. Copeland e Antikarov usam esse teorema para defender o uso do MGB em nível agregado de projeto em aplicações gerais de OR. As vantagens são:

- O MGB é muito mais simples de trabalhar em OR do que os outros processos.
- São consideradas várias fontes de incerteza de mercado em V e não apenas a mais importante.

Na analogia da taxa de dividendos[76], a taxa de distribuição de fluxo de caixa δ é o fluxo de caixa operacional líquido anual como uma percentagem de V. Para reservas de petróleo, existe o fenômeno da depleção, já que há uma quantidade finita de petróleo no reservatório e sua pressão vai declinando com o passar do tempo. Isso gera um declínio na produção do campo ao longo da vida da reserva, que pode ser capturada pela taxa de declínio. A equação para estimar δ, incluindo a taxa de declínio, é apresentada no artigo de Paddock, Siegel e Smith (1988) e em Dixit e Pindyck (1994), que assume um fluxo de caixa simplificado.

Aqui são apresentados dois caminhos práticos para estimar δ:

- Para o modelo que assume V proporcional a *p*, é possível interpretar δ como a taxa de conveniência líquida do preço do petróleo, e assim pode-se estimar δ usando dados do mercado futuro aplicando a Eq. (7.111).
- O segundo caminho é uma regra prática usando uma perspectiva de longo prazo que é útil para OR. Alguns autores sugerem a taxa de juros livre de risco, isto é, fazer $\delta = r$.

A EDP do modelo de PSS para o valor da OR ou valor da reserva não desenvolvida é idêntica à EDP de Black, Scholes e Merton com dividendos contínuos, ver Eq. (7.127) mais adiante. Ou seja, a EDP da opção do tipo americana é igual à da opção tipo europeia. O que muda são apenas as condições de contorno, pois as opções americanas têm duas condições de contorno adicionais de exercício antecipado. A dedução da EDP do valor de uma OR é oportuna para resumir o método dos ativos contingentes.

No método dos ativos contingentes, um dos principais caminhos é construir um portfólio livre de risco formado pela compra (venda) da opção real F e pela venda (compra) de *n* unidades do projeto V. A ideia não é comprar ou vender fisicamente esses ativos, e sim relacionar matematicamente essas variáveis (F e V),

[76] A taxa de dividendos é um *custo de oportunidade da espera* que o investidor incorre se ele tem a opção, mas não o ativo básico. Em contraste, a taxa de juros *r* remunera a política de espera (imagine que o investidor aplica I no banco). Logo, *r* e δ têm efeitos opostos tanto no valor da opção como nos gatilhos de exercício ótimo, e assim é frequente a diferença $r - \delta$ em equações de derivativos.

sabendo-se que o retorno exigido pelo investidor, para um portfólio livre de risco é a taxa livre de risco *r*, independentemente do aquele prefira. Com isso se evita o problema de estimar a taxa ajustada ao risco de uma opção. Assim, escolhe-se o valor de *n* de tal forma que o retorno desse portfólio seja livre de risco, conforme já indicado em tópicos anteriores. Esse valor de *n* é conhecido por delta *hedge* e em geral basta fazer $n = F_V$ (derivada parcial de F em relação a V), para eliminar os termos com risco na equação do retorno do portfólio. A outra ferramenta básica na derivação da EDP é o Lema de Itô, o que permite expandir o valor da opção em função das variáveis de estado (V e *t*, nesse caso).

c) Proposição 3

A EDP que define o valor da opção de maturidade finita F(V, *t*) em investir no ativo básico V(*t*), o qual segue um MGB com parâmetros $\alpha = \mu - \delta$ e σ, com taxa livre de risco constante e igual a *r*, é dada por:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)VF_V - rF + F_t = 0 \qquad (7.127)$$

Note que a Eq. (7.127) é a mesma em (7.78), à exceção do termo $\pi(x, t)$.. Esse é o resultado aplicando o método dos ativos contingentes, que pode ser resumido nos seguintes passos:

- Escreva a equação do portfólio ϕ livre de risco: $\phi = F - nV$.
- Escreva o retorno de ϕ em um tempo *dt*: $r\phi dt = r(F - nV)dt$.
- Escreva o retorno de ϕ como a soma algébrica dos retornos dos ativos componentes desse portfólio. Para isso, lembre-se de que o retorno total é a soma da taxa de ganho de capital α com a taxa de dividendos δ. Note também que a opção pode variar (ganho de capital *d*F), mas não distribui dividendo. Assim, o retorno do portfólio é: $dF - n(dV + \delta V dt)$.
- Iguale as duas equações do retorno do portfólio e obtenha: $r(F - nV)dt = dF - n(dV + \delta V dt)$.
- Para obter *d*F, usa-se o Lema de Itô: $dF = F_V V + \frac{1}{2}F_{VV}(dV)^2 + F_t dt$.
- Para obter $(dV)^2$, eleva-se ao quadrado a equação diferencial que descreve o processo estocástico da variável básica ($dV = \alpha V dt + \sigma V dz$), obtendo $(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$ (os termos em *dt* de ordem > 1 são desprezados).
- Substitua esse resultado na equação de *d*F obtida pelo Lema de Itô, resultando $dF = F_V dV + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} dV + F_t dt$.
- Substitua esse resultado na equação do retorno do portfólio e obtenha $r(F - nV)dt = (F_V - n)dV + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}\, dt + F_t dt - n\delta V dt$.
- Para eliminar o termo estocástico do retorno (portfólio sem risco), é necessário eliminar o termo *d*V, função de *dz*. Para isso basta fazer $n = F_V$. Substituindo *n* resulta a Eq. (7.127).

Resolvendo a EDP numericamente, se obtém dois resultados relacionados, o valor da opção real F(V, *t*) e a regra ótima de decisão dada pelo gatilho V*(*t*). A regra de decisão dada pelo valor crítico ou gatilho V*(*t*), determina o valor mínimo em que a OR está suficientemente atrativa para ser exercida. Ou seja, deve-se investir otimamente somente se $V(t) \geq V^*(t)$.

Para modelos em que V é proporcional a *p*, é mais fácil raciocinar com *p**(*t*), ou seja, o preço que faz um campo específico não desenvolvido ser atrativo. Nesse caso, a regra é investir quando $p \geq p^*$. A Figura 7.21 a seguir apresenta uma solução típica para um campo não desenvolvido com 100 MM de barris de reserva e *q* = 0,187 com V = 18,7*p*. As curvas representam valores de OR para os casos de cinco anos para a expiração dos direitos (τ = 5 anos), um ano (τ = 1 ano) e na expiração (τ = 0). Na última situação, conhecida como o caso agora ou nunca, a regra do VPL é válida de forma que o valor da OR é o máximo entre o VPL e zero.

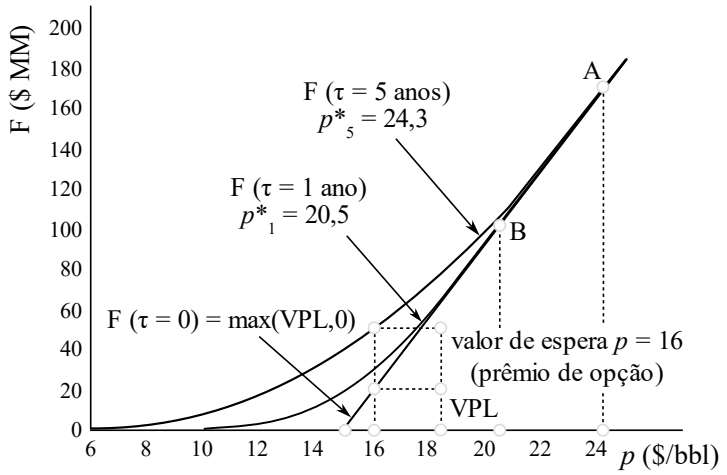


Figura 7.21 – Valor da opção real em função do preço *p*.

A Figura 7.21 mostra que para p = \$15/bbl, o VPL é zero. Assim, \$15/bbl é o preço de nivelamento, denominado de *break-even price* ou CUP, custo unitário de produção. A Figura 7.21 mostra que para \$16/bbl, o VPL é positivo, e o valor líquido da espera, chamado de prêmio da opção (diferença F - VPL), para $\tau = 5$, é até maior que o VPL. Logo, a \$16/bbl, a política ótima, nesse exemplo, é esperar e ver. O prêmio da opção é zero apenas no ponto de tangência entre a curva de opções e a linha do VPL, o que ocorre somente nos pontos de gatilho A, onde $p^*(\tau_5)$ = \$24,3/bbl e B, onde $p^*(\tau_1)$ = \$20,5/bbl.

A Figura 7.22 a seguir apresenta a curva de gatilhos para esse mesmo exemplo, desde o instante inicial (faltando cinco anos para a expiração) até a expiração. Note que os pontos A e B correspondem aos casos mostrados na Figura 7.21.

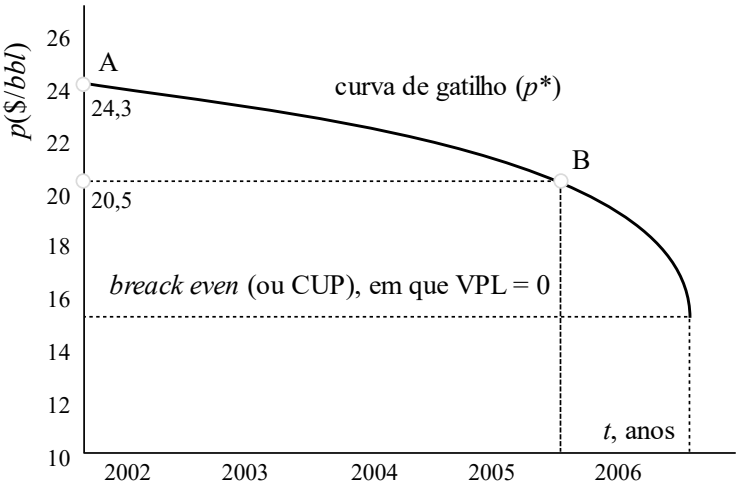


Figura 7.22 – Regra de decisão de OR: curva de gatilhos.

É importante ressaltar a diferença de regras de decisão da teoria de OR e do FCD: no primeiro caso, o projeto precisa ser suficientemente robusto para se investir imediatamente, enquanto para o FCD basta o preço estar acima do CUP. Somente na expiração (caso agora ou nunca) é que a regra de OR coincide para a regra do FCD, isto é, investir se VPL ≥ 0 ou, de forma equivalente, se $p \geq$ CUP (CUP = \$15/bbl).

7.5.3. Modelos de Pindyck e Schwartz – MGB *versus* MRM

Apesar da vasta literatura científica, a modelagem de preços de petróleo é um tema ainda muito complexo e desafiador. Um teste econométrico elementar sobre o retorno do preço do petróleo é feito por meio de uma regressão linear considerando-se os preços correntes, conforme Eq. (7.128) a seguir:

$$\ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = a + (b-1)\ln(p_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad (7.128)$$

onde ε_t é o erro de previsão relacionado à volatilidade, a e b são coeficientes, onde b reflete a inclinação da reta de regressão e a é o coeficiente linear, um fator fundamental do teste. A ideia é que, se os preços seguem um MGB, o retorno independe do nível de preços correntes e a inclinação é próxima de zero ($b \cong 1$). Já na hipótese alternativa de MRM, o retorno depende do nível em que se encontram os preços, onde os preços altos tendem a cair e os baixos tendem a subir, e assim o parâmetro b deveria indicar um valor significativamente diferente de 1. Usando os preços nominais entre janeiro de 1970 e outubro de 2004 do petróleo Brent, obtém-se o gráfico da Figura 7.23 a seguir.

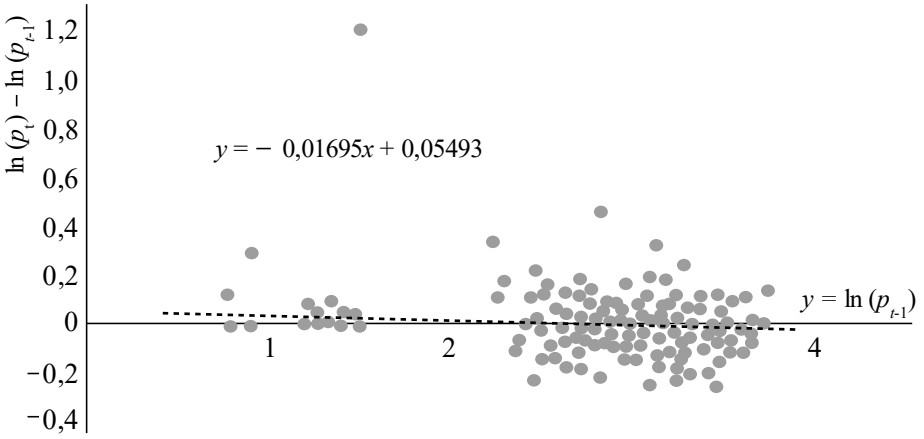


Figura 7.23 – Regressão para Brent e óleos similares (janeiro de 1970 a outubro de 2004).

Note, na Figura 7.23, que a inclinação da reta pontilhada praticamente inexiste, indicando que o retorno independe do nível de preços correntes. Nesse caso, a hipótese do MGB não pode ser rejeitada em favor do MRM. Nem mesmo o teste econométrico padrão, denominado de teste de raiz unitária de Dickey e Fuller[77] (1979), rejeita a hipótese do MGB nem para 1% e nem para 5% de significância para o período em questão (34 anos).

Pode-se questionar se o uso de séries temporais tão longas é adequado, dado que mudanças estruturais durante o período são comuns. No mercado de petróleo, por exemplo, a criação da OPEP no início dos anos 70 indicou uma quebra estrutural desse mercado em termos de séries temporais. Por outro lado, séries mais longas têm vantagens importantes:

- Para estimativa de tendência, a quantidade de dados não resolve. O melhor estimador é aquele baseado no maior intervalo de tempo. Dito de outra forma, a variância (erro) do estimador de tendência é proporcional a σ^2/T, onde T é o intervalo de tempo. Assim, quanto maior esse intervalo T, melhor a estimativa (menor o erro).

[77] Ver Pindyck e Rubinfeld (1991, p.459-465)

- Para estimativa da volatilidade, a quantidade de dados é que resolve, e não o intervalo tempo. Isso porque a variância (erro) do estimador de volatilidade é proporcional a $2\sigma^4/n$, onde n é o número de observações.

Essas constatações motivaram Pindyck e Rubinfeld a usarem séries temporais longas para analisar o problema de tendência, crucial na comparação MGB *versus* MRM, ainda que sujeitas às mudanças estruturais. Pindyck (1999) discutiu a evolução de longo prazo dos preços do petróleo usando 127 anos de dados. Ele detectou reversão à média com velocidade de reversão menor que outros valores determinados por outros autores (meia-vida de cinco anos contra meia-vida de um a dois anos). No modelo de Pindyck (1999), os preços do petróleo revertem para uma curva quadrática de preço de equilíbrio em forma de U, em vez de um nível fixo de equilíbrio, conforme mostrado na Figura 7.18.

O argumento para o modelo em U é sua consistência com modelos de reservas naturais exaustivas, onde se incorporam mudanças tecnológicas. Pindyck (1999) apresenta um modelo de reversão para preços do petróleo, denominado de Ornstein-Uhlenbeck multivariado, em que os preços revertem para uma curva de equilíbrio de longo prazo. Em outras palavras, Pindyck (1999) argumenta que o modelo de reversão à média é melhor, mas o preço de equilíbrio futuro é incerto e a reversão é lenta. Para o caso de preços elevados, fato que ocorreu a partir de 2004 até a crise financeira mundial de 2008, uma razão para a lentidão da reversão é que os investimentos de E&P levam muitos anos para colocar petróleo novo no mercado, o chamado efeito do *tempo de construção*.

Pindyck (1999) conclui que, para aplicações como opções reais, a premissa do MGB é improvável que leve a grandes erros na regra ótima de investimento. Assim, o modelo clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988), considerando o MGB, resulta uma aproximação razoável. Schwartz (1997) comparou quatro modelos para o comportamento estocástico dos preços de *commodities*: o MGB, o MRM puro e modelos de dois fatores e de três fatores (ver Tabela 7.7).

Tabela 7.7 – Modelos de preços do petróleo para uso em opções reais.

Modelos estocásticos	Nome	Referência
Modelo *imprevisível*	MGM	Paddock, Siegel e Smith (1988)
Modelo *previsível*	Reversão à média pura	Schwartz (1997)
Modelo *mais realista*	Modelos de dois e três fatores	Gibson e Schwartz (1990) e Schwartz (1997)
	MRM com preço de equilíbrio estocástico	Pindyck (1999)
	MRM + saltos de Poisson	Dias e Rocha (1999)

O modelo de reversão à média pura é o mesmo das Eqs. (7.111) e (7.112), em que a reversão à média se dá para um nível fixo de equilíbrio sem qualquer outra variável estocástica. O modelo de dois fatores é devido a Gibson e Schwartz (1990), o preço segue um MGB, mas a taxa de conveniência δ da *commodity* segue um MRM. O modelo de 3 fatores é semelhante ao de dois fatores, mas com a taxa de juros livre de risco como a terceira variável estocástica seguindo outro MRM.

Sob o paradigma do MGB, toda variação no preço do óleo é um choque permanente na tendência projetada de longo prazo, enquanto o modelo de reversão à média pura assume exatamente o oposto, isto é, cada oscilação de preço é só um desvio temporário do nível de equilíbrio de longo prazo. Schwartz e Smith concluíram que, para muitos investimentos de longo prazo, pode-se avaliar com segurança usando apenas o preço de equilíbrio como variável estocástica, modelando-o com um MGB. Isso significa que se pode usar um MGB com baixa volatilidade para modelar a expectativa de longo prazo em modelos de opções reais. A baixa

volatilidade deve-se ao fato estilizado, uma vez que a volatilidade dos preços futuros – assim como a das expectativas futuras – é menor do que a volatilidade dos preços à vista, *spot*.

O terceiro modelo apresentado na Tabela 7.7 é devido a Dias e Rocha (1999), os primeiros que modelaram um MRM com saltos de Poisson tanto para preços de petróleo como para aplicações de OR. Dias e Rocha (1999) consideraram a reversão à média em situações normais de mercado[78], mas considerando a ocorrência de grandes saltos devido a notícias anormais raras, que são modeladas com um processo de Poisson. Algumas vezes ocorrem notícias relevantes e surpreendentes como guerras, colapso de mercados, surpresas da OPEP etc., gerando uma mudança radical de expectativas em relação ao balanço oferta *versus* demanda no mercado de petróleo. Esses eventos causam uma grande variação em semanas ou em poucos meses. A Figura 7.24 mostra a média mensal dos preços reais do petróleo desde 1974 até 2023, em que fica evidente a ocorrência de grandes saltos em alguns momentos da história.

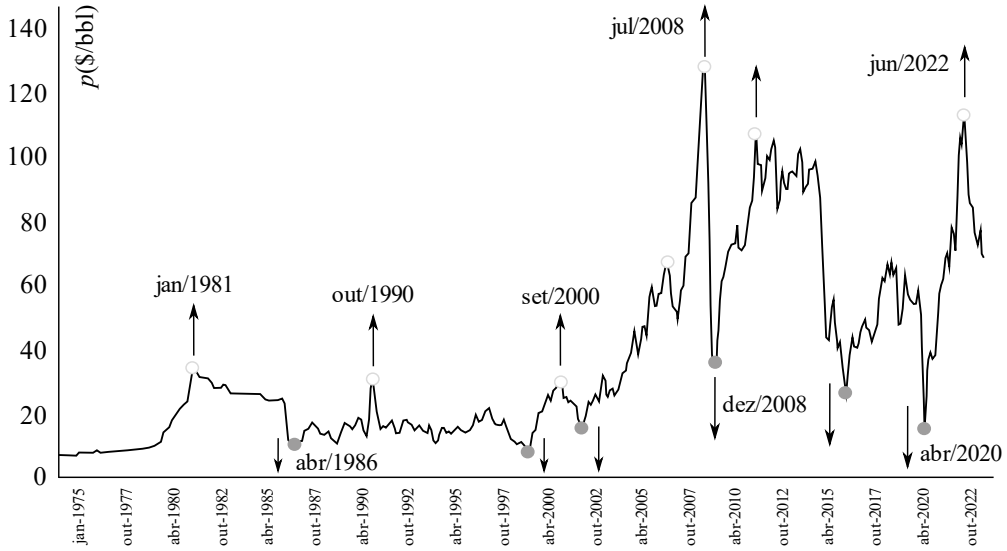


Figura 7.24 – Preços do petróleo WTI atualizados com dólar de 2014.

Como nos dois outros modelos mais realistas, o modelo de MRM mais saltos de Poisson não é tão previsível quanto o MRM puro devido ao componente de saltos, nem tão imprevisível quanto o MGB, devido ao termo de reversão. No modelo de Dias e Rocha (1999), os preços do petróleo foram descritos com a seguinte equação de reversão à média com saltos:

$$\frac{dp}{p} = [\kappa(\bar{p} - p) - \lambda k]dt + \sigma dz + dq \tag{7.129}$$

onde

$$dq = \begin{cases} 0, \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \phi - 1, \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \tag{7.130}$$

$$k = \mathrm{E}[\phi - 1] \tag{7.31}$$

onde λ é a frequência de saltos igual a $\lambda/2$ tanto para cima como para baixo, dq é um processo de Poisson independente de dz, ϕ é a distribuição de probabilidade do tamanho dos saltos. Na Eq. (7.129), o primeiro

[78] Em Dias e Rocha (1999), a reversão é em direção a um valor fixo de equilíbrio de longo prazo.

termo é a tendência de um processo de reversão à média[79] usado em Dixit e Pindyck (1994), chamado de Ornstein-Uhlenbeck geométrico. O último termo é o processo de Poisson, que gera saltos com probabilidade λdt.

Embora se tenha obtido resultados consistentes, o modelo de Dias e Rocha (1998) – em particular a escolha dos termos de reversão à média – tem problemas práticos para a estimação de parâmetros e para aplicações que requerem a simulação Monte Carlo no processo estocástico. Em virtude disso, foi sugerido para desenvolvimento de campos de petróleo da Petrobras, um modelo um pouco mais prático. Dias e Rocha denominaram esse modelo de Marlim, descrito com a seguinte expressão:

$$dx = \kappa(\bar{x} - x)dt + \sigma dz + dq$$
$$dq = \begin{cases} 0, \text{com probabilidade } 1 - \lambda dt \\ \phi - 1, \text{com probabilidade } \lambda dt \end{cases} \quad (7.132)$$

Na Eq. (7.132) não existe o termo de compensação de Poisson por ser simétrica a distribuição do tamanho dos saltos. Com efeito, o valor esperado não depende do processo de Poisson. Nesse caso, *dx* não tem distribuição normal, pois os saltos geram caudas expressivas na distribuição. Os principais momentos probabilísticos (média, variância, assimetria e curtose) para esse processo foram deduzidos por Dias e Rocha (1999) usando a equação diferencial estocástica de Kolmogorov[80], que descreve a evolução da função densidade de probabilidade de uma variável estocástica. Aqui são mostradas apenas a média e variância desse processo. A média é igual à da Eq. (7.113), e a relação entre *x* e *p* é dada pela Eq. (7.117). Já a variância do MRM com saltos de Poisson é dada pela Eq. (7.133) a seguir:

$$\text{Var}[x(t)] = (1 - e^{-2\kappa t}) \cdot (\sigma^2 + \lambda \text{E}[\sigma^2])/(2\kappa) \quad (7.133)$$

A Eq. (7.133) mostra que, no longo prazo, a variância é limitada, como no MRM puro e, alcança o valor assintótico de $(\sigma^2 + \lambda \text{E}[\sigma^2])/(2\kappa)$. Deve-se lembrar que $\text{E}[\phi^2] \neq (\text{E}[\phi])^2$, e assim $\text{E}[\phi^2]$ é calculado por integração numérica conforme a Eq. (7.134):

$$\text{E}[\phi^2] = \int \phi^2 f(\phi) d\phi \quad (7.134)$$

onde $f(\phi)$ é a função densidade de probabilidades de ϕ.

Para os casos em que se opta por modelos mais realistas ou que precisem de considerações tanto no curto como no longo prazo, o modelo de Marlim (campo da Petrobras) é uma boa alternativa, podendo ser ainda melhor se considerar o preço de equilíbrio de longo prazo como sendo também estocástico (extensão do modelo de Marlim). Para análises de longo prazo em que é necessário apenas um mapeamento do comportamento dos preços do petróleo, uma alternativa é a sugestão de Schwartz e Smith (2000) de modelar apenas o preço de equilíbrio de longo prazo como uma variável estocástica seguindo um MGB.

Existem algumas alternativas para se estabelecer o preço de equilíbrio de longo prazo. A estimativa usando o MRM tradicional é fácil de ser realizada, mas não é adequada, pois é uma estimativa que usa toda a série de preços para estimar um preço de equilíbrio fixo, enquanto em um modelo como o sugerido por Schwartz e Smith (2000), o nível de equilíbrio é dinâmico e segue um MGB. A alternativa natural seria então a estimativa estatística complexa de um modelo MRM com preço de equilíbrio estocástico, MGB, por exemplo, em que todos os parâmetros têm de ser estimados conjuntamente. Nesse caso, os dois processos, o MRM de *p* e o MGB do preço de equilíbrio devem ser correlacionados positivamente. Deve-se atentar para o grande número

[79] O termo λk é de compensação devido à distribuição dos saltos não ser simétrica. Com isso, o valor esperado de $p(t)$ i independe dos saltos e o processo vira um *martingale* (ver definição de martingale no **Anexo 3**).

[80] Ver equação de Kolmogorov no **Anexo 3**.

de parâmetros a estimar, para não incorrer em super ajustamento, *overfitting*, em que o modelo se ajusta muito bem aos dados passados, mas tem um péssimo poder de previsão e pouca aderência com os fatos estilizados[81].

A segunda alternativa, que é a mais usada nas empresas, se baseia em análise de cenários, que fornece previsões de preços de longo prazo. Essa visão geralmente tem uma forte dose de análise subjetiva e um grande potencial de erros grosseiros. Por exemplo, durante os elevados preços do início da década de 1980, havia previsões frequentes de preços por volta de 100 $/bbl para o ano 2000. Já na década de 1990, houve exatamente o oposto.

[81] Exemplo: um ajustamento *ótimo* em que a volatilidade do mercado à vista é menor que a estimada para o preço de equilíbrio. Isso contraria fatos estilizados, como os observados em companhias de petróleo e bancos.

1

ANEXO – TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Não há comportamento humano que seja desprovido em absoluto de precedentes: o mundo é velho demais para que as pessoas inventem maneiras totalmente novas de agir.
Theodore Dalrymple

A matemática financeira adota, como roteiro, os seguintes passos na análise econômica de projetos:

- Manuseio do fluxo de caixa do projeto associado a uma taxa de juros.
- Obtenção da taxa interna de juros implícita no fluxo de caixa.
- Análise e comparação das diversas alternativas de fluxos de caixa dos investimentos.

1.1. O Valor do Dinheiro no Tempo

Só é possível comparar quantias financeiras considerando a dimensão do tempo. O valor do dinheiro no tempo pressupõe computar os juros devidos à renúncia do capital posto à disposição de outros por algum tempo, e o risco assumido por quem empresta, além da correção devido à desvalorização da moeda (inflação).

1.1.1. Conceito e definição de juros

Existem duas razões que justificam os juros, são elas:

- O diferimento ou a renúncia ao consumo imediato deve ser remunerado.
- O risco assumido deve ser remunerado.

O primeiro vem do fato das pessoas terem preferência pelo consumo imediato de bens, em virtude da sua maior utilidade hoje do que no futuro. O juro é, também, uma remuneração devido ao risco assumido por quem empresta. À relação entre o valor do juro produzido e o capital aplicado dá-se o nome de taxa de juros.

$$\text{taxa de juros} = \frac{\text{valor monet rio do juro produzido}}{\text{valor do capital aplicado}} \tag{1}$$

A *taxa livre de risco* refere-se apenas à recompensa pela renúncia do consumo imediato, sem nenhuma remuneração referente ao risco envolvido na aplicação dos recursos. A incerteza sobre o retorno exige uma sobretaxa acima da taxa livre de risco, o chamado prêmio de risco (*spread,* ver Figura 1).

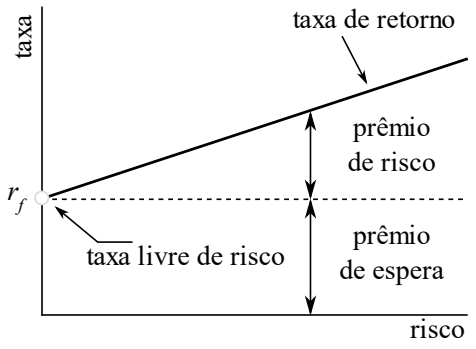


Figura 1 – Taxa livre de risco, taxa de retorno e prêmio de risco.

Na verdade, o custo real total de um empréstimo é obtido pela somatória de diversos componentes, tais como:

- Taxa livre de risco, r_f – remuneração do capital.
- Acréscimo devido ao risco, prêmio de risco (*spread*).
- Custo devido aos impostos e serviços de intermediação, e
- Correção monetária que compense a perda do poder aquisitivo da moeda.

1.2. Capitalização Simples e Composta

A matemática financeira dispõe de duas sistemáticas para a composição dos juros, são elas: *juros simples* e *juros compostos*.

1.2.1. Juros simples

Na sistemática de juros simples, a taxa de juros incide sempre sobre um mesmo valor, que é o capital ou o principal. Seja, por exemplo, um principal de $100 capitalizados a juros de 5% ao mês durante dez meses. O valor do juro de um período, calculado sempre sobre um capital constante, é também constante e, nesse caso igual a VP · i =100 · 0,05 = 5. Assim, os juros totais para períodos são:

$$j = \text{VP} \times i \cdot n = 100 \times 0{,}05 \times 10 = \$50 \tag{2}$$

Deve-se observar que a taxa i e o número de períodos n devem se referir à mesma unidade de tempo.

1.2.2. Capitais diferidos equivalentes

Chama-se de capitais diferidos quando são realizáveis em datas diferentes. Dois ou mais capitais diferidos são equivalentes caso seus valores atuais calculados pelo desconto comercial sejam iguais. Seja, por exemplo, VF_n o valor nominal de um título para períodos e VF_m o valor nominal de outro título equivalente ao primeiro com vencimento em m períodos. Seguindo a definição, pode-se construir uma expressão igualando os valores atuais dos títulos diferidos, ou seja.

$$\text{VF}_n(1 - d \cdot n) = \text{VF}_d(1 - d \cdot m) \tag{3}$$

de onde se deduz que

$$\text{VF}_d = \text{VF}_n \frac{(1 - d \cdot n)}{(1 - d \cdot m)} \tag{4}$$

1.2.3. Juros compostos

No regime de juros compostos, o valor do juro produzido pelo capital inicial é incorporado a ele mesmo, passando essa soma a produzir novos juros no período seguinte, incidindo juro sobre juro, daí o nome de juros compostos. Por conseguinte, ao final de períodos, o montante resulta

$$\text{VF} = \text{VP}(1 + i)^n \tag{5}$$

onde VP é o valor presente (valor atual) e VF é o valor futuro (montante ao final da capitalização).

1.2.4. Período de capitalização

Algumas vezes, deseja-se um período de capitalização menor que o período referido na taxa de juros. Por exemplo, em alguns casos torna-se necessária a capitalização mensal dos juros, porém a taxa conhecida é anual. Para esses casos, é necessário definir o *período principal* e o *subperíodo*.

Neste anexo é adotada a seguinte convenção: o período principal é o maior dos dois períodos e é representado por n. O subperíodo, menor que o principal, é representado por k. Assim, representa o número de

subperíodos contidos no período principal n. Se o período principal for um ano, por exemplo, os subperíodos usuais podem ser: mês ($k = 12$), trimestre ($k = 4$), semestre ($k = 2$) etc. A taxa de juros referente ao subperíodo k pode ser *proporcional* ou *equivalente*.

1.2.5. Taxa proporcional (nominal)

Duas taxas, uma relativa ao período principal e outra relativa ao subperíodo, são ditas proporcionais quando existe uma relação linear entre elas. Convenciona-se i_n a taxa de juros referida no período principal e i_p a taxa proporcional correspondente ao subperíodo. Assim, a taxa proporcional i_p segue a seguinte relação:

$$i_p = \frac{i_n}{k} \Leftrightarrow i_n = k \times i_p \tag{6}$$

Se, por exemplo, uma taxa de juros i_n é de 0,12 ao ano, as taxas proporcionais usuais são os valores indicados na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Taxas proporcionais a 12% ao ano

Subperíodo	Taxa proporcional, i_n	k
mês	1%	12
trimestre	3%	4
semestre	6%	2

Para o cálculo do montante, quando a capitalização é efetuada com a taxa proporcional, a expressão é

$$\text{VF} = \text{VP}(1 + i_p)^{nk} = \text{VP}\left(1 + \frac{i_n}{k}\right)^{nk} \tag{7}$$

Os juros podem ser capitalizados anualmente, semestralmente, mensalmente, diariamente e até continuamente quando o número de subperíodos tende para o infinito. Observe na Tabela 2 que, para uma taxa i_n de 0,12 ao ano, o valor montante para um capital de $100 cresce até convergir para um valor limite equivalente a capitalizar continuamente.

Tabela 2 – Valor limite de um montante – capitalização contínua

Subperíodo	k	Montante VF		
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
ano	1	112,0000	125,4400	140,4928
mês	12	112,6825	126,9735	143,0769
dia	365	112,7475	127,1199	143,3245
hora	8760	112,7496	127,1247	143,3326
minuto	525600	112,7497	127,1249	143,3329
instantâneo	∞	112,749685	127,124915	143,332941

Assim, quando o número de subperíodos de capitalização tende para o infinito, a taxa proporcional i_p tende para zero, conduzindo o montante para o seu valor máximo. O montante limite é expresso da seguinte forma:

$$\text{VF} = \text{VP}\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{i_n}{k}\right)^{nk} \tag{8}$$

No entanto, sabe-se que

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i_n}{k}\right)^{nk} = e^{ni_n} \tag{9}$$

Logo, a equação para a capitalização contínua é

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}e^{ni_n} \tag{10}$$

A capitalização contínua pode ser interpretada também como a variação contínua do montante com o tempo. Observe que para um tempo discreto vale a seguinte expressão:

$$\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta t} = i_n \mathrm{M} \tag{11}$$

onde ΔM é a variação do montante, Δ*t* o período e i_n a taxa aplicada no período. A Eq. (11) pode ser reescrita para um intervalo de tempo infinitesimal. Para isso basta tomar o limite de Δ*t* tendendo para zero, ou seja

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathrm{M}}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{M}}{dt} = i_n \mathrm{M} \tag{12}$$

ou

$$\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = i_n dt \tag{13}$$

Integrando os dois lados da Eq. (13) com os limites de integração do lado esquerdo variando de VP (capital inicial) a VF (montante final), e o tempo no lado direito variando de 0 a *n* (períodos de capitalização), resulta

$$\int_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{VF}} \frac{1}{\mathrm{M}} d\mathrm{M} = \int_0^n i_n \mathrm{dt} \tag{14}$$

Resolvendo as integrais chega-se a

$$\ln \mathrm{M}]_{\mathrm{VP}}^{\mathrm{VF}} = i_n t]_0^n \tag{15}$$

de onde se deduz que

$$\ln \mathrm{VF} - \ln \mathrm{VP} = i_n(n-0) \Leftrightarrow \ln\frac{\mathrm{VF}}{\mathrm{VP}} = i_n n \tag{16}$$

logo

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}e^{ni_n} \tag{17}$$

igual a Eq. (10).

1.2.6. Taxa equivalente (efetiva)

A *taxa equivalente ou efetiva* é aquela que incide sobre os valores monetários, independentemente do número de subperíodos de capitalização. Diz-se que duas taxas de juros são equivalentes quando, referindo-se a períodos de tempos diferentes, produzem o mesmo montante ao final de um prazo qualquer. Para que essas taxas sejam consideradas equivalentes, por definição, é necessário que

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}(1+i_n)^n = \mathrm{VP}(1+i_k)^{nk} \tag{18}$$

de onde se extraem duas relações:

$$i_n = (1+i_k)^k - 1 \quad \text{e} \quad i_k = (1+i_n)^{1/k} - 1 \tag{19}$$

A *taxa nominal* (ou proporcional) tem uma *taxa efetiva* (ou equivalente) implícita que depende do número de períodos de capitalização. A taxa efetiva é a taxa de fato utilizada nos cálculos financeiros em geral e, rigorosamente, quando um agente financeiro se referir à *taxa efetiva* de uma operação, leva em consideração, além do prêmio de espera, os custos totais da transação (serviços, taxas de intermediação, taxas extras etc.), excetuando o índice de recomposição do poder aquisitivo da moeda durante o período em consideração (correção monetária).

Já a taxa real é a taxa nominal ou efetiva considerando a taxa de inflação. Por exemplo, a *taxa de juros reais nominais* é calculada como

$$i_{real} = \frac{1 + i_{nominal}}{1 + f} - 1 \tag{20}$$

onde *f* é o índice de correção monetária do período, que em tese é qualquer índice de preços que traduza a inflação.

Em aplicações financeiras, costuma-se denominar *taxa bruta* de aplicação o resultado do cálculo realizado com o valor do resgate bruto, não levando em consideração o desconto dos impostos que são retidos pela instituição financeira ou a serem pagos pelo investidor (imposto de renda, IOF etc.). Quando esse desconto é considerado no cálculo, denomina-se então de *taxa líquida* de aplicação.

12.7. Taxa instantânea equivalente

Como já mencionado, quando o número *k* de subperíodos de capitalização tende para o infinito, a capitalização torna-se contínua. Dessa forma, pode-se calcular uma *taxa instantânea equivalente* i_i, que produzirá o mesmo montante ao final do último período. Para que as taxas sejam equivalentes, por definição, os montantes produzidos devem ser iguais, portanto

$$\text{VP}(1 + i_n)^n = \text{VP}e^{ni_i} \Leftrightarrow (1 + i_n)^n = e^{ni_i} \tag{21}$$

Aplicando o logaritmo nos dois lados, resulta

$$\ln(1 + i_n)^n = \ln e^{ni_i} \Leftrightarrow n \ln(1 + i_n) = n \cdot i_i \tag{22}$$

de onde se deduz que

$$i_i = \ln(1 + i_n) \tag{23}$$

1.3. Fluxo de Caixa

Geralmente uma proposta de investimento em projetos de produção de petróleo envolve entradas e saídas de caixa ou valores monetários, que são denominados de receitas e despesas. Esses valores ocorrem ao longo de vários períodos de duração do projeto. É comum representar um fluxo de caixa por meio de um gráfico chamado de *diagrama de fluxo de caixa*, conforme indicado na Figura 2.

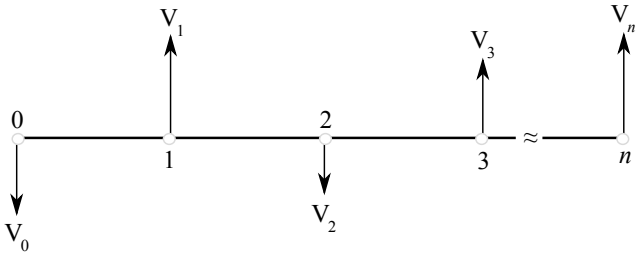


Figura 2 – Esquema de um diagrama de um fluxo de caixa.

O eixo horizontal representa o tempo a partir de um instante zero, considerado instante inicial, até o instante final, tempo de duração do projeto. Nos diversos pontos que representam os períodos ao longo do horizonte temporal são traçados segmentos verticais. Os segmentos *positivos* estão orientados para cima, representando receitas ou entradas de caixa, e os segmentos *negativos*, representando os investimentos iniciais, despesas ou outras saídas de caixa, estão orientados para baixo.

A Tabela 3 a seguir indica um exemplo de fluxo de caixa de um empreendimento hipotético.

Tabela 3 – Exemplo de fluxo de caixa de um empreendimento hipotético

Período	0	1	2	3	4
Investimento inicial	(1.000)	(200)			
Receitas			800	700	600
Custos fixos			(30)	(30)	(30)
Despesas operacionais			(60)	(60)	(70)
Receita líquida			710	610	500
Fluxo de caixa líquido	(1.000)	(200)	710	610	500

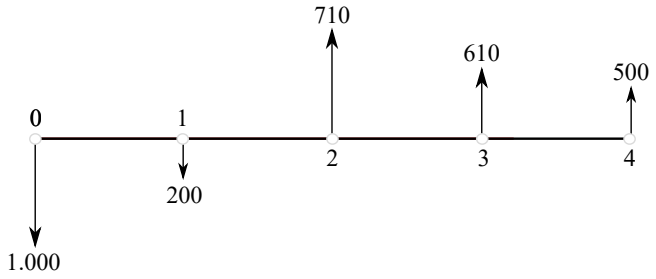


Figura 3 – Diagrama do fluxo da caixa – Tabela 3.

O valor futuro VF acumulado ao final do último período consiste na capitalização do principal VP a uma determinada taxa. Já o valor presente é obtido descontando a uma taxa de juros o valor futuro, que é o valor final de um período de capitalização.

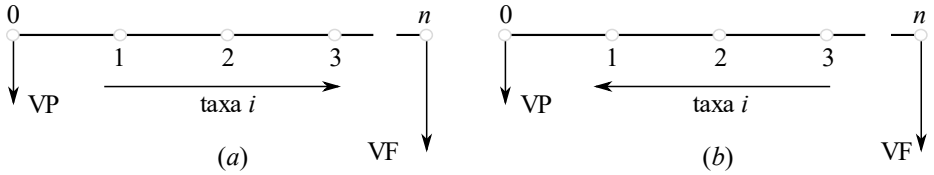


Figura 4 – Diagramas de fluxos de caixa genéricos.

$$(a)\ \ \mathrm{VF} = \mathrm{VP}(1+i)^n \ \Leftrightarrow\ \ (b)\ \ \mathrm{VP} = \frac{\mathrm{VF}}{(1+i)^n} \tag{24}$$

O fator $(1 + i)^n$ é o fator de capitalização, denominado na literatura de "fator VP para VF". O inverso, $1/(1 + i)^n$, é chamado de "fator VF para VP".

1.3.1. Série uniforme

Um fluxo de caixa que tenha todos os valores monetários iguais é conhecido como série uniforme. As quantias, representados pela letra R, são iguais e constantes em todo o período.

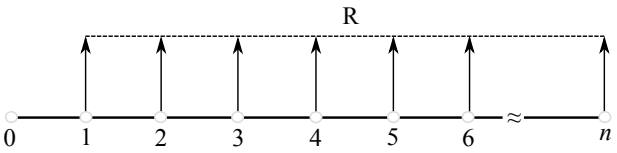


Figura 5 – Série uniforme.

Para auxiliar na dedução do valor presente e do valor futuro de uma série uniforme, observe os dois diagramas indicados na Figura 6 a seguir.

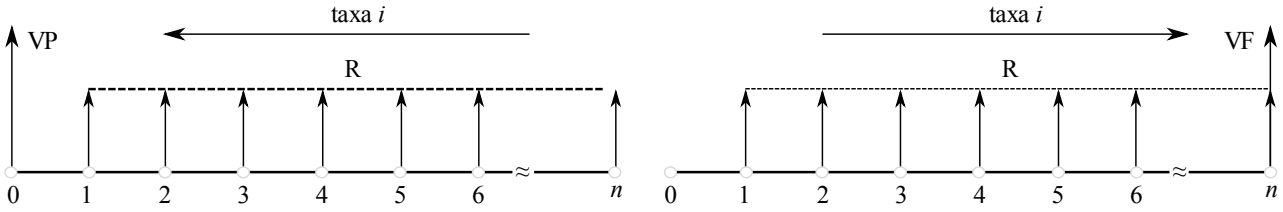


Figura 6 – Fluxos de caixa de duas séries uniformes com quantias iguais.

Para cálculo do valor presente, basta descontar n parcelas iguais de cada um dos períodos à taxa i e somar os termos e, para o valor futuro, capitalizar na mesma taxa todos os termos até o final do período e somá-los. Ou seja, para o valor presente tem-se que

$$\mathrm{VP} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{R}}{(1+i)^j} \tag{25}$$

e para o valor futuro

$$\mathrm{VF} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{R}(1+i)^{j-1} \tag{26}$$

Outra forma de determinar o valor futuro VF é levar o valor presente VP para a data final do período pela sistemática de juros compostos, ou seja

$$\mathrm{VF} = (1+i)^n \mathrm{VP} = (1+i)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{R}}{(1+i)^j} \tag{27}$$

Observe que a Eq. (25) nada mais é do que a soma de uma PG (progressão geométrica) de n termos com o primeiro termo $a_1 = \mathrm{R}/(1+i)$ e razão $q = 1/(1+i)$. A dedução pode ser realizada utilizando-se a equação da soma de uma PG, isto é

$$\mathrm{VP} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \tag{28}$$

Outra forma de dedução, mais econômica, é calcular inicialmente o valor futuro VF partindo da Eq. (26), ou seja

$$\mathrm{VF} = \mathrm{R} + \mathrm{R}(1+i) + \mathrm{R}(1+i)^2 + \mathrm{R}(1+i)^3 + \ldots + \mathrm{R}(1+i)^{n-1} \tag{29}$$

Multiplicando os dois lados por $(1+i)$, resulta

$$\mathrm{VF}(1+i) = \mathrm{R}(1+i) + \mathrm{R}(1+i)^2 + \mathrm{R}(1+i)^3 + \ldots + \mathrm{R}(1+i)^n \tag{30}$$

Subtraindo a Eq. (29) da Eq. (30), tem-se que

$$\mathrm{VF}(1+i) - \mathrm{VF} = -\mathrm{R} + \mathrm{R}(1+i)^n \tag{31}$$

ou

$$\mathrm{VF} = \mathrm{R}\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{32}$$

de onde se pode extrair o valor presente VP, ou seja

$$\mathrm{VP} = \frac{\mathrm{VF}}{(1+i)^n} = \mathrm{R}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \tag{33}$$

A partir das Eqs. (32) e (33) são extraídos o valor de em função de VF e R em função de VP, ou seja

$$\mathrm{R} = i\frac{\mathrm{VF}}{(1+i)^n - 1} \quad \text{e} \quad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{VP}(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1} \tag{34}$$

respectivamente.

1.3.2. Perpetuidade

Chama-se perpetuidade um valor monetário que se distribui periódica e indefinidamente segundo uma série uniforme para um número infinito de períodos. Observe o esquema da Figura 7.

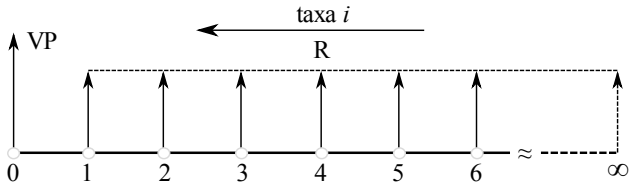


Figura 7 – Fluxo de caixa de uma perpetuidade.

A expressão do valor presente de uma perpetuidade é calculada por meio da Eq. (33) fazendo $n \to \infty$, assim

$$\mathrm{VP} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{R}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{R}\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \Leftrightarrow \mathrm{VP} = \frac{\mathrm{R}}{i} \tag{35}$$

1.4. Determinação da Taxa de Juros de Fluxo de Caixa

Chama-se *taxa interna de retorno*, TIR, a taxa de juros que faz com que a soma algébrica dos valores monetários levados a valor presente se anule. A equação do valor presente líquido para um fluxo de caixa genérico, conforme indicado na Figura 8, é representada pela Eq. (36) a seguir.

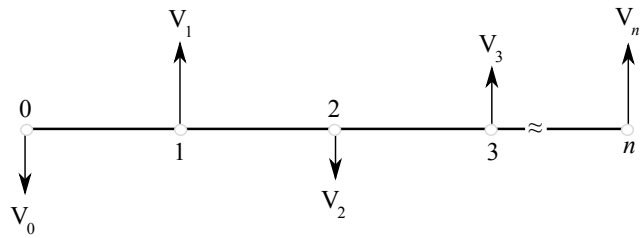


Figura 8 – Fluxo de caixa genérico.

$$\text{VPL} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\text{V}_j}{(1+i)^j} \tag{36}$$

Observe que se trata de um polinômio de enésimo grau para a variável com raízes. Isso equivale dizer que um fluxo de caixa com *n* períodos pode apresentar até taxas de retorno diferentes. Para simplificar o raciocínio, observe inicialmente os chamados fluxos de caixa convencionais. Um fluxo de caixa convencional é aquele que tem um ou mais períodos de saídas de caixa seguidos por um ou mais períodos de entradas de caixa. Um fluxo convencional só apresenta uma única mudança de sinal na sequência de valores monetários.

Sabe-se que o número de raízes reais e positivas de um polinômio não excede o número de trocas de sinais[82]. Assim, para um fluxo de caixa convencional em que se verifica apenas uma troca de sinal, deduz-se apenas uma taxa real e positiva, que é a taxa de juros ou a taxa de retorno.

O cálculo da TIR requer, para sua determinação, na maioria das vezes, um procedimento iterativo. Observe o fluxo de caixa indicado na Figura 9 a seguir, em que se deseja conhecer a taxa de juros.

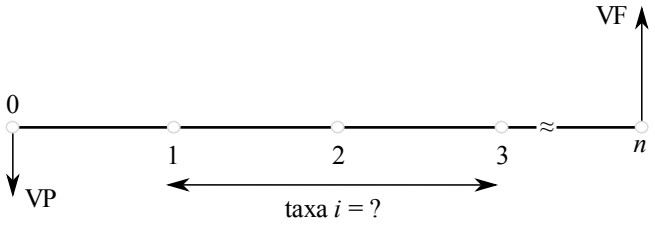


Figura 9 – Fluxo de caixa convencional.

Nesse caso, por referir-se a um problema de VP para VF ou de VF para VP, pode-se facilmente determinar a taxa de juros explicitando o valor de *i* da Eq. (24), resultando

$$i = \left(\frac{\text{VF}}{\text{VP}}\right)^{1/n} - 1 \tag{37}$$

1.4.1. Taxa de juros de uma série uniforme

No caso de o fluxo de caixa ser do tipo série uniforme, a equação toma a seguinte forma:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{\text{VP}}{\text{R}} \tag{38}$$

Note que a partir da Eq. (38) não é possível explicitar o valor da taxa de juros . A solução do problema só é possível por processo iterativo ou por meio da construção de um gráfico VP L × *i*.

1.4.2. Taxa de juros de um fluxo de caixa genérico

Para um fluxo de caixa genérico, conforme indicado na Figura 8, o VPL é obtido com a seguinte expressão:

[82] Regra de René Descartes em seu trabalho *La G*éométrie – trata-se de um teorema que determina o número de raízes positivas e negativas de um polinômio.

$$\text{VPL} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\text{V}_j}{(1+i)^j} = \frac{\text{V}_0}{(1+i)^0} + \frac{\text{V}_1}{(1+i)^1} + \ldots + \frac{\text{V}_n}{(1+i)^n} = 0 \tag{39}$$

Assumindo

$$x = \frac{1}{1+i} \tag{40}$$

resulta

$$\text{V}_0 + \text{V}_1 x + \text{V}_2 x^2 + \ldots + \text{V}_n x^n = 0 \tag{41}$$

Note que a equação resultante é um polinômio de enésimo grau com *n* raízes. Nesses casos, com várias raízes reais e positivas ou sem nenhuma raiz real, considera-se que o fluxo de caixa não possui TIR.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 1 – Qual a taxa de juros do fluxo de caixa da Figura 10 a seguir?

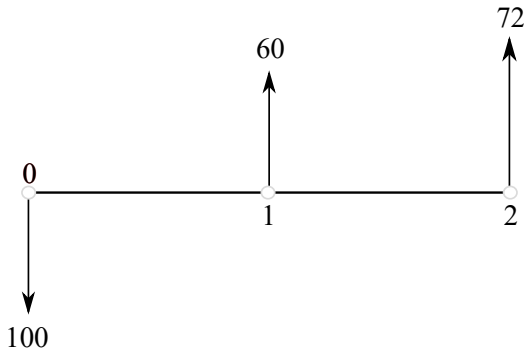


Figura 10 – Fluxo de caixa – Exemplo 1.

Solução

Aplicando os dados do problema na Eq. (39), resulta

$$\text{VPL} = \frac{-100}{(1+i)^0} + \frac{60}{(1+i)^1} + \frac{72}{(1+i)^2} = 0 \tag{42}$$

Assumindo

$$x = \frac{1}{1+i} \tag{43}$$

obtém-se a seguinte equação:

$$-100 + 60x + 72x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \times 72 \times (-100)}}{2 \times 72} \tag{44}$$

Resolvendo, obtêm-se duas raízes reais, x_1 = 0,8333 e x_2 = -1,6667. Como dito, interessa apenas a raiz real e positiva, logo a TIR, solução do problema, é igual a

$$x = \frac{1}{1+i} = 0{,}8333 \Leftrightarrow i = \frac{1}{0{,}8333} - 1 = 0{,}2 \Leftrightarrow r = 20\%\ a.p. \tag{45}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2 – Determine a taxa de juros do fluxo de caixa da Figura 11.

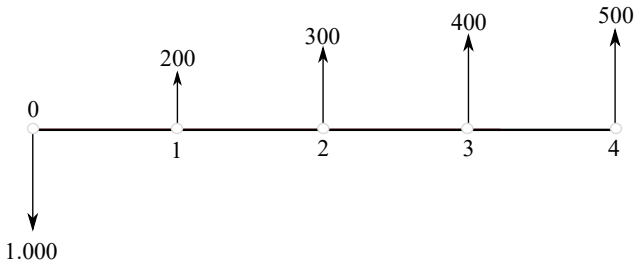


Figura 11 – Fluxo de caixa – Exemplo 2.

Solução

A TIR é a taxa *i* que satisfaz a seguinte igualdade:

$$\text{VPL} = \frac{-1.000}{(1+i)^0} + \frac{200}{(1+i)^1} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{400}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} = 0 \tag{46}$$

Aplicando os dados do Exemplo 2 na função do Excel, resulta TIR = 12,8% *a.p*. A Figura 12 a seguir exibe uma tabela com os valores do VPL para várias taxas e um gráfico indicando a TIR do Exemplo 2.

taxa %	VPL	*taxa* %	VPL
0	400,00	10	71,78
2	323,28	12	20,20
4	252,68	14	−27,69
6	187,56	16	−74,23
8	127,43	18	−113,71

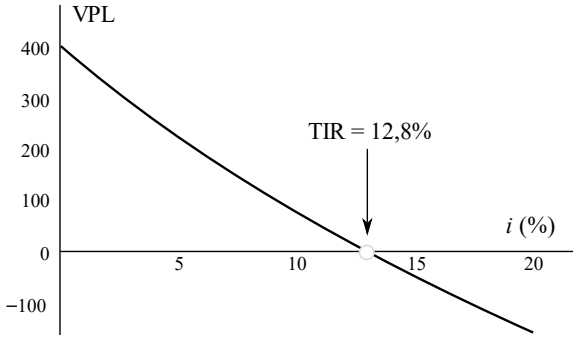


Figura 12 – Tabela e gráfico do do fluxo de caixa.

No caso de um fluxo de caixa genérico, o mais prático é usar a função do Excel que permite determinar a taxa interna de retorno com a seguinte função:

$$\text{TAXA}(v_1, v_2, \ldots, v_n; est.) \tag{47}$$

onde V_1,V_2, ... ,V_n são os valores do fluxo de caixa e é a estimativa inicial da taxa (em geral, 0,1).

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3 – Determine a taxa de juros do fluxo de caixa indicado na Figura 13 a seguir.

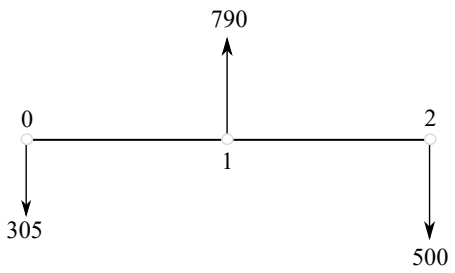


Figura 13 – Fluxo de caixa – Exemplo 4.

Solução

Utilizando o mesmo procedimento do Exemplo 2, segue que

$$\text{VPL} = \frac{-305}{(1+i)^0} + \frac{790}{(1+i)^1} - \frac{500}{(1+i)^2} = 0 \tag{48}$$

que resulta na seguinte equação de segundo grau:

$$-305 + 790x - 500x^2 = 0 \tag{49}$$

onde $x = 1/(1 + i)$. Resolvendo, obtêm-se duas raízes reais e positivas: $x_1 = 0{,}671$ e $x_2 = 0{,}909$, resultando $i_1 = 0{,}1$ e $i_2 = 0{,}49$. E agora, qual é a taxa interna de retorno ou taxa de rentabilidade desse fluxo de caixa: 10% ao período ou 49% ao período?

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 4 – Qual a taxa de juros do fluxo de caixa indicado na Figura 14?

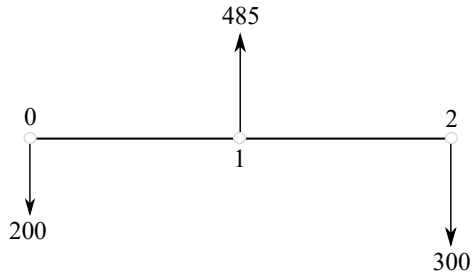


Figura 14 – Fluxo de caixa – Exemplo 4.

Solução

Procedendo da mesma forma do Exemplo 2, resultam as seguintes equações:

$$\text{VPL} = -\frac{200}{(1+i)^0} + \frac{485}{(1+i)^1} - \frac{300}{(1+i)^2} = 0 \tag{50}$$

$$-200 + 485x - 300x^2 = 0 \tag{51}$$

$$x = \frac{-485 \pm \sqrt{485^2 - 4 \times (-200) \times (-300)}}{2 \times (-300)} = \frac{-485 \pm \sqrt{-4772}}{-600} \tag{52}$$

Nesse caso não existe raiz real, logo, não há taxa de juros para esse fluxo de caixa.

▪▪▪▪▪▪

1.5. Sistemas de Amortização

Vários são os sistemas de amortização de empréstimo ou financiamento, geralmente constituídos de pagamentos periódicos. Os mais utilizados pelo sistema financeiro são:

- Sistema francês ou tabela PRICE.
- Sistema de amortização constante – SAC.
- Sistema americano.

Cada um dos pagamentos periódicos conhecido como prestações é composto de duas parcelas: uma de amortização, que é a restituição do capital emprestado, e outra correspondente aos juros, que é a remuneração do capital. O juro pago, em certos casos, é dedutível do lucro líquido para efeito de cálculo do imposto de renda.

1.5.1. Sistema francês ou tabela PRICE

É o mais utilizado no mercado financeiro e no crédito direto ao consumidor. O fluxo de caixa correspondente é o mesmo da série uniforme (ver Figura 15).

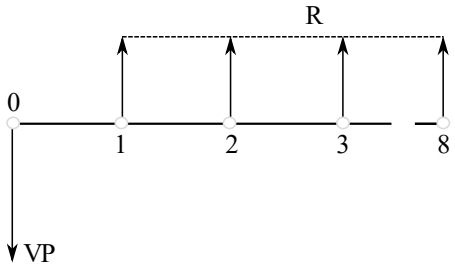


Figura 15 – Série uniforme – sistema francês de amortização.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 5 – Seja o financiamento de $7.360 pagos em dez prestações iguais a uma taxa de 6% *a.p.* Determine o valor da prestação R.

Solução

O valor da prestação de uma série uniforme em função do valor presente é dado por:

$$R = \frac{7.360(1+0{,}06)^{10} \times 0{,}06}{(1+0{,}06)^{10}-1} = \$1.000 \tag{53}$$

▪▪▪▪▪▪

A Tabela 4 e a Figura 16 a seguir mostram os valores dos juros e das amortizações referentes a cada prestação.

Tabela 4 – Plano de amortização pelo sistema PRICE

n	Prestação	Juros	Amortização	Acumulado		Saldo devedor
				Juros	Amortização	
0						7.360,00
1	1.000	441,60	558,39	441,60	558,39	6.801,61
...	...	...	...	...	...	...
9	1.000	110,00	889,99	2.583,28	6.416,61	943,39
10	1.000	56,60	943,39	2.639,88	7.360,00	0,00

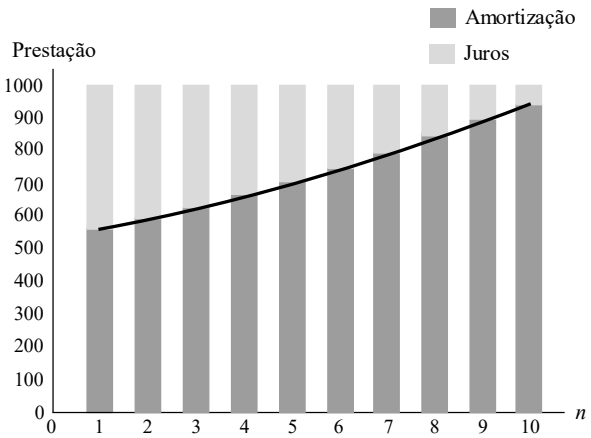


Figura 16 – Sistema PRICE de amortização.

A sistemática de cálculo do plano de amortização do financiamento é realizada utilizando-se das seguintes equações:

$$\mathrm{J}_k = i \times \mathrm{D}_{k-1} \qquad \mathrm{A}_k = \mathrm{R} - \mathrm{J}_k \qquad \mathrm{D}_k = \mathrm{D}_{k-1} - \mathrm{A}_k \tag{54}$$

onde J são os juros, A é o valor da amortização, D é o saldo devedor, R é a prestação e o índice *k* refere-se ao período. Como a prestação é constante, a parcela correspondente aos juros decresce à medida que a amortização cresce em uma progressão geométrica cuja razão é igual a (1 + *i*).

▪▪▪▪▪▪

1.5.2. Sistema de amortização constante – SAC

O sistema de amortização constante tem, como característica, o mesmo valor para as amortizações durante todo o prazo do financiamento.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 6 – Com os dados do Exemplo 5, determine o valor da amortização pelo SAC.

Solução

Utilizando os dados, o valor da amortização pelo SAC é, por definição,

$$\mathrm{A} = \frac{7.360}{10} = \$736{,}00 \tag{55}$$

Tabela 5 – Plano de amortização pelo SAC

n	Prestação	Juros	Amortização	Acumulado		Saldo devedor
				Juros	Amortização	
0						7.360,00
1	1177,60	441,60	736,00	441,60	736,00	6.624,00
...	...	...	...	...	...	...
9	824,32	88,32	736,00	2.384,64	6.624,00	736,00
10	780,16	44,16	736,00	2.428,80	7.360,00	0,00

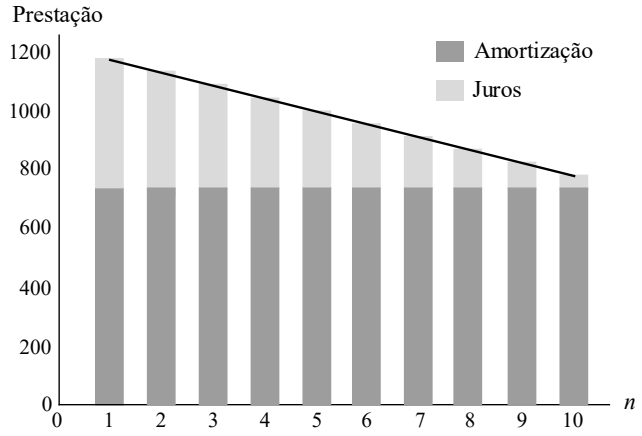


Figura 17 – Sistema SAC de amortização.

▪▪▪▪▪▪

A sistemática de cálculo é realizada com as seguintes equações:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{VP}}{n} \qquad \mathrm{J}_k = i \times \mathrm{D}_{k-1} = i \times \mathrm{A} \times (n - k + 1) \qquad \mathrm{R}_k = \mathrm{A} + \mathrm{J}_k \tag{56}$$

onde J são os juros, A é o valor da amortização, D é o saldo devedor, R é a prestação, VP é o valor do financiamento e o índice *k* refere-se ao período considerado.

1.5.3. Sistema americano de amortização

No sistema americano, paga-se periodicamente apenas os juros. O plano de amortização pelo sistema americano para o Exemplo 5 está indicado na Tabela 6 e na Figura 18.

Tabela 6 – Plano de amortização pelo sistema Americano

n	Prestação	Juros	Amortização	Acumulado		Saldo devedor
				Juros	Amortização	
0						7.360,00
1	441,60	441,60	0,00	441,60	0,00	7.360,00
...	...	...	...	...	...	...
9	441,60	441,60	0,00	3.974,40	0,00	7.360,00
10	7.801,60	441,60	7360,00	4.416,00	0,00	0

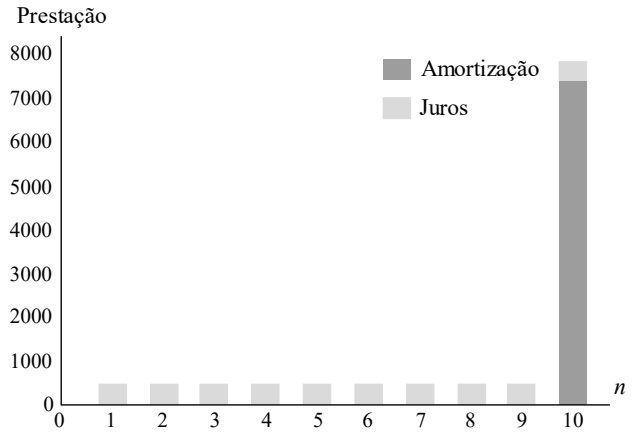


Figura 18 – Sistema Americano de amortização.

O capital é devolvido somente no final do financiamento. Quem toma um empréstimo nesse sistema deve formar um fundo de amortização para quitação final da dívida. É mais utilizado em empréstimos internacionais. A sistemática de cálculo do sistema americano utiliza-se das seguintes equações:

$$\mathrm{A} = 0 \text{ para } 0 < k < n \quad \text{e} \quad \mathrm{A} = \mathrm{VP} \text{ para } k = n \tag{57}$$

$$\mathrm{J} = i \times \mathrm{VP} \quad \text{para } 0 < k < n \tag{58}$$

$$\mathrm{D} = \mathrm{VP} \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_k = \mathrm{J} \text{ para } 0 < k < n \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_n = \mathrm{J} + \mathrm{VP} \text{ para } k = n \tag{59}$$

onde J são os juros, A é o valor da amortização, D é o saldo devedor, R é a prestação, VP é o valor do financiamento e o índice *k* refere-se ao período considerado.

1.6. Correção Monetária, Taxa de Câmbio e Número Índice

Neste tópico, de forma resumida, são apresentadas as equações para correção monetária, taxa de câmbio e o conceito de número índice.

1.6.1. Correção monetária

Apenas a correção pela sistemática de juros compostos tem consistência matemática, ou seja:

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}(1+i)^n(1+f_1)(1+f_2)\ldots(1+f_n) \tag{60}$$

Se a taxa de inflação *f* for constante, resulta

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}(1+i)^n(1+f)^n \tag{61}$$

1.6.2. Taxa de câmbio

Por definição, a taxa de câmbio[83] é o *preço em moeda nacional* de uma unidade de moeda estrangeira. Desse modo, quando a taxa de câmbio se eleva representa uma desvalorização da moeda nacional frente à moeda estrangeira, do contrário a moeda nacional passa a valer mais. Quando a moeda nacional se desvaloriza favorece o exportador, e quando se valoriza favorece o importador, que com moeda mais forte suporta compras de volumes maiores em moeda estrangeira. Quando a imprensa informa a taxa de câmbio, está se referindo à taxa nominal de câmbio. Para o cálculo da variação real da taxa de câmbio dentro de um período (*i* até *i* + 1), deve-se descontar a inflação nacional e a do país estrangeiro durante esse período.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 7 – Considerando os índices da Tabela 7, qual deveria ser a taxa de câmbio em dezembro/1998 em relação ao dólar dos EUA, tomando por base julho/1994? Qual foi a valorização ou desvalorização do real em relação ao dólar durante esse período?

Tabela 7 – Taxa de câmbio e índices de inflação.

taxas de câmbio (R$/U$)		julho/1994	dezembro/1998
		0,931	1,205
índice de preços ao consumidor	Brasil (FGV)	97,461	148,28
	Brasil (INPC)	925,72	1465,06
	EUA (CPI)[84]	113,0	125,7

Solução

Primeiro, é necessário calcular a inflação no Brasil (FGV e INPC) e nos EUA de julho/1994 a dezembro/1998, com os índices da Tabela 7. Os resultados são, respectivamente

$$f_{\mathrm{Brasil(FGV)}} = \frac{148{,}28}{97{,}461} - 1 = 52{,}12\%, \qquad f_{\mathrm{Brasil(INPC)}} = \frac{1465{,}06}{925{,}72} - 1 = 58{,}26\% \tag{62}$$

e

[83] Em alguns países, a definição da taxa de câmbio é o preço em moeda estrangeira de uma unidade de moeda nacional (Inglaterra e EUA, por exemplo).

[84] *Consumer Price Index* – Índice de preço ao consumidor americano. Fonte: *Bureau of Labor Statistics*.

$$f_{\text{EUA}} = \frac{125{,}7}{113} - 1 = 0{,}1123 \Leftrightarrow f_{\text{EUA}} = 11{,}23\%\ a.p. \tag{63}$$

Tomando como referência U$100 em julho/1994, equivale na mesma data em reais a

$$\text{R\$} = 0{,}931 \times 100{,}00 \Rightarrow \text{R\$} = 93{,}10 \tag{64}$$

As correções monetárias dos valores R$93,10 e U$100,00 para dezembro/1998 pelos índices de inflação são, respectivamente

$$\text{R\$}_{\text{FGV}} = 93{,}10 \times (1 + 0{,}5214) = 141{,}64, \qquad \text{R\$}_{\text{INPC}} = 93{,}10 \times (1 + 0{,}5826) = 147{,}34 \tag{65}$$

e

$$\text{U\$} = 100{,}00 \times (1 + 0{,}1123) = 111{,}23 \tag{66}$$

Desse modo, as taxas de câmbio em dezembro/1998 em relação ao dólar dos EUA, de acordo com os índices de inflação da FGV e o INPC, deveriam ser respectivamente

$$\frac{\text{R\$}_{\text{FGV}}}{\text{U\$}} = \frac{141{,}64}{111{,}23} = 1{,}273 \quad \text{e} \quad \text{R\$}_{\text{INPC}}/\text{U\$} = \frac{147{,}34}{111{,}23} = 1{,}325 \tag{67}$$

Considerando a taxa de câmbio indicada na Tabela 7 para dezembro/1998 e tomando como base o índice do INPC, por exemplo, conclui-se que houve uma valorização do real em relação ao dólar durante esse período, de:

$$\text{valoriza} \quad \text{o} = \frac{1{,}325 - 1{,}205}{1{,}205} = 0{,}0996 \Leftrightarrow 9{,}96\% \tag{68}$$

Em outras palavras, 1,325 reais compram 1,0996 dólares em vez de apenas 1 dólar. Portanto, uma valorização de 9,96%. Já com o índice da FGV, a valorização é de 5,64%.

▪▪▪▪▪▪

Para sistematizar o cálculo do câmbio, recomenda-se a seguinte operação:

$$\text{C}_{i+1}^{r} = \text{C}_{i}^{n} \times \frac{\text{I}_{i+1}^{i}/\text{I}_{i}^{i}}{\text{I}_{i+1}^{e}/\text{I}_{i}^{e}} \tag{69}$$

onde C^r é a taxa de câmbio real no período $i + 1$ tomando como base a taxa de câmbio nominal C^n no período i, I^e e I^i são os números índices de mensuração da inflação externa (país estrangeiro) e interna (nacional), respectivamente. Por exemplo, aplicando os dados do Exemplo 7 na Eq. (69), a taxa de câmbio real em dezembro/98 tomando como base a taxa de câmbio nominal de julho/94 seria de:

$$\text{C}_{dez/98}^{r} = \text{C}_{jul/94}^{n} \times \frac{\text{I}_{dez/98}^{i}/\text{I}_{jul/94}^{i}}{\text{I}_{dez/98}^{e}/\text{I}_{jul/94}^{e}} = 0{,}931 \times \frac{1465{,}06/925{,}72}{125{,}7/113{,}0} = 1{,}325 \tag{70}$$

que é o mesmo resultado encontrado na Eq. (67). Para determinar a variação real da taxa de câmbio durante esse período, basta fazer o seguinte cálculo:

$$100 \times \left(\frac{\text{C}_{i+1}^{r}}{\text{C}_{\text{i}}^{n}} - 1 \right) \tag{71}$$

De um modo geral, a taxa de câmbio é influenciada pelo mercado ou controlada pelo governo, ou seja, segue um regime que pode ser flutuante ou fixo, respectivamente. No regime de câmbio flutuante, seu valor de equilíbrio é resultado da curva de oferta e demanda por moeda estrangeira, como qualquer outro bem. Nesse

caso, a oferta é determinada pelos exportadores e residentes que recebem recursos externos e a demanda é determinada pelos importadores e pelos residentes que transferem renda para o exterior.

1.6.3. Número índice

Um número índice é destinado a medir a evolução de séries temporais. Trata-se de um instrumento importante para avaliar as tendências das variáveis econômicas durante um período. Ele pode indicar a variação relativa do preço, da quantidade ou do valor ($p \times q$) de um ponto qualquer anterior no tempo (período base) e, usualmente, o período corrente. Um número índice é dito simples quando se refere apenas a um único item (série homogênea), e composto quando se trabalha com um conjunto de itens (séries heterogêneas). Por exemplo, o IPCA e o INPC são exemplos de números índices compostos utilizados para mensurar a inflação no Brasil.

Considere uma série temporal $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que indique os preços observados de um item da economia ao longo de um período (o preço de um barril de petróleo, por exemplo). Define-se um número índice simples referente ao período corrente t com base no período base i como

$$\mathrm{I}(t,i) = \frac{y_t}{y_i} \times 100 \tag{72}$$

Algumas vezes, o índice simples é chamado de *relativo* e serve para fazer a comparação entre dois períodos, o atual e o período base. Dessa forma tem-se o relativo de preço, o relativo de quantidade e o de valor, ou seja:

$$\mathrm{I}_p(t,i) = \frac{p_t}{p_i} \times 100, \quad \mathrm{I}_q(t,i) = \frac{q_t}{q_i} \times 100, \qquad \mathrm{I}_v(t,i) = \frac{v_t}{v_i} \times 100 \tag{73}$$

respectivamente.

Todos os números índices têm algumas características comuns, dentre elas:

- São razões entre as quantidades medidas (preço, quantidade, valor etc.) em um período em relação às quantidades do período base.
- São expressos em percentagens, mas sem o sinal de %.
- O número índice para o período base é, em geral, 100 (100%).

O número índice composto, como já referido, envolve mais de uma série temporal, normalmente o preço (p) e a quantidade (q) ou outra medida de ponderação. Existem diversos números índices na literatura, no entanto, duas fórmulas que envolvem preço e quantidade são mais conhecidas: o índice de Laspeyres e o índice de Paasche[85], cujas expressões são:

$$\mathrm{I}_p^L(t,i) = \frac{\sum p_t q_i}{\sum p_i q_i}, \qquad \mathrm{I}_q^{\mathrm{L}}(t,i) = \frac{\sum q_t p_i}{\sum p_i q_i}, \qquad \mathrm{I}_p^{\mathrm{P}}(t,i) = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_i q_t}, \qquad \mathrm{I}_q^{\mathrm{P}}(t,i) = \frac{\sum p_t q_t}{\sum q_i p_t} \tag{74}$$

onde os dois primeiros referem-se aos índices de Laspeyres de preço e de quantidade e os dois últimos os de Paasche, referentes também ao preço e à quantidade, respectivamente. Um terceiro índice é o de Fischer, calculado com base na média geométrica dos índices de Laspeyres e Paasche, ou seja:

$$\mathrm{I}_p^{\mathrm{F}}(t,i) = \sqrt{\mathrm{I}_p^{\mathrm{L}} \times \mathrm{I}_p^{\mathrm{P}}}, \qquad \mathrm{I}_q^{\mathrm{F}}(t,i) = \sqrt{\mathrm{I}_q^{\mathrm{L}} \times \mathrm{I}_q^{\mathrm{P}}} \tag{75}$$

Outros índices usuais são o índice de Marshall-Edgeworth e o de Divisia. Além destes, o IBGE e outros institutos trabalham também com o índice de valor, obtido com a seguinte expressão:

[85] O índice de Laspeyres é chamado também de índice da época base, e o de Paasche, de índice da época atual.

$$\mathrm{I_V}(t,i) = \mathrm{I_L}_p \times \mathrm{I_P}_q \quad \text{ou} \quad \mathrm{I_V}(t,i) = \mathrm{I_P}_p \times \mathrm{I_L}_q \tag{76}$$

Os números índices podem ser utilizados como um deflator, que é um índice utilizado em valores inflacionados para expressá-los em valores reais de determinado período base. Por exemplo, para obter uma série de dados deflacionados em valores a preço do período base, basta dividir cada valor da série pelo respectivo índice de preço. Desse modo, os valores estarão a preços constantes do ano base.

2

ANEXO – ANÁLISE DE REGRESSÃO

A riqueza de uma nação se mede pela riqueza do povo e não pela riqueza dos príncipes.
Adam Smith

A análise de regressão envolve a análise de dados amostrais para se conhecer como duas ou mais variáveis estão correlacionadas em uma determinada população. Já a correlação mede o grau de relacionamento entre variáveis, e a regressão resulta uma equação que descreve matematicamente o relacionamento entre elas. Importante dizer que os dados para análise de regressão são sempre dados emparelhados.

A análise de correlação, algumas vezes chamada de análise discriminante, é usada em várias áreas de investigação científica. Na indústria do petróleo, por exemplo, tem aplicação na solução de problemas geológicos quando não se dispõe de amostras suficientes de rochas (por exemplo, quando se deseja caracterizar tipos de rocha por meio de suas variáveis discriminantes). Se houver uma combinação linear de dependência dessas variáveis, é possível estabelecer diferenças acentuadas entre os grupos. A esses grupos definidos, denomina-se, pela geologia, de *lito fácies*.

2.1. Análise Discriminante

É uma técnica que trata de obter uma combinação linear de duas ou mais variáveis independentes que discrimine grupos definidos *a priori*. A técnica é baseada na comparação da variância entre grupos em relação à variância dentro dos grupos. A função discriminante tem a seguinte forma:

$$y = w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{n} w_ix_i \qquad (1)$$

onde *y* é o índice discriminante, *w* são os coeficientes discriminantes (pesos), *x* as variáveis independentes e *n* é o número de variáveis. A média dos índices discriminantes dos grupos nominais é chamada, algumas vezes, de *centroide*. Grupos distintos têm centroides distintas. O teste de significância estatística de uma função discriminante é uma medida da distância entre centroides de grupos.

2.2. Regressão Linear Univariável

Seguindo a didática de Maia (2019), a regressão é do tipo *linear simples* quando se estabelece uma equação matemática linear que descreva o relacionamento entre duas variáveis (Figura 1).

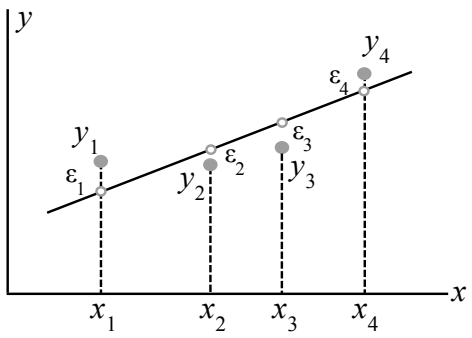


Figura 1 – Ajuste de uma reta de uma série de dados amostrais.

O objetivo de uma equação de regressão é estimar valores de uma variável com base no conhecimento da outra. Quando se trata de ajustar a equação de uma reta pelo método dos mínimos quadrados, por exemplo, utiliza-se a notação MMQ. O modelo de regressão linear aplicável ao exemplo da Figura 1 é a equação de uma reta conforme a seguir:

$$y = a + bx \tag{2}$$

cujos erros (ou resíduos) em cada ponto atendem à seguinte igualdade:

$$\varepsilon_i = y_i - (a + bx_i) \tag{3}$$

O MMQ é o método mais utilizado para ajustar uma linha reta a um conjunto de dados amostrais. É uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre as respostas de um modelo de regressão ajustada e os dados. Os erros são chamados de resíduos da função.

Um requisito implícito para o MMQ é que os erros sejam distribuídos normalmente, ou seja, são erros aleatórios com função densidade gaussiana. Outra condição é que os resíduos sejam independentes. O MMQ consiste na minimização da soma dos quadrados dos erros, ou seja, na minimização da função erro

$$\text{Erro}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \qquad \text{ou} \qquad \text{Erro}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \tag{4}$$

onde *n* é o número de pontos amostrais. O objetivo é estimar os parâmetros do modelo, nesse caso os parâmetros *a* e *b*. Assim, no ponto de mínimo, as derivadas parciais da função em relação aos parâmetros desconhecidos devem ser nulas, então:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\right) = 0 \tag{5}$$

Aplicando essas derivadas parciais na Eq. (2) resulta

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \tag{6}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{e} \qquad a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{7}$$

A determinação de *a* e *b* é feita a partir da solução do sistema composto pelas equações em (7), resultando:

$$a = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i) - b(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x)^2} \tag{8}$$

Em algumas situações é desejável atribuir diferentes pesos para os valores da variável independente. Nesses casos, o seguinte sistema de equações deve ser resolvido:

$$a\sum_{i=1}^{n} w_i + b\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \qquad \text{e} \qquad a\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i \tag{9}$$

Para se ter uma ideia do desempenho do modelo, isto é, da qualidade do ajuste de um determinado modelo a uma série de dados, pode-se utilizar uma medida absoluta ou relativa. As diferenças entre os dados

observados e o modelo representam uma medida absoluta da qualidade do ajuste. Já o desvio padrão dos resíduos representa uma medida relativa.

O coeficiente de determinação R^2 (coeficiente de correlação de Pearson) é uma medida relativa do ajuste. Essa medida estatística mede a proporção da variabilidade total da variável dependente, que é explicada pela regressão. Para a regressão pelo MMQ, R^2 é dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{10}$$

Aqui, $\bar{y}$ representa a média aritmética dos valores y_i. O maior valor possível de R^2 é 1, quando o ajuste é perfeito. O problema se torna mais difícil quando f não é linear nos parâmetros a serem determinados. Alguns algoritmos para resolver tal problema estão disponíveis na literatura, como os algoritmos de Gauss-Newton e Levenberg-Marquardt.

2.3. Regressão Linear Multivariável

Há situações em que o interesse é observar duas ou mais variáveis simultaneamente, por exemplo, a taxa de desemprego e a inflação verificadas em um país.

Definição: seja ε um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento. Se $x = x(s)$ e $y = y(s)$ são duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, então a variável (x, y) é uma variável aleatória bidimensional (Figura 2).

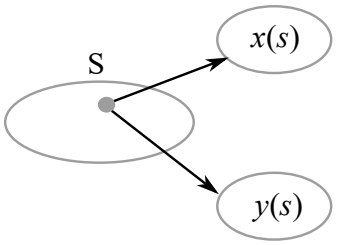


Figura 2 – Variáveis aleatórias bidimensionais.

Definição: se $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$,…, $x_n = x_n(s)$ são n funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, denomina-se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma variável aleatória n-dimensional ou vetor aleatório n-dimensional. No caso bidimensional, por exemplo, o contradomínio de (x, y) é um subconjunto do plano euclidiano, cada resultado poderá ser representado por um ponto (x_i, y_i) no plano.

2.3.1. Variável aleatória discreta de duas dimensões

Definição: seja (x, y) uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_i) está associada uma probabilidade de ocorrência $p(x_i, y_i)$ com as seguintes condições para todo i:

$$p(x_i, y_i) \geq 0$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1 \tag{11}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 1 – Considere duas sondas com diferentes metodologias de trabalho perfurando poços em Libra. Suponha que a sonda I tenha capacidade de perfurar cinco poços a cada 90 dias e a sonda II tenha capacidade de perfurar três poços no mesmo intervalo de tempo. Admita que o número de poços perfurados em 90 dias

seja uma variável aleatória, e que (x, y) seja a variável aleatória bidimensional que informa, respectivamente, o número de poços da sonda I e da sonda II conforme Tabela 1 a seguir:

Tabela 1 – Probabilidade da variável aleatória

(x, y)		x (sonda I)					
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y (sonda II)	0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
	1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
	2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
	3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Qual a probabilidade de que, em 90 dias, a sonda I perfure mais poços que a sonda II?

Solução

Observe que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 0{,}00 + 0{,}01 + 0{,}03 + \ldots + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}05 = 1, \tag{12}$$

o que demostra que os dados da Tabela 1 representam uma distribuição de probabilidade discreta. A probabilidade de que em 90 dias a sonda I perfure mais poços que a sonda II é o somatório das ocorrências da variável aleatória (x, y) onde x (número de poços da sonda I) > y (número dos poços da sonda II), portanto:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) \text{ para } i > j = 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}05 + \cdots + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}75 \Leftrightarrow 75\% \tag{13}$$

▪▪▪▪▪▪

2.3.2. Variável aleatória contínua de duas dimensões

Definição: seja (x, y) uma variável aleatória contínua bidimensional tomando todos os valores de uma região R do plano euclidiano. A *f dp* conjunta é uma função que satisfaz as seguintes condições:

$$f(x, y) \geq 0$$
$$\iint_{\mathrm{R}} f(x, y)dxdy = 1 \tag{14}$$

Definição: seja (x, y) uma variável aleatória bidimensional. A função de distribuição acumulada F da variável aleatória bidimensional é definida por:

$$\mathrm{F}(x, y) = p(\mathrm{X} \leq x,\ \mathrm{Y} \leq y) \tag{15}$$

Observe que, se F é a função de distribuição acumulada da variável aleatória bidimensional com *f dp* igual a $f(x, y)$, então:

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) \tag{16}$$

sempre que F for derivável.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 2 – Suponha que a produção diária de óleo do reservatório do campo de Mero seja realizada com injeção de CO_2 e água (WAG). Admita que a produção diária seja uma variável aleatória contínua que dependa dessas duas características e que, para outra condição qualquer, a produção é zero. A capacidade mínima e máxima de injeção de CO_2 é de 0 a 1 (milhões de m^3/dia) e a capacidade mínima e máxima de água é de 0 a 2 (milhões de m^3/dia). Admita que a *f dp* da produção diária do óleo seja dada pela equação a seguir:

$$f(v,a) = v^2 + \frac{v \cdot a}{3} \tag{17}$$

onde v e a são as vazões em milhões de m^3/dia de CO_2 e água, respectivamente. Pede-se

(a) Demonstre que a *fdp* da produção diária atende à segunda condição da Eq. (14), e

(b) Qual a probabilidade de ocorrência de produção de óleo sob a condição $v + a \geq 1$ milhão de m^3/dia?

Solução

Aplicando a função em (17) na segunda condição da Eq. (14), resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^2\int_0^1 \left(v^2 + \frac{v \cdot a}{3}\right) dvda \tag{18}$$

Resolvendo, retorna

$$\int_0^2\int_0^1 \left(v^2 + \frac{v \cdot a}{3}\right) dvda = \int_0^2 \frac{v^3}{3} + \frac{v^2 a}{6}\Big|_{v=0}^{v=1} da \tag{19}$$

ou

$$\int_0^2 \frac{v^3}{3} + \frac{v^2 a}{6}\Big|_{v=0}^{v=1} da = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{a}{6}\right) da = \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{12}\Big|_{a=0}^{a=2}. \tag{20}$$

Logo

$$\int_0^2\int_0^1 \left(v^2 + \frac{v \cdot a}{3}\right) dvda = \frac{2}{3} + \frac{4}{12} = 1 \tag{21}$$

Para o cálculo da probabilidade p ($v + a \geq 1$), pode-se proceder com a seguinte expressão:

$$p(v + a \geq 1) = 1 - p(v + a < 1) \tag{22}$$

Observe a área cinza na Figura 3 em que os limites de v e a são tais que $v + a < 1$ (lado esquerdo), bem como seu contradomínio (lado direito).

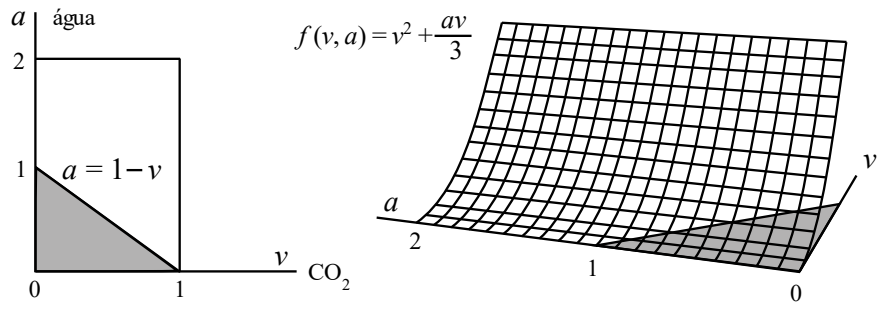


Figura 3 – Domínio para $v + a < 1$ (esquerdo) e contradomínio (direita).

Assim, tem-se que

$$p(v+a\geq 1)=1-\int_0^1\int_0^{1-v}\left(v^2+\frac{v\cdot a}{3}\right)dadv \tag{23}$$

ou

$$p(v+a\geq 1)=1-\int_0^1\left[v^2(1-v)+\frac{v(1-v)^2}{6}\right]dv \tag{24}$$

Logo

$$p(v+a\geq 1)=1-\frac{7}{72}=0{,}9028\Leftrightarrow 90{,}28\% \tag{25}$$

Portanto, de acordo com a *f dp* dada pela Eq. (17), em 90,28% das vezes a produção de óleo se dará com uma injeção conjunta de CO_2 e água acima de 1 milhão de m^3/dia.

▪▪▪▪▪▪

2.3.3. Modelo de regressão linear com três variáveis

Neste item é mostrado um modelo de regressão envolvendo duas variáveis independentes e uma variável dependente. O modelo de três variáveis pode ser escrito conforme a seguir:

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\varepsilon_i \tag{26}$$

e a equação de regressão segue a seguinte equação:

$$\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{i1}+\hat{\beta}_2x_{i2} \tag{27}$$

de onde se deduz o quadrado da função erro, ou seja

$$\sum_i^n\varepsilon_i^2=\sum_i^n(y_i-\hat{y}_i)^2 \qquad \text{ou} \qquad \sum_i^n\varepsilon_i^2=\sum_i^n(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_{i1}-\hat{\beta}_2x_{i2})^2 \tag{28}$$

Os melhores estimadores $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ para os parâmetros desconhecidos são obtidos fazendo com que as derivadas parciais da função erro em relação a esses parâmetros sejam nulas, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_0}\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^2\right)=0; \qquad \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1}\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^2\right)=0; \qquad \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_2}\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^2\right)=0 \tag{29}$$

Combinando a Eq. (27) com as derivadas parciais em (29), resulta o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{i=1}^n\hat{y}_i=n\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^nx_{i1}+\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^nx_{i2} \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^n\hat{y}_i\,x_{i1}=\hat{\beta}_o\sum_{i=1}^nx_{i1}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^nx_{i2}^2+\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^nx_{i1}x_{i2} \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^n\hat{y}_i\,x_{i2}=\hat{\beta}_o\sum_{i=1}^nx_{i2}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^nx_{i1}x_{i2}+\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^nx_{i2}^2 \tag{32}$$

Dividindo a Eq. (30) por , resulta o valor de $\hat{\beta}_0$ em função de $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ e das médias obtidas com os *n* dados observados, ou seja

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \tag{33}$$

Resolvendo o sistema de equações, resultam os seguintes valores para $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{m_{0,1} m_{2,2} - m_{0,2} m_{1,2}}{m_{1,1} m_{2,2} - m_{1,2}^2} \qquad \text{e} \qquad \hat{\beta}_2 = \frac{m_{0,2} m_{1,1} - m_{0,1} m_{1,2}}{m_{1,1} m_{2,2} - m_{1,2}^2} \tag{34}$$

onde

$$m_{0,k} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})\,(x_{ik} - \bar{x}_k), \qquad k = 1,2 \tag{35}$$

$$m_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k), \qquad j, k = 1, 2 \tag{36}$$

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 3 – Um posto de combustível vende gasolina e deseja avaliar a dependência do volume de vendas em relação ao preço praticado e ao gasto mensal em propaganda. O gerente do posto resolve então registrar dez meses seguidos de dados para uma análise de regressão (ver Tabela 2).

Tabela 2 – Dados – Exemplo 3

Observação, i	y_i	x_{i1}	x_{i2}
1	30	5	2,8
2	30	6	2,6
3	32	5	2,7
4	38	4	2,5
5	37	7	2,7
6	43	8	2,8
7	39	6	2,8
8	45	5	2,7
9	46	6	2,6
10	44	8	2,9
Médias	$\bar{y} = 38{,}4$	$\bar{x}_1 = 6$	$\bar{x}_2 = 2{,}71$

onde y_i são as vendas em milhares de litro por mês, x_{i1} é o gasto mensal em milhares em propaganda e x_{i2} é o preço de um litro do combustível. Pede-se construir uma equação linear do tipo apresentado na Eq. (27) e avaliar qual o valor esperado de vendas se o preço praticado for de \$2,8 e o gasto mensal for de \$9 mil.

Solução

Para solução do problema, inicia-se calculando os seguintes termos:

$$m_{0,1} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})\,(x_{i1} - \bar{x}_1) = 28; \qquad m_{0,2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})\,(x_{i2} - \bar{x}_2) = 0{,}96 \tag{37}$$

$$m_{1,1} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 16; \qquad m_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)\,(x_{i2} - \bar{x}_2) = 0{,}9;$$
$$m_{2,2} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 0{,}129 \tag{38}$$

Com esses valores, pode-se calcular os valores de $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$, ou seja:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{m_{0,1}m_{2,2} - m_{0,2}m_{1,2}}{m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}^2} = \frac{28 \times 0{,}129 - 0{,}96 \times 0{,}9}{16 \times 0{,}129 - 0{,}9^2} = 2{,}19 \tag{39}$$

e

$$\hat{\beta}_2 = \frac{m_{0,2}m_{1,1} - m_{0,1}m_{1,2}}{m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}^2} = \frac{0{,}96 \times 16 - 28 \times 0{,}9}{16 \times 0{,}129 - 0{,}9^2} = -7{,}85 \tag{40}$$

Portanto, o valor de $\hat{\beta}_0$ é

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 = 38{,}4 - (2{,}19 \times 6) - (-7{,}85 \times 2{,}71) = 45{,}52 \tag{41}$$

Assim, a equação linear, resultado da regressão dos dados apresentados na Tabela 2, é

$$\hat{y}_i = 45{,}52 + 2{,}19x_{i1} - 7{,}85x_{i2} \tag{42}$$

Utilizando a Eq. (42), pode-se avaliar o valor esperado de vendas se o preço praticado for de \$2,8 e o gasto mensal for de \$9 mil, ou seja:

$$\hat{y}_i = 45{,}52 + 2{,}19 \times 9 - 7{,}85 \times 2{,}8 = 43{,}25 \text{ mil litros.} \tag{43}$$

▪▪▪▪▪▪

2.3.4. Modelo de regressão linear com mais de três variáveis

A maioria dos problemas reais envolve duas ou mais variáveis explanatórias que ditam o comportamento da variável dependente. Por exemplo, o preço do petróleo está associado à demanda pelo produto e, possivelmente, à demanda por energia renovável (substituto) e à produção da OPEP.

Na regressão linear múltipla, assume-se que existe uma relação linear entre uma variável *y* (dependente) e variáveis independentes, x_j ($j = 1,\ldots,k$). A Tabela 3 representa um esquema de uma análise multivariada.

Tabela 3 – Esquema para análise multivariada

Observação, *i*	y_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ik}
1	y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}
...	...	...	...	...	...
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}

e a Eq. (44) expressa o modelo matemático correspondente:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \tag{44}$$

onde β_0 é o intercepto-y, β_k são os coeficientes angulares, k o número de variáveis independentes e ε o erro. Para duas variáveis, o modelo de regressão linear tem como resposta uma reta. Para três implica um plano e para k variáveis resulta um hiperplano.

O tratamento matemático adequado para uma expressão geral de regressão múltipla é feito com uma equação matricial, tal como

$$\mathbf{Y}_{(n\times 1)} = \mathbf{X}_{(n\times k+1)}\boldsymbol{\beta}_{(k+1\times 1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(n\times 1)} \tag{45}$$

onde

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{46}$$

ou na forma de um sistema linear de k equações:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \left(\beta_j x_{ij} + \varepsilon_i\right) \tag{47}$$

Cada observação (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}, y_i) que satisfaça a Eq. (47) forma um sistema linear, cuja solução se dá por meio de regressão linear com uso do MMQ, desde que os pressupostos a seguir sejam verídicos:

- $E(\varepsilon_1) = 0 \rightarrow$ cada erro aleatório é independente e tem distribuição de probabilidade com média zero.
- $Var(\varepsilon_1) = \sigma^2 \rightarrow$ cada erro aleatório tem distribuição de probabilidade com variância σ^2.
- $Cov(\varepsilon_v, \varepsilon_u) = 0 \rightarrow$ a covariância entre dois erros correspondentes a duas observações diferentes quaisquer é zero.

O valor esperado de uma regressão linear múltipla é definido conforme a seguir

$$E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} = \mu_i \tag{48}$$

Assim, estatisticamente, um modelo de regressão linear múltipla é definido conforme a equação a seguir:

$$y_i = \mu_i + \varepsilon_i \tag{49}$$

De acordo com o método de estimação baseado nos mínimos quadrados, os coeficientes desconhecidos, β_0, β_1, ... ,β_k, podem ser estimados da seguinte forma: para cada observação y_i, calcula-se a soma do quadrado da diferença entre a variável y_i e a média desconhecida μ_i, ou seja,

$$SMQ(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i_1} - \beta_2 x_{i_2} - \cdots - \beta_k x_{ik})^2 \tag{50}$$

onde SMQ(β) é a soma dos mínimos quadrados. A Eq. (50) representa um sistema com dimensão $k + 1$ e, de acordo com o MMQ, é possível determinar um hiperplano particular de k-dimensão, isto é, os valores de β_0, β_1, ..., β_k para o qual SMQ(β) é mínimo. Os valores $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ..., $\hat{\beta}_k$ que minimizam o valor SMQ(β) são chamados de estimadores de mínimos quadrados, portanto tem-se que:

$$\text{SMQ}(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i_1} - \hat{\beta}_2 x_{i_2} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2 \tag{51}$$

onde SMQ($\hat{\beta}$) é chamado de soma dos resíduos ou soma dos mínimos quadrados dos estimadores. O cálculo dos valores $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ..., $\hat{\beta}_k$ requer a solução de um sistema linear de equações de $k + 1$ variáveis. A média μ_i pode ser expressa também de forma matricial, ou seja:

$$\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} \tag{52}$$

onde $\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}}$ é uma matriz $(k + 1) \times n$ com k variáveis, denominadas variáveis explanatórias relacionadas às n variáveis dependentes $\mathbf{Y}_i$, e $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $(k + 1)$ de coeficientes a serem estimados. Em geral adota-se a hipótese de aditividade entre a variável dependente $\mathbf{Y}_i$ e $\boldsymbol{\mu}_i$, isto é, $\mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$ com $\text{E}(\varepsilon_i) = 0$ e $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Na estimação de $\boldsymbol{\beta}$, aplica-se o MMQ que consiste em minimizar a equação a seguir:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)^2 = \text{Erro}(\beta) \tag{53}$$

É interessante ressaltar que o MMQ não requer qualquer hipótese sobre a distribuição dos componentes do vetor $\mathbf{Y}_{(n\times 1)}$. Note também que o erro é função dos parâmetros a serem determinados, pois

$$\text{SMQ}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \tag{54}$$

ou

$$\text{SMQ}(\beta) = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \tag{55}$$

Para estimar $\boldsymbol{\beta}$, minimiza-se então a função Erro(β) da Eq. (53). Assim, no ponto de mínimo, as derivadas parciais da função em relação aos parâmetros desconhecidos devem ser nulas:

$$\frac{\partial \text{Erro}(\beta)}{\partial \beta_r} = 0 \qquad r = 0,1,2,\ldots,k \tag{56}$$

As derivadas parciais da Eq. (56) produzem um sistema com $k + 1$ equações lineares. A notação matricial desse sistema é descrita conforme a seguir:

$$\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{Y}_i \tag{57}$$

Considerando que a matriz $\mathbf{X}_i$ tem posto completo, então $\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_i$ tem inversa e a solução do sistema linear obtida da Eq. (57) é única. Portanto, a solução que corresponde ao estimador de mínimos quadrados é dada por:

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_i\right]^{-1} \left[\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}_i\right] \tag{58}$$

O estimador da Eq. (58) tem as seguintes propriedades: (*i*) Minimiza a função erro da Eq. (53) independentemente da distribuição dos erros, (*ii*) Os componentes do vetor são funções lineares das observações e são estimadores não viesados de menor variância dos parâmetros em $\boldsymbol{\beta}$.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 4 – A taxa de perfuração em poços de petróleo é função do peso da coluna de perfuração, da rotação da broca e da vazão do fluido de perfuração (ver observações empíricas na Tabela 4).

Tabela 4 – Observações – Exemplo 4

Observação	Taxa, T	Peso, W	Rotação, N	Vazão, Q
	m/h	*kgf*	*rpm*	*gpm*
1	2,13	20	120	500
2	3,35	32	80	450
3	1,32	26	50	300
4	2,20	28	60	600
5	3,35	22	160	550
6	1,71	36	30	450
7	2,46	26	90	400
8	2,94	24	120	500
9	2,65	24	100	600
10	2,02	26	70	450
11	2,14	26	80	350
12	1,75	18	120	500
13	2,77	30	80	350
14	2,23	26	80	400

A Eq. (59) a seguir representa um modelo hipotético utilizado para determinar a taxa:

$$\mathrm{T} = k \times \mathrm{W}^{\alpha} \times \mathrm{N}^{\beta} \times \mathrm{Q}^{\gamma} \tag{59}$$

onde T é a taxa (*m*/*h*), W é o peso sobre a broca (*kgf*), a rotação da broca (*rpm*), Q a vazão do fluido de perfuração em galões por minuto (*gpm*) e *k* uma constante de transformação de unidades. Determine, com base nas observações da Tabela 4, os parâmetros α, β e λ do modelo da Eq. (59), utilizando-se do MMQ para uma regressão linear com múltiplas variáveis.

Solução

Note que o modelo da Eq. (59) se torna linear ao ser aplicado o logaritmo nos dois lados da equação, resultando:

$$\log \mathrm{T} = \log k + \alpha \log \mathrm{W} + \beta \log \mathrm{N} + \lambda \log \mathrm{Q} \tag{60}$$

semelhante ao sistema linear da Eq. (44). A Tabela 5 a seguir representa o logaritmo dos dados da Tabela 4.

Tabela 5 – Observações – Exemplo 4

Observação	logT	logW	logN	logQ
1	0,328	1,301	2,079	2,699
2	0,525	1,505	1,903	2,653
3	0,121	1,415	1,699	2,477
4	0,342	1,447	1,778	2,778
5	0,525	1,342	2,204	2,740
6	0,233	1,556	1,477	2,653
7	0,391	1,415	1,954	2,602
8	0,468	1,380	2,079	2,699
9	0,423	1,380	2,000	2,778
10	0,305	1,415	1,845	2,653
11	0,330	1,415	1,903	2,544
12	0,243	1,255	2,079	2,699
13	0,442	1,477	1,903	2,544
14	0,348	1,415	1,903	2,602

Em notação matricial tem-se o seguinte sistema:

$$\mathbf{Y}_{(12\times1)} = \mathbf{X}_{(12\times k+1)}\boldsymbol{\beta}_{(k+1\times1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(12\times1)} \tag{61}$$

onde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}328 \\ 0{,}525 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0{,}348 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}301 & 2{,}079 & 2{,}699 \\ 1 & 1{,}505 & 1{,}903 & 2{,}653 \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ 1 & 1{,}415 & 1{,}903 & 2{,}602 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \log k \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{62}$$

A solução corresponde ao estimador de mínimos quadrados, que é dado pela Eq. (58), e quando aplicado ao Exemplo 4 resulta a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\beta}_{4\times1} = \left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{4\times12}\mathbf{X}_{12\times4}\right]^{-1}_{4\times4}\left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{4\times12}\mathbf{Y}_{12\times1}\right]_{4\times1} \tag{63}$$

Com a ajuda de uma planilha eletrônica ou um *software* como o Matlab, determina-se a matriz dos estimadores **β,** ou seja:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \log k \\ \mathrm{K}\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}731 \\ 1{,}824 \\ 0{,}907 \\ 0{,}296 \end{bmatrix} \tag{64}$$

que resulta $k = 0{,}00001858$. Com isso, o modelo para determinar a taxa de penetração de perfuração em poços de petróleo segue a expressão

$$\log \mathrm{T} = -4{,}731 + 1{,}824 \log \mathrm{W} + 0{,}907 \log \mathrm{N} + 0{,}296 \log \mathrm{Q} \tag{65}$$

▪▪▪▪▪▪

3

ANEXO – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Nunca tenha certeza de nada, porque a sabedoria começa com a dúvida.
Sigmund Freud

Com base em Dixit e Pindyck (1994) e Hamilton (1994), um processo estocástico é uma variável que depende do tempo e no mínimo parte dela tem comportamento aleatório. A temperatura da cidade de São Paulo[86] é um exemplo, a variação é parcialmente determinística (sobe durante o dia e cai durante a noite, também sobe durante o verão e cai durante o inverno) e é parcialmente imprevisível. Os preços das ações nos pregões são bons exemplos, flutuam de forma aleatória, mas no longo prazo apresentam, em geral, taxas positivas de valorização.

Formalmente, um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade de evolução de uma variável como função do tempo *t*. Para os tempos $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$, pode-se calcular as probabilidades dos valores correspondentes ocorrerem dentro de um determinado range. Um dos mais simples processos estocásticos de tempo discreto é chamado de passeio aleatório, *randon walk*. Nesse processo, a variável no tempo t_0 inicia com um valor x_0 e no tempo $t = 1,2, \ldots, n$ salta uma unidade para cima ou para baixo com probabilidade 0,5 cada. Como os saltos são independentes para qualquer direção, pode-se descrever a dinâmica de x_t conforme a seguir:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

onde ε_t é uma variável aleatória com probabilidade de distribuição

$$p(\varepsilon_t = 1) = p(\varepsilon_t = -1) = 0{,}5 \qquad (t = 1,2,3,\ldots). \tag{2}$$

Por exemplo, para valores ímpares de *t*, os possíveis valores de x_t são (-*t*, … -1,1, … *t*) e para valores pares de *t*, os possíveis valores de x_t são (-*t*, … -2,0,2, …*t*). A distribuição de probabilidade para x_t pode ser obtida a partir da distribuição binomial. Para *t* passos, a probabilidade de ocorrer *n* saltos para baixo e *t* - *n* saltos para cima é:

$$\binom{t}{n} 2^{-t} \tag{3}$$

Portanto, a probabilidade da variável x_t tomar o valor *t* - 2*n* no tempo *t* é:

$$p(x_t = t - 2n) = \binom{t}{n} 2^{-t} \tag{4}$$

Essa distribuição é usada para derivar o processo de Wiener. Note que o range de valores possíveis para x_t pode crescer com *t*, assim como a variância de x_t. Portanto, x_t é um processo não estacionário. Como a probabilidade do salto para cima ou para baixo é de 0,5 no tempo $t = 0$, o valor esperado de x_t é zero para todo *t*.

Uma forma de generalizar esse processo é mudando a probabilidade dos saltos. Considere que o salto para cima seja *p* e para baixo seja $q = 1 - p$ com $p > q$. Agora o processo é de passeio aleatório com deriva, *drift*. Outra maneira é fazer com que o tamanho do salto, para cada passo de tempo , seja uma variável contínua. Por exemplo, o tamanho de cada salto ter distribuição normal com média zero e desvio padrão σ. Assim, tem-se

[86] Pode-se argumentar que a falta de previsibilidades da temperatura seja uma limitação da meteorologia, e que em princípio poderia ser eliminada com um sofisticado e apurado modelo meteorológico. No entanto, do ponto de vista operacional, pode-se afirmar que a temperatura, no próximo mês, em São Paulo, ainda é imprevisível.

um processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto. Outro exemplo de um processo estocástico de estado contínuo e tempo discreto é o processo autorregressivo de primeira ordem, abreviado por AR(1). Esse processo é definido pela seguinte equação:

$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \xi_t \tag{5}$$

onde δ e ρ são constantes, com $-1 < \rho < 1$, sendo ξ uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero. Tal processo é estacionário, e x_t tem um valor esperado de longo tempo igual a $\delta/(1 - \rho)$, independentemente do valor corrente. Esse valor é obtido fazendo $x_t = x_{t-1} = x_t$ na Eq. (5) e resolvendo para x. O processo AR(1) é um processo de reversão à média, pois x_t tende a reverter para seu valor esperado de longo prazo.

Todos os processos de passeio aleatório, sejam de estado contínuo ou discreto, com ou sem deriva, satisfazem à propriedade de um processo de Markov, portanto, são chamados de processos markovianos. Essa propriedade diz que a distribuição de probabilidade de x_{t+1} depende somente de x_t, independentemente do que tenha ocorrido antes do tempo t.

3.1. Processos de Wiener

Um processo de Wiener, também chamado de movimento browniano, é um processo de tempo contínuo com três propriedades:

- É um processo de Markov – o que implica dizer que o valor corrente tem a informação suficiente para a melhor previsão do valor futuro.
- O incremento é independente – significa que as distribuições de probabilidade dos choques da variável, em qualquer intervalo de tempo, são independentes, e
- Os choques no processo, em qualquer intervalo finito de tempo, são normalmente distribuídos, com variância crescendo linearmente com o tempo.

Devido às propriedades desse processo, é natural que se questione se de fato existem modelos realísticos que se comportem como um processo de Wiener. Por exemplo, embora seja provável que as variações do preço de um ativo financeiro satisfaçam a propriedade de um processo de Markov e tenham incrementos independentes, não é razoável assumir que tais variações sejam normalmente distribuídas, afinal, o preço de um ativo nunca é menor do que zero. É mais razoável assumir que as variações dos preços tenham distribuição lognormal, isto é, que o logarítmico das variações tem distribuição normal. Em outras palavras, é mais razoável modelar o logaritmo do preço do que o preço em si mesmo como um processo de Wiener.

É importante descrever as propriedades de um processo de Wiener com mais formalidade. Se $z(t)$ é um processo de Wiener, qualquer variação Δz de z correspondente a um intervalo de tempo Δt satisfaz as seguintes condições:

- A relação entre Δz e Δt é dada pela seguinte equação:

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \tag{6}$$

  onde ε é uma variável aleatória distribuída normalmente com média zero e desvio padrão 1, N(0,1).

- A variável aleatória é não correlacionada, isto é, o valor esperado $E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$ para $t \neq s$. Portanto os valores de Δz para quaisquer dois intervalos diferentes de tempo são independentes. Isso significa dizer que $z(t)$ segue um processo de Markov com incrementos independentes.

É interessante examinar o que essas duas condições implicam nas variações de z em um intervalo finito de tempo T. Pode-se dividir esse intervalo em unidades de tempos Δt, ou seja, $n = T/\Delta t$. Assim, a variação de z nesse intervalo é dada por:

$$z(t + T) - z(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{7}$$

com ε_i independente. Portanto, pode-se aplicar o *teorema do limite central* para essa soma e afirmar que as variações $z(t + T) - z(t)$ são normalmente distribuídas com média zero e variância $n\Delta t = T$. A variância das mudanças de uma variável em um processo de Wiener cresce linearmente com o tempo. Note também que o processo de Wiener é não estacionário. Tomando valores infinitesimais de Δt, pode-se representar o incremento de um processo de Wiener em tempo contínuo como

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \tag{8}$$

Uma vez que ε_i tem média zero e desvio padrão 1, o valor esperado $E(dz) = 0$ e $Var(dz) = E[(dz)^2] = dt$. Note que não há derivada convencional do tempo, pois $\Delta z/\Delta t = \varepsilon_t(\Delta t)^{-1/2}$ e sua derivada seria infinita quando Δt tende para zero.

3.2. Movimento Browniano – Passeio Aleatório

O processo de Wiener pode ser generalizado para um processo mais complexo. O processo mais simples de Wiener é o movimento browniano com deriva, *drift*, em que

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \tag{9}$$

onde *dz* é o incremento de Wiener. Na Eq. (9), é chamado de parâmetro do *drift* e é o parâmetro da variância. Note que para qualquer intervalo Δt, a variação de x, denotado por Δx, é normalmente distribuída, com valor esperado $E(\Delta t) = \alpha\Delta t$ e variância $Var(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$.

A Eq. (9) pode ser derivada a partir do limite contínuo de um processo de passeio aleatório de tempo discreto. Para fazer isso, se divide o tempo em períodos discretos Δt, assumindo que a variável, em cada período, pode ascender ou descender de Δh. A probabilidade para que a variável aumente Δh é p e que diminua Δh é $q = 1 - p$. Algumas amostras de x para cada um dos três períodos estão indicadas na Figura 1.

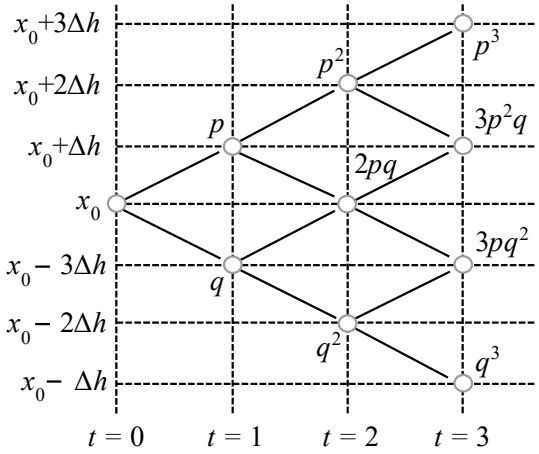


Figura 1 – Representação do MB por meio de um passeio aleatório.

Note que o processo descrito na Figura 1 é um processo de Markov com incrementos independentes. A distribuição de probabilidade dos valores futuros depende somente do valor corrente, e a probabilidade de a variável ascender ou descender em cada período é independente do que tenha ocorrido antes. Examinando a distribuição para o valor futuro de x, deduz-se que a média de Δx é $E(\Delta x) = (p - q)\Delta h$. Também, segue que

$$E[(\Delta x)^2] = p(\Delta h)^2 + q(-\Delta h)^2 = (\Delta h)^2 \tag{10}$$

e

$$Var[\Delta x] = E[(\Delta x)^2] - (E[\Delta x]^2) = [1 - (p - q)^2](\Delta h)^2 = 4pq(\Delta h)^2 \tag{11}$$

Um intervalo de tempo t tem $n = t/\Delta t$ passos de tempos discretos. Como os sucessivos passos no passeio aleatório são independentes, uma variação acumulada $(x_t - x_0)$ é uma variável aleatória binomial com média

$$n(p-q)\Delta h = t(p-q)\Delta h/\Delta t \tag{12}$$

e variância

$$n[1-(p-q)^2](\Delta h)^2 = 4pqt(\Delta h)^2/\Delta t \tag{13}$$

respectivamente.

Lembrando que uma série independente de *n* tentativas, em que o sucesso é representado por 1 com probabilidade de ocorrência *p* e o insucesso é representado por 0 com probabilidade $q = 1 - p$, tem distribuição binomial com média *np* e variância *npq* Até aqui as probabilidades *p* e *q* e os incrementos Δh e Δt foram escolhidos de forma arbitrária. Ao fazer tender para zero, é necessário que a média e variância de $(x_t - x_0)$ se mantenham inalteradas independentemente das escolhas de *p*, Δh e Δt. Isso é possível adotando-se as seguintes relações:

$$\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t} \tag{14}$$

e

$$p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right] \qquad \text{e} \qquad q = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right] \tag{15}$$

ou

$$p - q = \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t} = \frac{\alpha}{\sigma^2}\sqrt{\Delta h} \tag{16}$$

Substituindo as expressões de Δh e $p - q$ nas Eqs. (12) e (13), e tomando valores infinitesimais de Δt para qualquer valor finito de *t*, o número de passos *n* tende para o infinito e converge para uma distribuição normal com média

$$t\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\frac{\Delta h}{\Delta t} = \alpha t \tag{17}$$

e variância

$$t\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2 \Delta t\right]\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta t} = \sigma^2 t \tag{18}$$

Esses são os valores necessários para o movimento browniano, em que α é o *drift* e σ^2 é a variância por unidade de tempo. Uma propriedade interessante do movimento browniano é que quando $\Delta t \to 0$, a distância total percorrida pela variável para qualquer intervalo finito de tempo se torna infinita. Isso decorre da relação entre Δh e Δt. Como $|\Delta x| = \Delta h$, segue que $E(|\Delta x|) = \Delta h$ Então o total esperado do percurso da variável em um intervalo *t* é

$$n\Delta h = t\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}} \tag{19}$$

que resulta infinito quando $\Delta t \to 0$. Também $\Delta x/\Delta t \to \pm\infty$ dependendo se $\Delta x = +\Delta h$ ou $-\Delta h$. Em uma amostra do movimento browniano existem muitos percursos ascendentes e descendentes de formas irregulares e, tal como, não há diferenciabilidade. A derivada *dx*/*dt* não existe e não se pode definir E(*dx*/*dt*), embora E(*dx*) em geral exista e seja igual a (1/*dt*)E(*dx*).

3.2.1. Martingale

Um *martingale*, em teoria de probabilidade, é um modelo de jogo honesto (*fair game*) em que o conhecimento dos eventos passados não ajuda a prever ganhos futuros, e apenas o evento atual importa. Em particular, um martingale é também um processo estocástico. Uma sequência de variáveis aleatórias $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é um

martingale de tempo discreto se $E(x_n) < \infty$ e $E(x_{n+1} \mid x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_n$. Isto é, o valor esperado condicional da próxima observação, dadas todas as observações anteriores, é igual à mais recente observação.

3.3. Movimento Browniano Generalizado – Processos de Itô

O processo de Wiener serve para representar uma vasta gama de processos aleatórios. Os processos indicados aqui são casos especiais do movimento browniano generalizado com *drift*, cuja equação é

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{20}$$

onde *dz*, novamente, é o incremento do processo de Wiener e $a(x,t)$ e $b(x,t)$ são funções não aleatórias conhecidas. Note que o *drift* e o coeficiente da variância são funções do tempo. O processo contínuo definido na Eq. (20) é chamado de processo de Itô.

Considere a média e variância desse processo. Uma vez que $E(dz) = 0$ e $E(dx) = a(x,t)dt$ a variância de *dx* é igual a $E[dx^2] - E[dx]^2$, a qual contém termos *dt*, $(dt)^2$ e termos de ordem $(dt)^{3/2}$. Para um *dt* infinitesimal, os termos em $(dt)^2$ e $(dt)^{3/2}$ podem ser ignorados e a variância resulta

$$\mathrm{Var}[dx] = b^2(x,t)dt \tag{21}$$

O termo $a(x,t)$ refere-se à taxa instantânea esperada e o termo $b^2(x,t)$ refere-se à taxa de variância instantânea. Por exemplo, em finanças, a variável temporal pode representar o preço de um ativo, uma *commodity*, um índice de mercado ou outras variáveis econométricas de interesse da análise de projetos de produção de petróleo.

3.3.1. Movimento aritmético browniano, MAB

A partir da generalização em (20), pode-se extrair casos especiais. No MAB, por exemplo, os parâmetros de tendência e de variância são constantes. Assim, substituindo $a(x,t) = \alpha$ e $b(x,t) = \sigma$ na Eq. (20), resulta

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \tag{22}$$

onde a esperança e a variância do incremento *dx* são, respectivamente

$$\mathrm{E}(dx) = \mathrm{E}(\alpha dt + \sigma dz) = \alpha dt \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(dx) = \mathrm{E}(dx) - [\mathrm{E}(dx)]^2 = \sigma^2 dt \tag{23}$$

Como se vê, tanto a esperança do incremento como sua variância são funções do tempo. É interessante, não obstante a simplicidade do modelo, fazer uma aplicação para melhor entendimento. Suponha que se deseje representar o comportamento *mensal* de um índice qualquer da B3 por meio de um processo do tipo MAB, cuja média dos retornos *anuais* seja $\alpha = 15\%$ com desvio padrão $\sigma = 20\%$. Nesse caso, tem-se o modelo MAB:

$$dx = \overbrace{0{,}15dt + 0{,}20\varepsilon_t\sqrt{dt}}^{dt=anual} = \overbrace{0{,}0125 + 0{,}0577\varepsilon_t}^{dt=1\ mês} \Leftrightarrow x_t = x_{t-1} + 0{,}0125 + 0{,}0577\varepsilon_t \tag{24}$$

onde $0{,}0125 = 0{,}15\times(1/2)$ e $0{,}0577 = 0{,}20\times\sqrt{(1/12)}$. Para um tempo *t* qualquer, o valor estimado $\hat{x}_{t_0+t}$ é dado pela equação:

$$\hat{x}_{t_0+t} = x_{t_0} + 0{,}0125t \tag{25}$$

Note-se que o valor esperado para a trajetória do processo é, nesse caso, uma reta com coeficiente angular igual a 0,0125.

3.3.2. Movimento geométrico browniano, MGB

No caso do MGB, os parâmetros de tendência e de variância são funções de *x*. O mais simples MGB é substituindo $a(x,t) = \alpha x$ e $b(x,t) = \sigma x$ na Eq. (20), resultando

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \tag{26}$$

O percentual de variação de x, $\Delta x/x$, é normalmente distribuído. Já as variações expressas em logaritmo natural de x, variações absolutas de x e Δx têm distribuição lognormal. Por exemplo, se $x(t)$ é dado pela Eq. (26), então $F(x) = \ln x$ é um movimento browniano simples com *drift*, e

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \tag{27}$$

Portanto, sobre um intervalo finito de tempo t, as variações de x em termos de logaritmo são normalmente distribuídas com média e variância respectivamente,

$$\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad \text{e} \qquad \sigma^2 \tag{28}$$

Para a variável $x(t)$ pode ser demonstrado que se o valor corrente de $x(0) = x_0$, então o valor esperado de $x(t)$ é dado por

$$\mathrm{E}[x(t)] = x_0 e^{\alpha t} \tag{29}$$

e a variância

$$\mathrm{Var}[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \tag{30}$$

O resultado da esperança do MGB pode ser usado para o cálculo do valor presente esperado descontado sobre um período. Por exemplo, note que

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt}dt\right] = \int_0^\infty x_0 e^{-(r-\alpha)t}dt = x_0/(r-\alpha) \tag{31}$$

fornece o valor presente de $x(t)$ a uma taxa de desconto que excede a taxa de crescimento α. Esse procedimento é usado quando é necessário calcular o valor presente descontado de um fluxo de caixa de rendimentos que segue um movimento geométrico browniano.

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 1 – Tomando as amostras mensais do IBOVESPA na B3 de janeiro de 1995 a dezembro de 2012, cuja média dos retornos é $\alpha = 1{,}17\%$ *a.m.* e desvio padrão $\sigma = 9{,}58\%$ *a.m*, faça a previsão do índice para dezembro de 2012 com base no valor de janeiro de 1995, considerando que o índice segue um processo tipo MGB.

Solução

Aplicando os dados do enunciado na Eq. (26), resulta

$$dx = 0{,}0117x_{t-1}dt + 0{,}0958x_{t-1}\varepsilon_t\sqrt{dt} \tag{32}$$

Tomando dt igual a um mês, chega-se a

$$x_t = x_{t-1} + 0{,}0117x_{t-1} + 0{,}0958x_{t-1}\varepsilon_t \tag{33}$$

Assim, conforme Eq. (29), o valor esperado de x_t com base em x_0 (janeiro de 1995) é

$$\hat{x}_{1995+t} = x_{1995}e^{0{,}0117t} \quad \text{ou} \quad \hat{x}_{1995+t} \cong (1{,}0117)^t x_{1995} \tag{34}$$

em que t é dado em meses. A previsão do índice para dezembro de 2012 seria igual a $(1{,}0117)^{216} \times 4.319{,}1 = 53.280{,}9$. A título de informação, o IBOVESPA, em dezembro de 2012, estava em 58.280,9 pontos.

Para estimar um valor dentro de um intervalo de confiança de 68,26%, segue a equação

$$x_{1995}e^{\alpha t} \pm \sqrt{x_{1995}^2 e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1)} \quad \text{ou} \quad x_{1995}e^{\alpha t}\left(1 \pm \sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1}\right) \tag{35}$$

resultando, aproximadamente

$$x_{1995}e^{\alpha t}(1 \pm \sigma^2\sqrt{t}) \tag{36}$$

Mantido o comportamento do IBOVESPA para os próximos 20 anos (240 meses) similar ao período de 01/1995 a 12/2012, o valor de $1 aplicado nesse índice tem uma probabilidade de 68,26% de estar entre

$$e^{0,0117(240)}\left(1 - 0,0958^2\sqrt{240}\right) \quad \text{e} \quad e^{0,0117(240)}(1 + 0,0958^2\sqrt{240}) \tag{37}$$

ou seja, entre $14,22 e $18,93. Apenas para efeito de comparação, desconsiderando a inflação, $1 aplicado a 0,5% *a.m.* durante 20 anos resulta $3,31.

▪▪▪▪▪▪

3.3.3. MGB com reversão à média, MRM

A tendência do MGB é afastar-se do ponto inicial. De fato, é um processo estocástico compatível com algumas variáveis econométricas, como por exemplo, os preços de algumas *commodities*. Pode-se argumentar que, embora o preço do óleo possa sofrer variações no mercado internacional, no longo prazo o preço tende ao seu custo marginal[87]. Os dois processos de reversão à média que se tornaram populares são o de Uhlenbeck e Ornstein (1930) e o de Cox, Ingersoll e Ross (1985b), cujas expressões são:

$$dx = \overbrace{\eta(\bar{x} - x_{t-1})dt + \sigma dt}^{\text{Uhlenbeck e Ornstein}} \quad \text{e} \quad dx = \overbrace{\eta(\bar{x} - x_{t-1})dt + \sigma x_{t-1}^{\alpha} dt}^{\text{Cox, Ingersoll e Ross}} \tag{38}$$

onde η é a velocidade da reversão, α é um fator de elasticidade maior ou igual a 0,5 e $\bar{x}$ é o nível normal da variável *x*, isto é, o nível para o qual *x* tende alcançar. Note-se que a variação esperada de *x* depende da diferença entre $\bar{x}$ e x_{t-1}. Portanto, embora esse processo satisfaça ao menos uma propriedade de um processo markoviano, os incrementos não são independentes. Para o modelo de Uhlenbeck e Ornstein, o valor esperado e a variância em qualquer tempo T são:

$$\mathrm{E}(x_T) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta \mathrm{T}} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta \mathrm{T}}) \tag{39}$$

onde T = $t - t_0$. À medida que o tempo cresce, o valor esperado de x_t converge para $\bar{x}$, ou seja:

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \mathrm{E}(x_{\mathrm{T}}) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{e^{\eta \mathrm{T}}} = \bar{x} \tag{40}$$

e a variância tende para

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \mathrm{Var}(x_{\mathrm{T}}) = \frac{\sigma^2}{2\eta} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} (1 - e^{-2\eta \mathrm{T}}) = \frac{\sigma^2}{2\eta} \tag{41}$$

Quando a velocidade de reversão tende para ∞, resulta

$$\lim_{\eta\to\infty} \mathrm{Var}(x_{\mathrm{T}}) = \lim_{\eta\to\infty} \frac{\sigma^2}{2\eta} \times \lim_{\eta\to\infty} (1 - e^{-2\eta \mathrm{T}}) = 0 \times (1 - 0) = 0 \tag{42}$$

e quando tende para 0, tem-se que

$$\lim_{\eta\to 0} \mathrm{Var}(x_{\mathrm{T}}) = \lim_{\eta\to 0} \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta \mathrm{T}}) = \lim_{\eta\to 0} \frac{\sigma^2}{2\eta}(2\eta \mathrm{T}) = \sigma^2 \mathrm{T} \tag{43}$$

[87] É comum adotar como nível normal para a *commodity* petróleo o custo marginal de longo prazo. Não obstante, é importante observar que o preço marginal de cada país produtor difere substancialmente da cotação internacional, uma vez que o CAPEX e o OPEX são diversificados em função das condições geológicas de cada jazida.

3.4. Lema de ITÔ

Este lema, algumas vezes chamado de *teorema fundamental do cálculo estocástico*, é um importante resultado que permite diferenciar e integrar funções de processos estocásticos. O Lema de Itô é o análogo da regra da cadeia do cálculo elementar, mas aplicado ao cálculo estocástico. Sua expressão, amplamente explorada em finanças, é obtida a partir da expansão de uma série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior. Assim, expandindo F(*V,t*) em uma série de Taylor em V e *t*, tem-se que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dV^2 + \cdots \tag{44}$$

Por exemplo, para Black e Scholes uma das premissas é que a variação *d*V do valor de uma ação siga um processo estocástico de Itô conforme a seguir:

$$dV = \alpha dt + \sigma dz \tag{45}$$

onde α representa o retorno médio esperado em um intervalo curto de tempo (tendência) e σ é a volatilidade da ação nesse intervalo. Substituindo *d*V da Eq. (45) na Eq. (44), resulta

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V}(\alpha dt + \sigma dz) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}(\alpha^2 dt^2 + 2\alpha\sigma dt dz + \sigma^2 dz^2) + \cdots \tag{46}$$

À medida que *dt* tende a zero, os termos dt^2 e *dtdz* tendem a zero mais rapidamente que dz^2. Desprezando-se os termos diferenciais de ordem superior, e considerando que é possível provar[88] que dz^2 tende para *dt*, resulta o teorema fundamental do cálculo estocástico (Lema de Itô) aplicado ao processo da Eq. (45):

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma^2\right) dt + \frac{\partial F}{\partial V}\sigma dz \tag{47}$$

Note-se que *d*V pode ser função de V. Em um processo MGB (movimento geométrico browniano), por exemplo, $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$. Portanto, a Eq. (47) fica reescrita como

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\alpha V + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}V^2\sigma^2\right) dt + \frac{\partial F}{\partial V}\sigma V dz \tag{48}$$

Por exemplo, se F = lnV, resulta que

$$\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{V}; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = -\frac{1}{V^2}; \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{49}$$

Substituindo esses resultados na Eq. (48), obtém-se

$$dF = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \tag{50}$$

Assim, em um intervalo de tempo *dt*, a variação *d*F é $\ln V_t - \ln V_0 = \ln V_t / V_0$. Logo, a equação

$$V_t = V_0 e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz} \tag{51}$$

expressa o valor da ação.

[88] A demonstração desse fato está além do objetivo deste livro.

3.5. Processos com Saltos de Poisson

Até aqui foram considerados apenas os processos estocásticos contínuos. No entanto, em algumas situações é interessante modelar uma variável econômica como um processo contínuo com saltos discretos. O preço do petróleo, por exemplo, é afetado por eventuais conflitos em países produtores da OPEP ou pelo aumento significativo da demanda em função do clima do hemisfério norte, entre outros.

Definindo λ como a taxa média de ocorrência de um evento durante um intervalo de tempo infinitesimal Δt, a probabilidade de que o evento ocorra é $\lambda\Delta t$ e a probabilidade de não ocorrência é $1 - \lambda\Delta t$. O evento é um salto de tamanho u, que pode ser uma variável aleatória. Definindo q um processo de Poisson por analogia com o processo de Wiener, então

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } 1 - \lambda\Delta t \\ 1 & \text{com probabilidade } \lambda\Delta t \end{cases} \tag{52}$$

O processo estocástico para a variável x pode ser escrito como uma equação diferencial de Poisson, que corresponda à equação do processo de Itô, ou seja:

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dq \tag{53}$$

onde $f(x,t)$ e $g(x,t)$ são funções não aleatórias conhecidas.

3.6. Barreira de Distribuição de Longo Termo

Suponha que uma variável x siga um MB simples e inicie em x_0. Assim, no tempo t tem-se uma distribuição normal com média $x_0 + \alpha t$ e variância $\sigma^2 t$. Considere agora uma restrição do processo em que o valor x não cruze determinada barreira $\bar{x}$ superior a x, ou seja, se o valor x inicia em $\bar{x} - \Delta h$ e a variável tente ultrapassar o valor de barreira com um passo, ela retorna imediatamente para $\bar{x} - \Delta h$. Já um passo $\bar{x} - 2\Delta h$ é permitido sem nenhuma interferência.

De forma similar, pode-se estabelecer uma barreira de reflexo inferior ao valor de x. Em aplicações econômicas, essas barreiras podem ocorrer devido aos mecanismos de equilíbrio de mercado, por exemplo, quando x representa o preço de uma *commodity* sujeita a uma barreira de valor a partir da qual novas firmas entram para disputar o mercado.

Aqui é analisado o que ocorre com a variável que segue esse processo no longo tempo. Devido ao processo de Markov, a influência do valor inicial desaparece no longo prazo quando uma das barreiras é alcançada. À medida que o movimento da variável retorna e avança entre duas barreiras, espera-se que a variável se estabeleça no longo prazo em um processo estacionário, cuja distribuição de probabilidade é denotada por .

Considere três pontos adjacentes: $x - \Delta h$, x e $x + \Delta h$. Em qualquer intervalo de tempo pequeno Δt, a função densidade de probabilidade $\phi(x - \Delta h)$ move para cima com probabilidade p e $\phi(x + \Delta h)$ move para baixo com probabilidade q, onde p e q são dados pela Eq. (15). Como a distribuição é estacionária, segue que

$$\phi(x) = p\phi(x - \Delta h) + q\phi(x + \Delta h) \tag{54}$$

Substituindo p e q da Eq. (15) na Eq. (54) e expandindo o lado direito de acordo com o teorema de Taylor, resulta

$$\phi(x) = \phi(x) - \frac{\alpha}{\sigma^2}(\Delta h)^2\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x) + \cdots \tag{55}$$

Omitindo todos dos termos que convergem para zero mais rápido do que o termo $(\Delta h)^2$, cancelando o termo $\phi(x)$ de ambos os lados, dividindo por $(\Delta h)^2$ e tomando o limite quando $\Delta h \to 0$, resulta na seguinte equação diferencial:

$$\phi''(x) = \gamma\phi'(x) \tag{56}$$

onde $\gamma = 2\alpha/\sigma^2$. A solução geral dessa equação é facilmente obtida, ou seja:

$$\phi(x) = \mathrm{A}e^{\gamma x} + \mathrm{B} \tag{57}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Para isso, deve-se observar o que ocorre com os valores de x e com o valor de barreira $\bar{x}$. Considere inicialmente uma barreira superior $\bar{x}$. A probabilidade $\phi(\bar{x} - \Delta h)$ move para cima com probabilidade p e é refletida para $\bar{x} - \Delta h$. Portanto, a equação de equilíbrio é:

$$\phi(\bar{x} - \Delta h) = p\phi(\bar{x} - \Delta h) + p\phi(\bar{x} - 2\Delta h) \tag{58}$$

Expandindo a Eq. (58) conforme feito no caso anterior, resulta

$$\phi'(\bar{x}) = \gamma\phi(\bar{x}) \tag{59}$$

Substituindo na solução geral, conclui-se que B = 0. A mesma conclusão pode ser obtida considerando uma barreira inferior, $\underline{x}$. Finalmente, a constante deve ser escolhida desde que assegure que a soma das probabilidades entre $\bar{x}$ e $\underline{x}$ seja unitária. Isso resulta

$$\phi(x) = \frac{\gamma \exp(\gamma x)}{\left[\exp(\gamma \bar{x}) - \exp(\gamma \underline{x})\right]} \tag{60}$$

A função densidade de probabilidade de longo prazo desse processo estacionário é uma exponencial simples. É natural que se x é um processo com uma deriva positiva ($\alpha > 0$ e $\gamma > 0$), a exponencial deve crescer até uma barreira superior, e se tem uma deriva negativa a função densidade de probabilidade decresce. Se $\gamma > 0$, pode-se então de fato deixar a barreira $\underline{x}$ ir para $-\infty$ e considerar o processo somente com uma barreira superior $\bar{x}$.

3.7. Equação de Kolmogorov

Eventualmente, um analista de investimento em projetos de produção de petróleo buscará responder às seguintes questões:

- Se $x(t)$ segue um processo estocástico qualquer e seu valor corrente é x_0, qual a probabilidade dele assumir um valor dentro de um certo range após um tempo t?
- Qual a probabilidade de $x(t)$ alcançar um valor x_1 em um $t < \mathrm{T}$?

Para responder a essas questões, é necessário descrever uma distribuição de probabilidade de x e sua evolução ao longo do tempo. Aqui a equação de Kolmogorov é derivada para um MB com *drift* conforme a Eq. (22), usando passeio aleatório de tempo discreto em um intervalo t com $n = t/\Delta t$ passos. Em cada passo, x cresce Δh com probabilidade p e decresce Δh com probabilidade $q = 1 - p$. Finalmente, para manter a variância de $(x - x_0)$ independente de uma escolha particular de Δt, assume-se que $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$.

Seja $\phi(x_0, t_0; x, t)$ a *fdp* para $x(t)$. Se para um tempo t_0 tem-se $x(0) = x_0$, então

$$p[a \le x(t) \le b | x(t_0) = x_0] = \int_a^b \phi(x_0, t_0; u, t)du \tag{61}$$

Dentro de um intervalo $t - \Delta t$ até t, o processo atinge um ponto x de duas maneiras: um incremento a partir de $x - \Delta h$, ou um decréscimo a partir do ponto $x + \Delta h$. Portanto,

$$\phi(x_0, t_0; x, t) = p\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) + q\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t) \tag{62}$$

Expandindo $\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t)$ em uma série de Taylor sobre $\phi(x_0, t_0; x, t)$, resulta

$$\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) = \phi(x_0, t_0; x, t) - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \cdots \tag{63}$$

onde os termos de terceira e demais ordens superiores envolvem $(\Delta t)^{3/2}$,$(\Delta t)_2$ etc. Esses termos tendem a zero mais rapidamente do que Δt, e podem ser desprezados. Fazendo o mesmo com $\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t)$ e substituindo esses resultados na Eq. (63), chega-se à seguinte igualdade:

$$\phi(x_0, t_0; x, t) = (p+q)\phi(x_0, t_0; x, t) - (p+q)\Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} - (p-q)\Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(p+q)(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{64}$$

Uma vez que $p + q = 1$, com base na Eq. (16) tem-se $p - q = (\mu/\sigma)\sqrt{\Delta t}$. Substituindo $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$, dividindo por Δt e rearranjando, resulta

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x_0, t_0; x, t) - \mu \frac{\partial}{\partial x}\phi(x_0, t_0; x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0, t_0; x, t) \tag{65}$$

A Eq. (66) é chamada de equação de Kolmogorov (*forward*) para um MB com *drift*, que descreve a evolução no tempo da *fdp* $\phi(x_0, t_0; x, t)$. De maneira similar pode-se deduzir a equação de Kolmogorov (*forward*) para um processo generalizado de Itô indicado na Eq. (20), resultando:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(x,t)\phi(x_0, t_0; x, t)] - \frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)\phi(x_0, t_0; x, t)] = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0, t_0; x, t) \tag{66}$$

As Eqs. (66) e (67) são ditas do tipo *forward* porque elas apresentam como condição de contorno, o valor inicial x_0 no tempo t_0, e são resolvidas à frente da função de densidade para valores futuros de x. Pode-se resolver de maneira similar a evolução da função densidade na direção de tempos anteriores, isto é, tomando $x(t)$ no tempo t para uma condição de contorno de valores de x_0 no tempo $t_0 < t$. A equação de Kolmogorov do tipo *backward* é:

$$\frac{1}{2}b^2(x_0, t_0)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\phi(x_0, t_0; x, t) + a(x_0, t_0)\frac{\partial}{\partial x_0}[a(x,t)\phi(x_0, t_0; x, t)] = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0, t_0; x, t) \tag{67}$$

Diversos processos, como o de Ornstein-Uhlenbeck, fazem uso da equação de Kolmogorov.

4

ANEXO – AQUECIMENTO GLOBAL

Qualquer um pode errar sobre o futuro. Frequentemente as variáveis são tão numerosas e suas interações tão complexas, que o único erro verdadeiro é, primeiramente, o de tentar prever.
Thomas Sowell

Este anexo[89] versa sobre aquecimento global, transição energética, energia renovável, perspectivas e custos de projetos de energia. São informações que traduzem a ordem de grandeza da produção mundial de energia, seus impactos na questão do aquecimento global e os desafios da transição energética para uma economia de baixo carbono.

4.1. Aquecimento Global

As primeiras preocupações sobre o tema *aquecimento global*, que decorre do aumento das emissões de gases de efeito estufa (GEE) na atmosfera, se deram no início do século XIX, com os estudos de Joseph Fourier sobre transmissão de calor. Mas tarde, em 1930, Gui Stewart iniciou medições do aumento da temperatura média da Terra referentes aos cinquenta anos anteriores. Tratava-se de um tema inexplorado e os dados eram pobres, com instrumental de medição precário.

Somente na década de 1950 o tema ganhou relevância, e nos anos de 1970 alguns sinais, como a retração das geleiras, acabaram resultando na escalada de estudos científicos explorando o assunto, agora com medições mais precisas e com observações mais consistentes sobre o impacto da atividade humana nas mudanças climáticas. A partir daí as previsões ganharam a atenção das comunidades acadêmicas, bem como críticas de cientistas que se opuseram aos modelos predominantes[90].

A primeira conferência sobre aquecimento global foi realizada em Estocolmo em 1972, chamada de Conferência das Nações Unidas sobre Meio Ambiente e Desenvolvimento Sustentável. Já no final da década de 1980 se formou um consenso amplo sobre a origem antrópica para o aquecimento global, confirmando aquilo que os precursores haviam proposto na década de 1970. Em 1988 foi criado o Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), e a partir de 1990 seus relatórios se tornaram públicos, com a participação de milhares de climatologistas e geocientistas de diversos países. Ressalte-se que o IPCC não realiza pesquisa, e a construção do painel é feita por grupos de trabalho, entre eles:

- WG I – Examina a ciência física subjacente às mudanças climáticas passadas, presentes e futuras.
- WG II – Avalia os impactos das mudanças climáticas a partir de uma visão mundial até ecossistema e biodiversidade regionais. Leva em consideração as diversas sociedades, culturas e assentamentos.
- WG III – Concentra-se na mitigação das mudanças climáticas, avaliando métodos para reduzir e/ou remover emissões de GEE da atmosfera.

[89] Fontes: Emissions Gap Report (EGR), Empresa de Pesquisa Energética (EPE), Food and Agriculture Organization (FAO), Global CCS Institute, Global Market Outlook for Solar Power, Global Wind Report (GWR), Instituto Amazônia, Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), World Energy Outlook (IEA), World Resources Institute (WRI), Fundação Getúlio Vargas (FGV) e alguns sites de empresas de energia.

[90] Considerando que o motor da ciência é a dúvida, nunca a certeza, vale não desprezar as críticas de cientistas contrários aos modelos que predominam sobre o aquecimento global, ainda que estes modelos sejam robustos e com fortes bases científicas.

Após 20 anos do evento em Estocolmo, um encontro semelhante se deu no Rio de Janeiro entre os dias 3 e 14 de junho de 1992, com a participação de 186 países (Eco-92), que ficou conhecido como Cúpula da Terra. Os eventos Rio+10, em 2002, e Rio+20, em 2012, foram edições decenais da ECO-92. Entre os anos de 2013 e 2014 foi lançado o quinto relatório do IPCC da série iniciada em 1990, e em 2015 se deu a proposta do Acordo de Paris com a participação de 195 países, substituindo o Protocolo de Quioto[91] de 11 de dezembro de 1997, que contou inicialmente com a participação de 84 países. O Acordo de Paris, assinado em Nova York no dia 22 de abril de 2016 (dia da Terra), abrange a mitigação, adaptação e o financiamento para minimizar os efeitos que emergem das mudanças climáticas. Esse é o acordo mais importante sobre mudança climática até o momento.

Desde 1995, as conferências são realizadas para avaliar o progresso das ações de mitigação, estabelecendo obrigações vinculativas para que os países, sobretudo os desenvolvidos, reduzam suas emissões de GEE. Tais encontros são chamados de Conferência das Partes (COP), coordenados pela Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre Mudança do Clima. As principais decisões de todas as COPs realizadas até o momento estão sumarizadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Conferência das Parte – COP (principais acordos)[92]

COP	Ano	Local	COP
1	1995	Berlim, Alemanha	Marcou o início da mobilização mundial pela redução das emissões de GEE, quando foi estabelecido o Mandato de Berlim.
3	1997	Quito, Japão	A COP3 ficou marcada pleo Protocolo de Quioto, um documento que estabeleceu metas de redução de emissões de GEE para os países desenvolvidos.
9	2003	Milão, Itália	Um documento de regras definiu a maneira como os projetos de florestamento e reflorestamento devem ser conduzidos para a obtenção de créditos de carbono no escopo do Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (MDL).
10	2005	Buenos Aires, Argentina	Rússia aderiu ao Protocolo de Quioto e o Brasil divulgou o Inventário Nacional de Emissões de GEE.
13	2007	Bali, Indonésia	Início do processo de negociação do 2º período de compromissos do Protocolo de Quioto. A questão florestal foi incluída no texto
15	2009	Copenhague, Dinamarca	Foi reconhecida a necessidade de limitar o aumento da temperatura global em 2 °C acima dos níveis pré-industrial[93], ressaltando o combate ao desmatamento e degradação florestal.
17	2011	Durban, África do Sul	O documento intitulado Plataforma de Durban renovou o Protocolo de Quioto e criou o Fundo Verde para o Clima.
21	2015	Paris, França	Surge o Acordo de Paris, substituindo o Protocolo de Quioto. O documento definiu como meta limitar o aumento da temperatura média mundial em 1,5 °C até o final do século.
23	2017	Bonn, Alemanha	Reino Unido e Canadá anunciaram a ‘’*Powering Past Coal Alliance*’’, com o objetivo de eliminar a utilização do carvão como combustível fóssil até 2050. Em torno de 170 países e outros atores subnacionais se juntaram à iniciativa.
26	2021	Glasgow, Reino Unido	Após seis anos de impasse, foram aprovadas as regras de funcionamento do mercado regulado de carbono, vinculado ao Acordo de Paris.

[91] Devido a um processo de ratificação complexo, o Protocolo de Quioto só entrou em vigor em 16/02/2005.

[92] Fonte: https://noticias.portaldaindustria.com.br/.

[93] Considerado entre 1850 e 1900. Não obstante, pela 1ª vez, em 20/11/2023, o mundo registrou um dia com temperatura média global 2 °C acima da era pré-industrial.

Ainda que algumas previsões do IPCC não tenham sido confirmadas, há um consenso internacional de que o aquecimento da Terra é inequívoco, a influência humana sobre o clima é clara e a concentração de GEE na atmosfera está se elevando, o que leva à necessidade de medidas como parte da transição energética para uma economia de baixo carbono.

4.1.1. Gases de efeito estufa

Os gases de efeito estufa (GEE) ou, em inglês, *greenhouse gases* (GHG), são substâncias gasosas presentes na atmosfera que absorvem parte da radiação infravermelha emitida pelo sol, enquanto outra parcela é refletida pela superfície terrestre, o que dificulta o escape dessa radiação (calor) para o espaço. Esse fenômeno natural, chamado de efeito estufa, impede a dissipação de calor e é o que mantém o planeta aquecido, possibilitando, inclusive, a continuação da vida. Contudo, devido às ações humanas, está ocorrendo uma elevação da concentração desses gases na atmosfera, levando ao aumento da temperatura média global (ver ilustração na Figura 1).

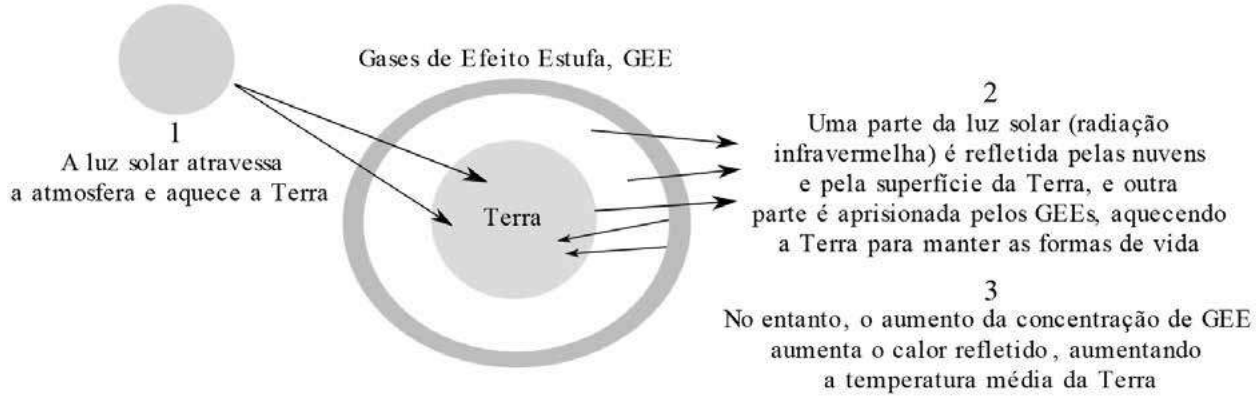


Figura 1 – Processo dos gases de efeito estufa sobre o aquecimento da Terra.

Os principais gases reconhecidos e regulados pelo Protocolo de Quioto como GEE são: dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4), óxido nitroso (N_2O), hexafluoreto de enxofre (SF_6) e outras duas famílias: compostos de hidrofluorcarbonetos (HFC) e perfluorcarbonetos (PFC). O dióxido de carbono, o metano e o óxido nitroso são os principais. É importante registrar que os efeitos dos gases, quanto ao aumento da temperatura, são distintos (ver Figura 2).

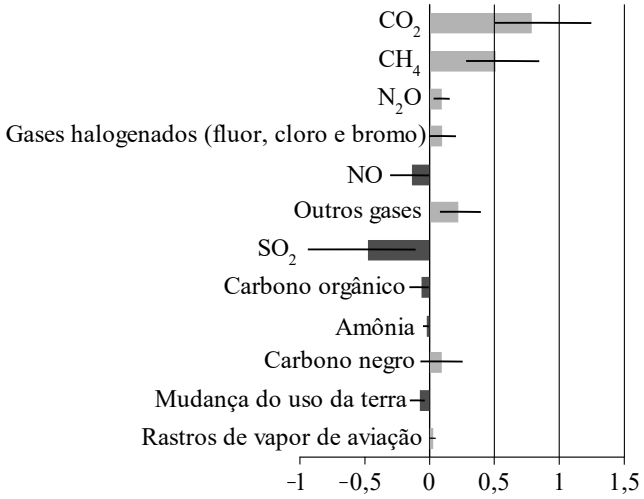


Figura 2 – Efeito dos principais GEE na variação da temperatura (ºC).

Os principais efeitos dos gases de efeito estufa são o derretimento das calotas polares com consequente aumento do nível do mar. Outros efeitos são as inundações, a extinção de espécies e os danos irreparáveis de

diversos ecossistemas. Um dos principais relatórios sobre os gases de efeito estufa é o *Emissions Gap Report*, do Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente, o qual revela que, se as emissões atuais não forem reduzidas pela metade até 2030, dificilmente se manterá o limite de aumento de temperatura em 1,5 °C até o final do século. A participação de cada setor da economia nas emissões de GEE está indicada na Tabela 2.

Tabela 2 – Participação, por setor, nas emissões de GEE (Fonte: IEA 2010)

Setor	Percentual (%)
Outras energias	25,0
AFOLU[94]	24,0
Indústria	21,0
Transporte	14,0
Produção de eletricidade e de calor	9,6
Construção	6,4

A Figura 3 a seguir dá uma noção das participações dos principais GEE no total de emissões globais (ano base 2020).

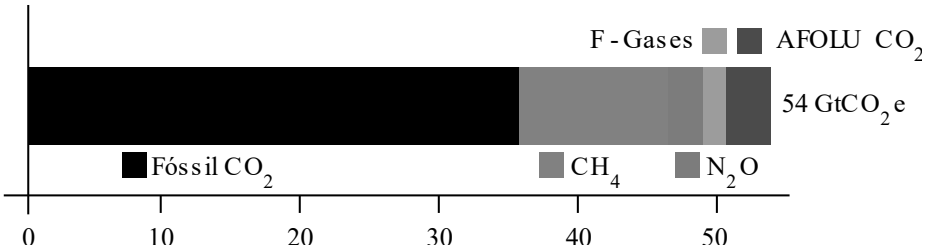


Figura 3 – Emissões totais de GEE em 2020 (Fonte: *Emissions Gap Report* 2022).

a) Emissões de escopo 1, 2 e 3 – Definição

É fundamental que as empresas, ou quaisquer organizações, façam o inventário dos GEEs de suas operações, podendo assim contribuir para o combate às mudanças climáticas. É a partir desse inventário que se conhece o perfil das emissões e, com isso, torna-se possível estabelecer estratégias e metas de redução e/ou compensação. Essas emissões são classificadas, conforme a *World Resources Institute*, em Escopo 1, 2 e 3 (ver Tabela 3).

Tabela 3 – Emissões Escopo 1, 2 e 3

Escopo	Tipo	Classificação
1	Direta	Emissões de gases de efeito estufa provenientes das operações da empresa ou controladas por ela.
2	Indireta	Emissões indiretas de gases de efeito estufa provenientes da geração de vapor, eletricidade, aquecimento e resfriamento adquiridos e consumidos pela empresa.
3	Indireta	Todas as emissões indiretas não incluídas no Escopo 2 que ocorrem na cadeia de valor da empresa, incluindo as emissões a montante e a jusante de suas operações.

[94] AFOL*U – Agriculture, Forestry and Other Land-U*se.

Trata-se de uma forma de agrupar as fontes de emissões que emanam das operações e atividades realizadas pela empresa e aquelas provenientes de sua cadeia de valor mais ampla. As emissões do Escopo 1, por exemplo, são aquelas sobre as quais a organização tem responsabilidade direta, e as emissões do Escopo 2 e Escopo 3 são classificações para fontes sobre as quais a empresa tem responsabilidade indireta.

Emissões do Escopo 2, por exemplo, são emissões da geração de energia comprada de um fornecedor privado ou público. Em outras palavras, são todas as emissões de gases de efeito estufa liberadas na atmosfera a partir do consumo adquirido de eletricidade, vapor, calor e resfriamento. A energia adquirida é aquela comprada ou trazida para dentro dos limites organizacionais da empresa. Já as emissões do escopo 3, por exemplo, são originadas de operações comerciais por fontes que não são de propriedade ou controladas diretamente pela empresa, como transporte, uso ou descarte de produtos etc. É a mais difícil de se medir.

No Brasil, a elaboração de inventários corporativos de gases de efeito estufa é parte do Programa Brasileiro GHG Protocol (PBGHG). Esse protocolo estabelece métodos e diretrizes abrangentes para medir e gerenciar as emissões de GEE de operações do setor público e privado.

b) Carbono equivalente

Carbono equivalente é um conceito para reportar todos os gases de efeito estufa em uma única unidade, de modo a viabilizar o mercado de crédito de carbono. Por exemplo, uma tonelada de CO_2 equivale a 0,2727 toneladas de carbono equivalente, pois o cálculo do carbono equivalente considera apenas a massa de carbono contida na molécula de CO_2, que é 27,27% da massa total. O carbono equivalente é calculado por meio do GWP[95] relativo multiplicado por 0,2727 (ver exemplos de GWP na Tabela 4).

Tabela 4 – GWP de alguns GEEs

GEE	GWP relativo/CO_2 (100 anos)	Carbono equivalente (GWP×0,2727)
Dióxido de carbono (CO_2)	1	0,2727
Metano (CH_4)	28	7,64
Óxido nitroso (N_2O)	265	72
Perfluoro ciclopropano (c-C_3F_6)	9.200	2.509
Trifluoreto de nitrogênio (NF_3)	16.100	4.390
Hexafluoreto de enxofre (SF_6)	23.500	6.408

De acordo com a Tabela 4, o metano (CH_4) tem um potencial de dano ao ambiente 28 vezes maior que o CO_2. Ou seja, emitir 1 tonelada de metano tem o mesmo efeito que emitir 28 toneladas de CO_2. Já o hexafluoreto de enxofre (SF_6) tem um potencial de dano 23.500 vezes maior que o CO_2, e assim por diante. A fórmula para o cálculo do carbono equivalente é:

$$\mathrm{tCO_2eq} = \mathrm{GEE}_{ton} \times \mathrm{GWP} \times 0{,}2727 \quad (1)$$

Para entender como funciona o mercado de carbono, suponha que 1 tonelada de CO_2 e esteja cotada em US$ 1000 no mercado de créditos de carbono, e que haja a remoção por parte de uma empresa de 1 tonelada de CO_2 da atmosfera. Essa remoção permite que tal empresa gere 0,2727 créditos de carbono, ou seja, US$ 272,70. Já a remoção de 1 tonelada de metano (CH_4) gera 7,64 créditos de carbono, ou seja, US$ 7.640,00, e assim por diante.

[95] *Global Warming Potential* (GWP) – Potencial de Aquecimento Global. Uma molécula de CO_2 tem GWP igual a 1.

c) Crédito de carbono

Créditos de carbono representam a não emissão de GEE na atmosfera. Esse mercado caracteriza-se, basicamente, pela venda dos créditos de carbono entre um país ou empresa que os detêm, ao ter reduzido suas emissões de GEEs, e um país ou empresa que precisa reduzir as emissões por não ter atingido sua meta.

No Brasil, o crédito de carbono é comercializado pela B3 por meio de leilões[96]. O valor depende do mercado no qual o crédito é negociado, se regulado ou voluntário:

- Mercado regulado – os governos (nacional, regional ou estadual) determinam, por lei, metas ou limites de emissões que devem ser cumpridas pelas empresas emissoras. Aquelas que conseguem emitir menos que o teto estabelecido podem vender seus créditos de carbono às que excederem o limite. Nesse caso, a cotação é definida pela instância reguladora.
- Mercado voluntário: o valor do crédito é negociado em contrato, com base nas características do projeto. Nesse mercado, as empresas não têm obrigações legais de reduzir emissões, mas aquelas que querem compensá-las, por causa de suas próprias metas ou para atender às exigências do mercado consumidor, podem comprar créditos de carbono.

Atualmente a maior certificadora global do mercado voluntário de carbono é a VERRA, uma organização sem fins lucrativos com sede nos Estados Unidos, responsável pela metodologia de cálculo dos créditos de carbono de um determinado projeto. Tais créditos são denominados de *Verified Carbon Standard*, ou VCS. Os projetos recebem créditos de carbono exclusivos, cada VCS representa uma redução ou remoção de 1 tCO_2e alcançada pelo projeto. Ressalte-se que a cotação do crédito de carbono, mesmo no mercado regulado, varia muito entre os países (ver exemplos na Tabela 5).

Tabela 5 – Exemplos de valores de créditos de carbono

Mercado regulado	Cotação de 1 tCO_2e
Brasil	EUR 68,88 (13/12/2023)
China	US$ 6,00 (13/04/2023)
Califórnia, USA	US$ 24,00 (13/04/2023)
Europa	US$ 85,00 (13/04/2023)

O setor privado desenvolveu vários programas de certificação de projetos de carbono. Além da VERRA, que criou o VCS, outra certificadora conhecida é a Gold Standard, que contabiliza os benefícios sociais gerados pelos créditos. Os créditos recebem um número de série rastreável e são depositados na conta do desenvolvedor do projeto no próprio ambiente de registro de créditos.

Além dos créditos certificados pela VERRA e Gold Standard, entre outras certificadoras independentes, há também a oferta dos créditos MDL, sigla para Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (CDM, em inglês, *Clean Development Mechanism*). O MDL foi originado no Protocolo de Quioto e é gerenciado pela ONU. Em 2015 ficou sob a tutela do Acordo de Paris, de forma que todos os países signatários – desenvolvidos ou não – passaram a ter metas de redução de emissões, chamadas de Contribuições Determinadas Nacionalmente (NDC, *Nationally Determined Contribution*). A NDC brasileira, atualizada em 2023, estabelece que o Brasil deve reduzir as suas emissões em 53% até 2030, em relação às emissões de 2005. Além disso, em 2023 o Bra-

[96] A título de exemlo, a Petrobras entrou no mercado voluntário de créditos de carbono em 05/09/2023 com a compra de 175 mil créditos. Esses créditos correspondem à preservação de uma área de 570 hectares da floresta amazônica, equivalente a 800 campos de futebol como o Maracanã.

sil reiterou seu compromisso de alcançar emissões líquidas neutras até 2050, ou seja, tudo que o país emitir deverá ser compensado com fontes de captura de carbono, como plantio de florestas, recuperação de biomas ou outras tecnologias.

4.1.2. Net zero 2050

O programa net zero 2050 é uma meta estipulada pelo Acordo de Paris para que o mundo chegue em 2050 com emissões líquidas zero de gases de efeito estufa, ou seja, alcançar emissões líquidas zero entre o carbono emitido e o removido da atmosfera.

De acordo com o IPCC, a temperatura global já está mais de 1 °C acima do nível pré-industrial, e os cenários avaliados pelo IPCC indicam que limitar o aquecimento em 1,5 °C até o final deste século exigiria alcançar emissões líquidas zero de dióxido de carbono até o início da década de 2050. O Acordo de Paris reitera a importância de alcançar um equilíbrio global entre as emissões causadas pelo homem decorrentes do uso de fontes fósseis e as remoções realizadas até a segunda metade do século XXI, tendo em conta as diversas capacidades em diferentes partes do mundo, com base no contexto do desenvolvimento sustentável e dos esforços para erradicar a pobreza.

A IEA apontou, em seu *roadmap*, os seguintes pontos para atingir o net zero em 2050:

- Todos os governos devem implementar, com sucesso, suas políticas energéticas e climáticas.
- A demanda global de energia, em 2050, será cerca de 8% menor do que é hoje, mas atenderá a uma economia duas vezes maior e a uma população de 10 bilhões de pessoas.
- A energia solar fotovoltaica aumentará em 20 vezes entre 2020 e 2050, e a energia eólica, 11 vezes.
- Todas as tecnologias necessárias para alcançar os cortes nas emissões globais até 2030 já existem e as políticas que podem impulsionar a sua implantação já estão comprovadas.
- O setor de energia é responsável por três quartos das emissões de GEE, e é a chave para esse objetivo.
- As maiores oportunidades de inovação são as baterias avançadas, eletrolisadores de hidrogênio e captura e armazenamento de CO_2 direto do ar.

Muitos países e um número crescente de empresas estão empenhados em atingir emissões líquidas zero. Em setembro de 2023, por exemplo, as promessas de emissões líquidas zero já cobriam mais de 85% da produção global de emissões relacionadas à energia, e representavam 90% do PIB global. Noventa e três países e a União Europeia comprometeram-se a cumprir a meta de emissões líquidas zero até 2050. De todo modo, chama a atenção que algumas metas no *roadmap* net zero 2050 parecem pouco prováveis, mas não impossíveis.

A título de exemplo, de acordo com o *Global CCS Institute*, a capacidade total de captura de CO_2 até o segundo quadrimestre de 2023 era de 307,8 milhões de toneladas por ano (Mtpa).

Tabela 6 – Capacidade de captura de carbono (projetos de CCS – Fonte Global CCS Institute)

Q2 – 2023	Em operação	Em construção	Projetos avançados	Projetos em atraso	Total
Número de projetos	37	20	97	103	257
Capacidade (Mtpa)	50,6	22,9	85,5	148,8	307,8

Embora a capacidade de CCS represente apenas 0,57% do que foi lançado na atmosfera em 2020 (54 $GtCO_2e$), nos últimos anos se verificou uma evolução significativa de projetos de CCS ao redor do mundo. Para efeito de comparação, a Petrobras reinjetou nos campos do pré-sal, em 2020, um total de sete milhões de toneladas de CO_2. Na época, era o equivalente a 19% do total mundial injetado. Considerando agora a evolução dos projetos indicados na Tabela 6, aquela participação representaria hoje apenas 2,2%.

4.1.3. Matriz energética – Brasil (1970 a 2022) e Mundo (1990 a 2020)

É importante diferenciar matriz energética de matriz elétrica. A primeira indica as fontes de energia primária utilizadas para o transporte, cocção de alimentos, geração de eletricidade, aquecimento na indústria e residências, entre outros. Já a matriz elétrica exibe apenas as fontes para a geração de energia elétrica. A matriz elétrica é parte da matriz energética. A título de informação, os dados da matriz energética brasileira publicados pela EPE são reportados em toneladas equivalentes de petróleo[97], enquanto os dados da IEA são reportados em exajoules. A Figura 4 a seguir indica a produção de energia elétrica do Brasil entre 1970 e 2022.

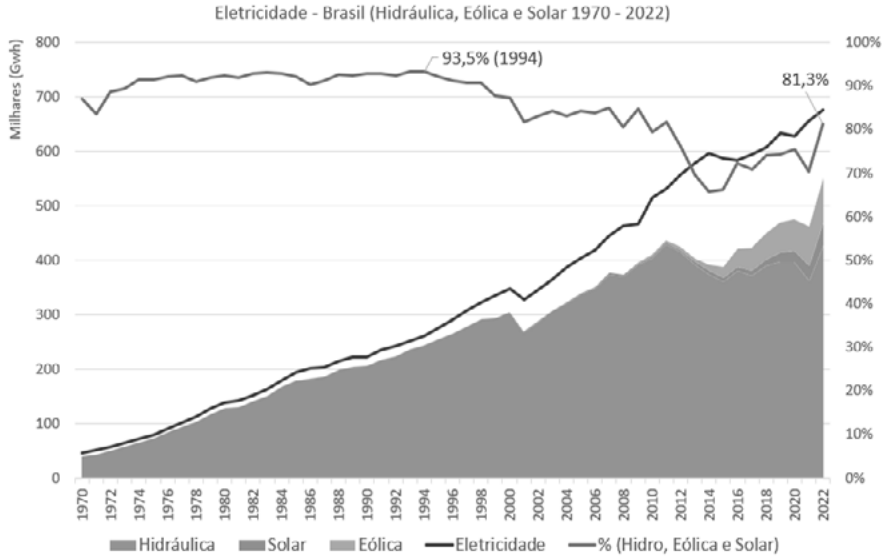


Figura 4 – Matriz elétrica – Brasil (Hidráulica, Solar e Eólica, 1970 a 2022).

Considerando apenas as três principais fontes renováveis de geração de energia elétrica (hidráulica, solar e eólica), em 1994 a hidráulica representava 93,5% de toda a energia elétrica gerada no país, que era de 260 TWh. Em 2022, considerando a participação adicional da energia solar e eólica, 81,3% da energia elétrica era gerada por essas três fontes renováveis. Em outras palavras, em 1994 o Brasil tinha uma matriz de geração elétrica ainda mais verde do que em 2022, que é de 677 TWh (ver Figura 4). Já a Figura 5 a seguir indica o histórico da matriz energética brasileira entre 1970 e 2022, e a contribuição que cada fonte representava em 2022.

[97] Tonelada equivalente de petróleo (tep), o mesmo que tonelada de óleo equivalente (toe).

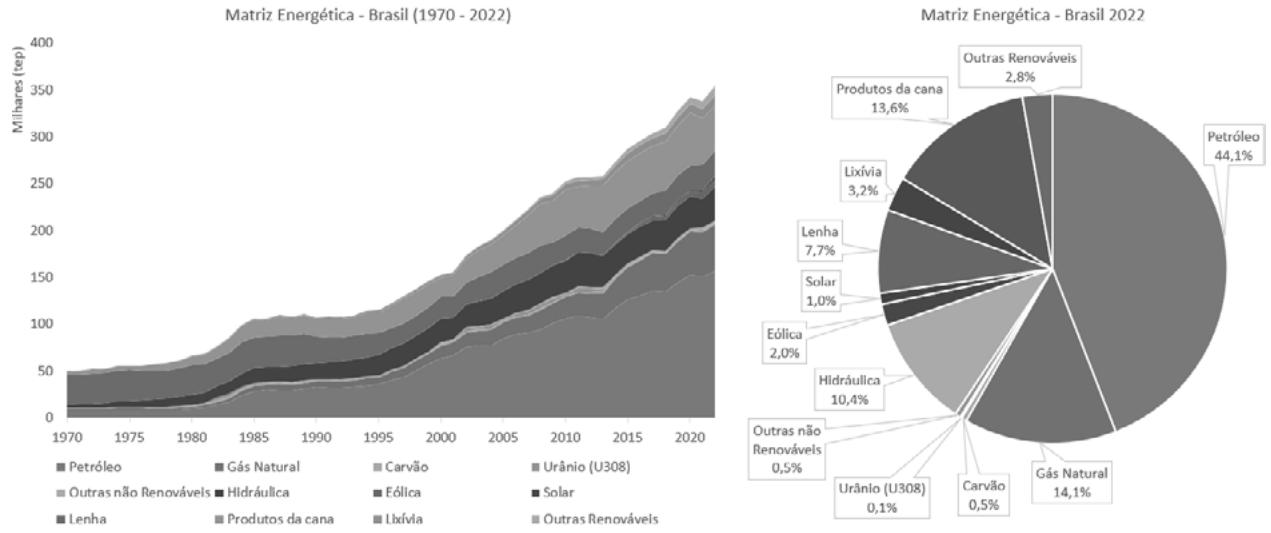


Figura 5 – Matriz Energética – Brasil, 1970 a 2022 (Fonte – EPE).

Note que as fontes não renováveis ainda somam quase 60% da matriz energética brasileira. É curioso notar que produtos da cana, lenha e lixívia têm uma participação significativa, perfazendo quase ¼ da matriz energética brasileira. Em 2022, por exemplo, a produção de renováveis representava 40,6% (metade do que representa na matriz elétrica), ao passo que as fontes renováveis, na matriz energética global, representam em torno de 15% (ver Figura 6). Isso deixa o Brasil ‘’relativamente livre’’ para aumentar a produção de fontes fósseis, ainda mais com o pré-sal e a margem equatorial entre suas oportunidades. Mais precisamente, nos casos em que o custo de oportunidade de produção de energia renovável é elevado, não há motivos para que o Brasil, com alto débito social, não aproveite o quanto antes a riqueza oriunda de suas fontes fósseis.

A Tabela 7 exibe os percentuais de consumo de energia no Brasil em 2022 por setor da economia. Note que o transporte é responsável por 1/3 das emissões totais, o que justifica a atenção dos ambientalistas em realizar a transição energética do setor de transporte o quanto antes.

Tabela 7 – Consumo de energia por setor em 2022 (Fonte – EPE)

Setor	%
Transporte	33,0
Indústria	32,0
Residência	10,7
Setor energético	8,7
Agropecuária	4,8
Serviço	5,0
Uso não energético	5,9

A Figura 6 a seguir indica o histórico da matriz energética mundial entre 1990 e 2020, e a contribuição que cada fonte representava em 2020.

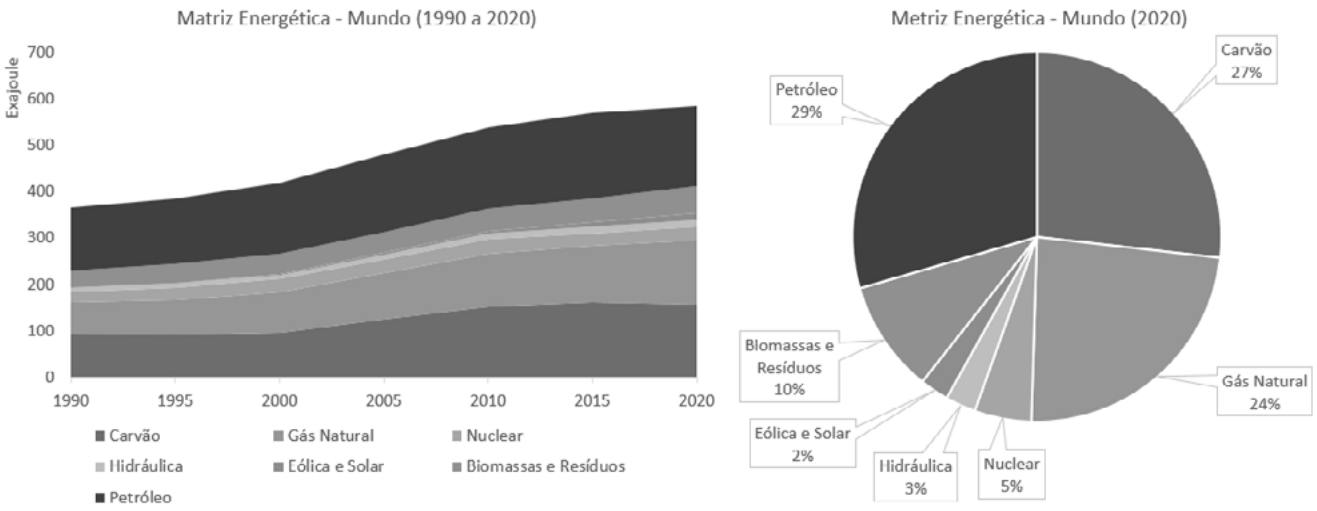


Figura 6 – Matriz Energética – Mundo, 1990 a 2020 (Fonte – IEA).

Na Tabela 8, para efeito de comparação, estão os percentuais de participação das fontes fósseis frente às demais fontes somadas na matriz energética mundial.

Tabela 8 – Participação das fontes fósseis e demais fontes na matriz energética mundial

Ano	Fóssil (%)	Outras fontes (%)
1990	81,4	18,6
2000	80,5	19,5
2010	82,1	17,9
2020	80,0	20,0

As fontes fósseis, como energia primária no mundo, ainda perdurarão por um longo tempo. Nos últimos 30 anos, a participação das fontes fósseis caiu apenas 1,4% frente às demais fontes somadas. Note que, em 2010, houve até um aumento de variação decenal das fontes fósseis, apesar dos esforços dos acordos firmados nas COPs (ver Tabela 8). A maior variação decenal das demais fontes na matriz se deu na última década, aumentando em 2,1% frente às de origem fóssil. Caso essa performance se repita nas próximas décadas, em 2160 as fontes fósseis ainda terão 50% de participação na matriz. Se a performance duplicar, em 2090 as fontes fósseis ainda terão 50% de participação. Até mesmo se a produção das demais fontes, para as próximas décadas, for o triplo da sua melhor performance de variação decenal, em 2060 as fontes fósseis e demais fontes terão igual participação. Vale ressaltar que ter ainda uma participação de 50% de fontes fósseis é muito significativo.

A Tabela 9 a seguir exibe alguns dados sobre a produção de energia, demanda de eletricidade, número de carros por mil habitantes e emissões per capita de CO_2 de algumas regiões. De acordo com a Tabela 9, a emissão per capita de CO_2 de um americano (EUA), por exemplo, é mais que o quádruplo de um latino-americano (Brasil, por exemplo) e mais que o dobro de um europeu, consumindo, também, 24 vezes mais energia que um africano.

Tabela 9 – Consumo de energia, demanda de eletricidade e emissões de CO_2

Região/País	População (milhões)	Produção de energia (EJ)	Eletricidade (kWh per capita)	Carros/10000 pessoas	Emissões de CO_2 (Gt)	Emissões de CO_2 (t per capita)
EUA	336	94	12.133	682	4,7	14
AL e Caribe	658	37	2.253	137	1,7	3
União Europeia	449	56	5.521	557	2.7	6
África	1.425	36	508	25	1,4	1
Oriente Médio	265	36	4.190	175	2,1	8
Eurásia	238	42	5.051	193	2,4	10
China	1.420	160	5.612	201	12,1	9
Índia	1.417	42	926	31	2,6	2
Japão e Coreia	177	29	8.703	490	1,7	9
Sudeste da Ásia	679	30	1.592	63	1,7	3

4.2. Contraponto à Tese da Origem Antropogênica

Embora a comunidade científica seja majoritariamente consensual quanto à origem antropogênica do aquecimento global, uma minoria de especialistas discorda dessa visão. O professor Richard Lindzen, do MIT, por exemplo, tem uma visão controversa sobre o aquecimento global. Ele discorda da tese majoritária de que o aumento de CO_2 na atmosfera seja a principal causa. Os pontos principais de Lindzen (2022) são:

- O aumento de CO_2 é apenas um dos muitos fatores que contribuem para o aquecimento global, e que fatores naturais, como a atividade solar e vulcânica, são mais importantes.
- Os modelos climáticos usados para prever o futuro do clima exageram o impacto humano e não levam em consideração os fatores naturais de forma adequada.
- O aquecimento global não é uma ameaça grave à humanidade, e que os custos das políticas climáticas são maiores do que os benefícios.

Lindzen (2022) argumenta que a Terra tem, de fato, muitos regimes climáticos. Além disso, tem havido mudanças na diferença de temperatura entre os trópicos e regiões polares ao longo de milênios, mas ao mesmo tempo a natureza das regiões tropicais permaneceu pouco alterada. Essa diferença é determinada pelos fluxos de calor dinâmicos na atmosfera e oceanos. Lindzen (2022) argumenta que tais mudanças na temperatura média ocorrem, principalmente, devido às mudanças na diferença entre os trópicos e as regiões polares, e não às mudanças no efeito estufa.

Já Curry (2023), climatologista e ex-professora da Georgia Tech, reconhece que o clima está mudando, mas questiona a magnitude da influência humana. Ela critica o consenso científico sobre o aquecimento global e defende uma abordagem mais ampla e mais equilibrada. Até 2010 ela apoiou o consenso do IPCC, e quando demonstrou preocupação quanto ao tratamento inadequado da incerteza e do comportamento de alguns cientistas, tornou-se impopular entre os ativistas climáticos, que trabalharam ativamente para desacreditá-la.

Segundo Curry (2023), em vez do debate amplo, com diferentes pontos de vista, prevaleceu uma visão singular das alterações climáticas, abafando outras vozes. Essa visão singular foi solidificada por meio de uma redefinição das alterações climáticas. A Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre Alterações Climáticas passou a distinguir alteração climática de variabilidade climática. A primeira é atribuída às atividades humanas que alteram a composição atmosférica, principalmente CO_2, e a segunda é atribuída às causas naturais. Segundo Curry (2023), essa redefinição eliminou, efetivamente, as alterações climáticas naturais da discussão pública.

Lomborg[98] (2013) concluiu que as mudanças climáticas contribuíram para a melhoria do bem-estar social durante o século XX. É possível desconfiar dos estudos, assim como é possível desconfiar das projeções do IPCC, mas o consenso do ponto de vista econômico é este: o aumento médio da temperatura foi positivo para o mundo. Os pontos positivos, segundo Lomborg (2013), são: menos mortes causadas durante invernos rigorosos, custos mais baixos de energia, melhores colheitas agrícolas e, provavelmente, menos secas. As mortes causadas por invernos rigorosos excedem as causadas por verões rigorosos, mas estas costumam receber muito mais atenção da mídia. Não obstante esses dados, todos parecem preocupados, segundo Lomborg (2013), apenas em combater os efeitos negativos das mudanças climáticas, sem avaliar os custos de oportunidade.

Lomborg (2013) argumenta que a comunidade internacional tem focado em problemas globais de forma exagerada e ineficiente. Ele utiliza uma análise quantitativa para avaliar o custo de diversos problemas, entre os quais estão:

- A maioria dos problemas globais está diminuindo: Lomborg (2013) apresenta dados que demonstram que a pobreza extrema, a fome, a mortalidade infantil e a mortalidade por doenças infecciosas estão diminuindo significativamente em todo o mundo.
- O foco em problemas globais pode ser distorcido: Lomborg (2013) argumenta que a mídia e as ONGs muitas vezes exageram a gravidade dos problemas globais, o que pode levar a políticas ineficientes e dispendiosas.
- É preciso priorizar soluções eficazes: Lomborg (2013) defende que a comunidade internacional deve se concentrar em soluções que sejam comprovadamente eficazes na resolução de problemas globais, e que os recursos devem ser direcionados para as áreas de maior impacto.

Outros cientistas que discordam da maioria dos cientistas do clima são:

- Robert Carter, geólogo e ex-professor da Universidade James Cook, é um dos principais críticos da tese do aquecimento global antropogênico. Argumenta que o clima está mudando naturalmente e que não há evidências de que a atividade humana seja a causa principal.
- Fred Singer, físico e ex-diretor do Instituto de Pesquisa Espacial da Universidade de Virgínia, argumenta que o aquecimento global é um processo natural e que o CO_2 não é o principal responsável.
- Roy Spencer, meteorologista e ex-cientista da NASA, argumenta que os modelos climáticos exageram o impacto do CO_2 e que o aquecimento global é menos grave do que se imagina.
- Willie Soon, físico e ex-cientista do Centro de Pesquisas Espaciais do Smithsonian Institution, argumenta que a atividade solar é a principal causa do aquecimento global e que o impacto humano é mínimo.
- Lennart Bengtsson, meteorologista e ex-diretor do Centro Europeu de Previsão do Tempo de Médio Prazo, argumenta que o clima é muito complexo para ser modelado com precisão, e que o CO_2 não é o único fator importante.

[98] Autor do best-seller *The Skeptical Environmentalist* (Cambridge University Press, 2001). Nomeado um dos 100 maiores pensadores globais pela revista *Foreign Policy* em 2010, 2011 e 2012 e uma das 50 pessoas que poderiam salvar o planeta, pelo *The Guardian*.

- Nir Shaviv, professor de física da Universidade Hebraica de Jerusalém, propõe que a atividade solar é o principal motor do aquecimento global, e que o impacto humano é mínimo. Ele critica os modelos climáticos por ignorarem a influência solar e defende uma investigação mais profunda das causas naturais do aquecimento.

4.3. Transição Energética

Este termo, relativamente novo, nada mais é do que migrar de uma economia em que a energia gerada é baseada em fontes com alto teor de carbono, prevalecendo o carvão e hidrocarbonetos, para uma economia baseada em baixo teor de carbono, em que a energia é gerada a partir de fontes renováveis como eólica, solar, hidrogênio, biomassa e outras. Resumidamente, ampliar o uso de fontes renováveis, reduzir o uso de combustíveis fósseis, buscar eficiência energética, reflorestar áreas desmatadas, capturar e armazenar CO_2 direto da atmosfera ou de operações industriais são algumas das iniciativas que compõem a transição energética.

4.3.1. Transporte

De acordo com a IEA, o transporte rodoviário representa atualmente cerca de 45% da demanda global de petróleo, que é muito mais do que qualquer outro setor. O setor petroquímico, segundo maior em consumo de petróleo, é responsável por 15% da demanda de petróleo.

Conforme relatório da FGV, na área de transporte, a transição energética brasileira passa pelo aumento da oferta de etanol (incluindo biocombustíveis de segunda geração), incorporação de renováveis na mistura do diesel (RenovaBio), além de medidas de eficiência, como melhorias na infraestrutura de transportes particulares e públicos em áreas urbanas. O RenovaBio é uma política de Estado que visa ampliar a produção e o uso de biocombustíveis na matriz energética brasileira. Atrelado a esse programa foi lançado o CBIO, que é um ativo financeiro emitido por produtores e importadores de biocombustíveis. Cada CBIO negociado na B3 representa uma tonelada de CO_2 que deixa de ser emitida na atmosfera. Os critérios de cálculo são estabelecidos pela ANP.

As medidas necessárias incluem motores elétricos, transição do transporte de cargas do modal rodoviário para o ferroviário, maior eficiência logística, priorização do transporte público e de deslocamentos não motorizados nas áreas urbanas. O setor de transporte é um dos melhores candidatos para uso do hidrogênio, sobretudo o rodoviário pesado, aviação e o marítimo. Para superar o desafio das mudanças climáticas, o setor de transporte (mobilidade) deverá atuar em três eixos: evitar, mudar, melhorar, do inglês *Avoid, Shift, Improve* (Fonte: ITDP, 2021):

- Evitar – promover o planejamento urbano integrado, intensificando a ocupação e o adensamento populacional e produtivo no entorno dos corredores de transporte.
- Mudar – promover o uso de transporte público, mobilidade a pé e por bicicleta.
- Melhorar – aprimorar as tecnologias para a melhoria da eficiência energética de veículos e o uso de combustíveis menos poluentes.

As metas para veículos elétricos impulsionaram uma transformação nas estratégias industriais de fabricantes de automóveis e caminhões nos últimos anos, aliadas aos combustíveis com baixas emissões de CO_2, tanto na União Europeia como na China e, mais recentemente, nos Estados Unidos. Da mesma forma, veículos elétricos de três rodas e ônibus tiveram uma aceitação significativa na Índia e em outros países emergentes.

4.3.2. Captura de CO2 direto do ar

A maior parcela de remoção do CO_2 no mundo decorre do remanejamento de terras, como a restauração de turfeiras e pântanos, reflorestamento e a fixação do carbono em plantações e pastagens. Uma pequena fração advém de tecnologias como captura e armazenamento de CO_2 direto do ar ou armazenamento geológico, bioe-

nergia com captura e armazenamento de carbono e o biochar (abreviatura para *biocharcoal*, ou seja, biocarvão – um carvão vegetal).

A tecnologia biochar envolve a captura do carbono absorvido por resíduos agrícolas, como galhos, cascas, raízes e outras biomassas. Esses resíduos são aquecidos sob pressão e carbonizados em um ambiente com pouco ou nenhum oxigênio, transformando-os em biocarvão. Quando misturado ao solo, esse carvão vegetal atua como fertilizante e ajuda a aumentar o rendimento das plantações e a retenção de água. Pirólise, gaseificação, carbonização (rápida ou hidrotermal) e torrefação são os métodos mais comuns de conversão térmica para obtenção do biocarvão, sendo a pirólise a técnica mais utilizada. O biochar tem sido foco de pesquisa para remoção de carbono, sobretudo na China. A desvantagem é que a produção de biochar emite poluição particulada e GEE no processo de queima dos resíduos com o oxigênio.

Alguns processos químicos podem extrair o CO_2 diretamente do ar. No processo conhecido como DAC-CS (em inglês, *direct air capture with carbon storage*), o gás carbônico é comprimido e armazenado em forma líquida em reservatórios subterrâneos. Não obstante, armazenar CO_2 no subsolo implica riscos, podendo resultar em vazamentos no longo prazo. Outra desvantagem é o custo, ainda elevado de acordo com a *World Resources Institute* (WRI).

Outra variante tecnológica que vem sendo desenvolvida pela *Carbon Engineering*, empresa canadense, em parceria com a Chevron, envolve uma turbina que captura o ar da atmosfera para dentro de uma estrutura por onde passa por finas superfícies de plástico com solução de hidróxido de potássio fluindo sobre elas. Essa solução liga-se quimicamente às moléculas de CO_2, removendo-as do ar e prendendo-as na solução líquida, como um sal de carbonato. O CO_2 contido nessa solução de carbonato é então submetido a uma série de processos químicos para aumentar sua concentração, resultando um gás pronto para uso ou armazenamento. Isso envolve a separação do sal da solução em pequenos *pellets*[99] em uma estrutura chamada reator de *pellets*. Nessa reação química, além de precipitar os pellets de carbonato de cálcio, é regenerado o produto químico de captura original para reutilização.

Esses *pellets* são então aquecidos em uma terceira etapa para liberar o CO_2 na forma de gás puro. Essa etapa extrai o óxido de cálcio que é misturado com água em um *slaker* para reidratá-lo e, em seguida, é realimentado no reator de *pellets*, reiniciando o ciclo (ver Figura 7).

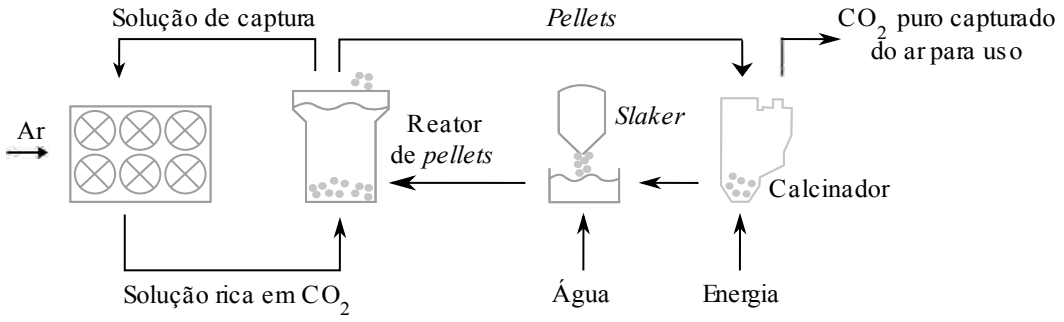


Figura 7 – Esquema simplificado – Captura de CO_2 direto do ar (Fonte – *Carbon Engineering*).

[99] *Pellets* – combustível sólido feito de material orgânico comprimido. Os *pellets* podem ser produzidos a partir de qualquer uma das cinco categorias gerais de biomassa: resíduos industriais e coprodutos, resíduos alimentares, resíduos agrícolas, culturas energéticas e madeira não tratada.

4.3.3. Combustíveis sintéticos renováveis

De acordo com a EPE (2023a), os combustíveis sintéticos são hidrocarbonetos produzidos artificialmente por processos termoquímicos e catalíticos, com propriedades análogas aos combustíveis fósseis, e podem ser usados nos sistemas já existentes, sem necessidade de adaptação. Esses combustíveis podem ser obtidos a partir de processos com reduzida pegada de carbono, tendo como principais insumos as biomassas, o CO_2 advindo do processo de CCS e o hidrogênio, a partir da eletrólise da água. Dentre os principais produtos destacam-se o SAF (em inglês, *Sustainable Aviation Fuel*), o diesel verde, a gasolina sintética e o biometano.

4.3.4. Armazenamento geológico de CO2

Com base em nota técnica da EPE/2022, o armazenamento geológico, ou geo-sequestro, envolve a injeção de CO_2 em poços, sejam eles pré-existentes ou adaptados em reservatórios de óleo ou gás depletados. O CO_2 pode ser injetado na forma de gás comprimido, líquido ou no estado supercrítico, que é alcançado em condições de temperaturas acima de 31 °C e pressão acima de 7,38 MPa.

A eficiência de armazenamento de CO_2 em uma formação geológica é maior com o aumento da densidade do CO_2, melhorando a segurança do armazenamento, já que o gradiente de temperatura, que varia em função da profundidade do reservatório, influencia significantemente a densidade do CO_2. Bacias sedimentares com temperaturas mais baixas seriam, portanto, mais favoráveis ao armazenamento de CO_2, uma vez que a densidade dos gases aumenta com a redução da temperatura.

a) Reservatórios de óleo e gás depletados

Os reservatórios depletados que armazenaram óleo e gás por milhares de anos têm poços perfurados e infraestrutura de escoamento, e prontos para receber e armazenar o CO_2. Em termos de desvantagens, deve-se considerar que a capacidade de armazenamento disponível de CO_2 é menor do que o volume de hidrocarbonetos produzido. Some-se ao fato da necessidade de se evitar pressões excedentes que podem fraturar a rocha capeadora, além da possibilidade de vazamento através do revestimento e/ou cimentação de poços abandonados.

b) Recuperação avançada de petróleo (EOR)

A recuperação avançada de petróleo refere-se à injeção de CO_2 em campos ativos para aumentar a recuperação do óleo. Quando injetado, o CO_2 tem a capacidade de reduzir a viscosidade do óleo e reduzir a tensão interfacial e, em alguns casos, tornar-se miscível com o óleo, permitindo o fluxo em fase única. Alguns autores consideram o uso de CO_2 para a recuperação avançada como um tipo de utilização (CCU) em vez de armazenamento (CCS). Essa técnica já vem sendo empregada desde a década de 1970, principalmente nos Estados Unidos (EUA). Nos últimos anos a Petrobras vem adotando nos campos do pré-sal, alternando injeção de CO_2 com água, processo este denominado de WAG, *water alternating gas*.

c) Aquíferos salinos

Os aquíferos salinos são reservatórios de água, inapropriada para uso humano, agropecuário ou industrial, que podem ser uma alternativa interessante para o armazenamento de CO_2 por terem a capacidade de armazenar valores elevados de CO_2 por projeto. Pode envolver até quatro mecanismos de trapeamento: estrutural, estratigráfico, capilaridade ou mineral, nos quais o CO_2 se dissolve no aquífero.

d) Cavernas de sal

As propriedades geomecânicas das cavernas de sal oferecem uma série de vantagens do ponto de vista de construção e armazenamento que tornam a solução bastante atraente, como, por exemplo, sua característica selante, sua baixa permeabilidade e sua capacidade de autorrestauração caso seja danificada ou sofrer fraturas. Basicamente, a caverna é construída pelo processo de dissolução ou lixiviação usando água do mar. A diluição

do sal resulta em uma cavidade de salmoura (mistura de água e sal), que ao longo de sua vida útil é substituída pelo CO_2 pressurizado (estado supercrítico).

e) Oceanos

Os oceanos se constituem como alternativa para o armazenamento de CO_2, pois estima-se que eles absorveram, de forma natural, aproximadamente 40% do CO_2 antropogênico desde a era industrial. Esse tipo de armazenamento consiste na injeção de CO_2 a profundidades superiores a 1 km a partir de navios ou plataformas *offshore*. Nessa profundidade, o CO_2 é mais denso do que a água, o que levaria à sua dissolução e dispersão. O potencial estimado seria da ordem de 40 mil $GtCO_2$ por ano, por projeto. No entanto, existem preocupações ambientais com relação aos possíveis impactos, e até o momento não há projetos em escala piloto, apenas pesquisas acadêmicas.

4.3.5. Reflorestamento

Entende-se por reflorestamento a ação de replantar e garantir a manutenção de espécies vegetais em áreas que foram desmatadas ou onde ocorreram incêndios. Muitas áreas de mata atlântica e cerrado, por exemplo, vêm sendo desmatadas há séculos e tiveram sua capacidade de regeneração natural comprometida. O reflorestamento humano, embora fique longe de recompor integralmente a biodiversidade primitiva, é necessário para a manutenção de matas ciliares e para melhorar a qualidade da vida humana através da absorção da poluição, além de mitigar o clima por meio do sequestro de carbono da atmosfera. Some-se a esses benefícios o fato de a extração de madeira ser uma compensação interessante do ponto de vista econômico.

Ressalte-se que as florestas sequestram o carbono apenas na fase de crescimento das árvores, pois ao atingirem a fase adulta, o balanço de compensação de CO_2 é praticamente nulo. De acordo com o Instituto Brasileiro de Florestas, a cada sete árvores é possível sequestrar 1 tonelada de carbono nos seus primeiros 20 anos de idade. Com base nessa média é determinada a quantidade de árvores que seriam necessárias para neutralizar as emissões de GEEs no mundo. Alguns cálculos dão conta de 1,2 trilhões de árvores para cumprir essa função de neutralização. De acordo com o Instituto Amazônia, serão plantadas no Brasil cerca de 73 milhões de árvores à beira da região amazônica conhecida como ‘’arco da destruição’’. É composta pelos estados de Rondônia, Pará, Acre, Amazonas e da bacia hidrográfica do Xingu.

Centenas de outros projetos, no mundo, dão conta do reflorestamento de áreas consideradas importantes para a restauração de biomas devastados pela ação humana. Segundo a FAO, *Food and Agriculture Organization*, a taxa de desaparecimento de florestas diminuiu quase 30% de 2000 até 2018. Não obstante, as florestas tropicais ainda estão sob ameaça, seja pela pastagem de gado na América do Sul e outras regiões ou pela expansão de terras agrícolas, como plantações de dendezeiros na Ásia. Na COP 26, por exemplo, os representantes do governo brasileiro anunciaram antecipar a meta de zerar o desmatamento ilegal de 2030 para 2028, e prometeram alcançar uma redução de 50% até 2027. Trata-se de uma meta difícil de se atingir.

4.4. Energia Renovável

A troca dos combustíveis fósseis por energia renovável é parte fundamental do processo de transição energética. Neste tópico são abordadas as quatro fontes cuja produção vem aumentando substancialmente nos últimos anos: energia eólica, solar, hidrogênio e biomassas.

4.4.1. Energia eólica

A energia eólica, basicamente, é a transformação da energia do vento (energia cinética) em energia útil, utilizando-se de aerogeradores para produzir eletricidade. Outras possibilidades são os moinhos de vento para produzir energia mecânica e velas para impulsionar veleiros. A energia eólica está permanentemente disponível, pode ser produzida em qualquer região, é limpa e não produz gás de efeito estufa. O impacto ambiental, em geral, é menor que outras fontes de energia.

Um aerogerador é composto de pás que se movimentam com a velocidade dos ventos, fazendo um rotor girar. Este, por sua vez, transmite a rotação multiplicada ao gerador, que transforma energia mecânica em energia elétrica. Em geral, o rotor de um aerogerador funciona quando o vento atinge uma velocidade superior a 10 km/h. Já acima dos 90 km/h, a turbina eólica para por motivo de segurança. Os movimentos das massas de ar na atmosfera se dão em regime turbulento, e a velocidade instantânea do vento é descrita como um valor médio somado a um desvio a partir da média (flutuação), ou seja:

$$v = \bar{v} + v' \tag{2}$$

onde v é a velocidade do vento que chega na turbina, $\bar{v}$ é a velocidade média do vento e v' é o desvio.

a) Torres eólicas

Os parques eólicos são conjuntos de dezenas ou até centenas de aerogeradores ligados a uma rede de transmissão de energia elétrica. Alguns parques eólicos são montados próximos à costa, chamados de *parques offshore*, nos quais a força do vento é, em geral, superior e mais estável que em terra, e o conjunto tem menor impacto visual, embora com custo de operação e manutenção (O&M) superior ao de *parques onshore*. Um parque eólico é constituído por vários componentes, entre eles:

- Rotor – transforma energia cinética do vento em energia mecânica de rotação.
- Transmissão e caixa multiplicadora – transmite a energia mecânica entregue pelo eixo do rotor até a carga.
- Gerador elétrico – converte a energia mecânica em energia elétrica.
- Mecanismo de controle – orientação do rotor, controle de velocidade, controle da carga etc.
- Torre – sustenta e posiciona o rotor na altura conveniente.
- Sistema de armazenamento – armazena a energia para produção de energia firme a partir de uma fonte intermitente.
- Transformador – acoplamento elétrico entre o aerogerador e a rede elétrica.
- Acessórios – componentes periféricos.

b) Eficiência dos parques eólicos

De acordo com o físico alemão Albert Betz (lei de Betz de 1919), a fração máxima de energia que pode ser aproveitada em uma turbina eólica é de 59,3%. Ou seja, mesmo que o sistema eletromecânico seja ideal, só é possível obter 59,3% (16/27) da energia cinética dos ventos, ou seja:

$$\mathrm{P} = \frac{16}{27}\frac{\rho \mathrm{A} v^3}{2} \tag{3}$$

onde P é a potência da turbina, ρ é a densidade da massa do ar que entra na turbina, A é a área varrida pela turbina e v é a velocidade do vento que chega na turbina. Estima-se uma média de 1 Watt/m² e uma capacidade de 2 a 10 MW/km² para parques de grande dimensão.

4.4.2. Energia solar

Existem três tipos básicos de energia solar:

- Solar fotovoltaica – com três arranjos possíveis:

  On grid – a energia é gerada por meio de placas, mas ligada à rede concessionária, sem necessidade de bateria para armazenamento.

  Off grid – sistema isolado ou autônomo não conectado à nenhuma infraestrutura, mas necessita de baterias para atender à noite ou em horários de baixa incidência solar.

Modelo híbrido – conectado à rede, mas com baterias para *backup*.

- Solar térmica – energia obtida pela captação do calor do sol através de aquecedores solares, utilizada em geral para aquecimento de água. Os aquecedores não geram eletricidade, são coletores com fileiras de tubos cheios de água, que, ao captar o calor do sol, aquecem o líquido dentro dos tubos e o armazenam em um reservatório para uso posterior.
- Solar heliotérmica – energia obtida por meio de sistemas que absorvem a radiação do sol através de uma série de espelhos ou concentradores. Essa concentração do calor do sol produz vapor, que movimenta turbinas e aciona geradores, produzindo energia termoelétrica.

A energia solar fotovoltaica é obtida diretamente pela incidência de raios solares captados por placas fotovoltaicas. O uso de painéis solares tem como função coletar fótons da luz solar que, ao colidirem com os átomos de silício ou outro semicondutor do painel solar, geram um deslocamento de elétrons, criando uma corrente elétrica. Esse fenômeno é chamado de efeito fotovoltaico ou fotoelétrico.

a) Efeito fotoelétrico – Efeito Hertz

O efeito fotoelétrico foi observado pela primeira vez por Becquerel em 1839 e confirmado por Hertz em 1887, razão pela qual é também chamado de efeito Hertz. Simplificadamente, uma luz de alta frequência libera elétrons de um material, e a energia do fóton liberada é expressa pela seguinte relação:

$$\mathrm{E} = \frac{hc}{\lambda} \tag{4}$$

onde E é a energia do fóton, h é a constante de Planck ($6{,}63\times10^{-34}$ m^2kg/s), é a velocidades da luz no vácuo (≈300 milhões de m/s) e λ é o comprimento de onda (quanto maior a frequência, menor o comprimento de onda e, portanto, maior a energia do fóton). Para se determinar energia de um fóton em eV[100], usando o comprimento de onda em micrômetros, a equação é:

$$\mathrm{E_{eV}} = \frac{1{,}2398}{\lambda_{\mu m}} \tag{5}$$

Assim, a energia de um fóton de comprimento de onda de 1 μm (próximo à da radiação infravermelho) é aproximadamente 1,2398 eV. Considerando que $c/\lambda = f$, onde f é a frequência do fóton, a equação da energia pode ser simplificada para $E = hf$

4.4.3. Hidrogênio

O hidrogênio, o primeiro elemento da tabela periódica, é um gás incolor, inodoro, insolúvel na água, menos denso que o ar e o mais leve de todos os elementos. Possui número atômico 1 e tem, como isótopos pesados, o deutério e o trítio. Embora não seja o elemento mais abundante na Terra, é o mais abundante no universo. O hidrogênio, enquanto combustível, pode ser de diferentes ‘’cores’’:

- Hidrogênio *cinza* – produzido a partir de combustíveis fósseis, resultando em média 10 $kgCO_2/kgH_2$, sem processo de captura e armazenamento do carbono (CCS) em sua obtenção.
- Hidrogênio *azul* – produzido a partir de combustíveis fósseis, mas acompanhado de captura e armazenamento de carbono (CCS), resultando 3,5 a 4 $kgCO_2/kgH_2$.
- Hidrogênio *verde* – obtido a partir da eletrólise da água, desde que a energia utilizada no processo seja de fontes renováveis, sem emissão de CO_2 (0 $kgCO_2/kgH_2$).

[100] Um elétron-volt, aproximadamente $1{,}60218\times10^{-19}$ joules, é a energia gerada por um elétron ao ser acelerado por uma diferença de potencial de 1 volt.

a) Eletrólise da água

A eletrólise da água é a decomposição química da água (H_2O) em oxigênio (O_2) e hidrogênio (H_2) por efeito da passagem de uma corrente elétrica contínua. Por esse processo, o hidrogênio é gerado no catodo (eletrodo ligado ao terminal negativo) e oxigênio no anodo (eletrodo ligado ao terminal positivo), conforme esquema da Figura 8.

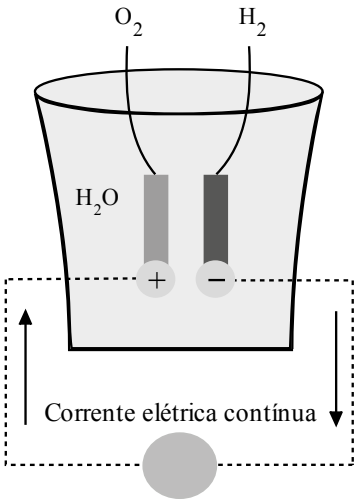


Figura 8 – Eletrólise da água.

Esse processo demanda bastante energia, e sua eficiência energética é de cerca de 80%, o que quer dizer que, para gerar 80 kWh são necessários 100 kWh de eletricidade. Nesse tipo de produção, é possível que a emissão de carbono seja zero, mas isso depende da fonte de eletricidade usada. O processo eletrolítico raramente é utilizado em aplicações industriais (custo ainda elevado), uma vez que é possível produzir hidrogênio de forma mais eficiência por meio de combustíveis fósseis (custo menor). Com o desenvolvimento de novas plantas de hidrogênio verde, é possível que em breve a diferença de custos comece a diminuir em relação ao hidrogênio azul.

b) Reforma a vapor do metano (SMR) e reforma autotérmica de metano (ATR)

De acordo com a IEA (2019), algo em torno de 60% da produção global de hidrogênio tem o gás natural como matéria-prima, e a tecnologia dominante é a reforma a vapor do metano sem CCS (em inglês, *steam methane reforming* – SMR, ver Figura 9).

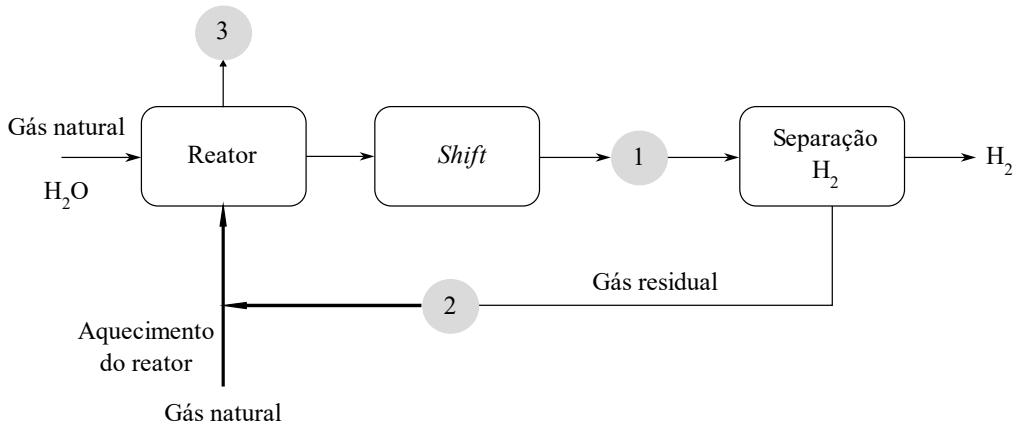


Figura 9 – Reforma a vapor do metano.

Conforme ilustrado simplificadamente na Figura 9, o processo SMR se baseia na alimentação de metano e vapor d'água em um reator, produzindo gás de síntese a partir de uma reação endotérmica a 500-900 °C. Esse gás de síntese é composto majoritariamente de hidrogênio e monóxido de carbono. Na sequência, o gás de síntese passa pela reação de deslocamento gás-água (reação de *shift*), que consiste na reação do monóxido de carbono (CO) com vapor d'água, produzindo mais H_2 e CO_2. Na Figura 9, os pontos 1, 2 e 3 são opções de localização para captura de CO_2 em planta com tecnologia SMR, resultando o hidrogênio azul.

Para a produção do hidrogênio azul, que conta com CCS, a captura de 35 a 40% de CO_2 é desafiadora. Enquanto a remoção dos 60 a 65% do CO_2 produzidos pela reforma e reação de *shift* é feita a partir de correntes com concentrações e pressões parciais de CO_2 favoráveis (ponto 1), o CO_2 nos gases de exaustão está em condições mais restritivas para a captura devido à diluição deste gás pelo nitrogênio (N_2) atmosférico, oriundo da utilização de ar para a combustão do gás natural durante o aquecimento, o que exige esforços adicionais em termos de equipamentos e operação, resultando em custos maiores (ponto 3).

A remoção do CO_2 do gás de síntese pode ser realizada em dois pontos: antes ou depois da separação do H_2 (pontos 1 e 2, respectivamente). Apesar das diferenças de características das correntes das quais o CO_2 é separado, as tecnologias para obtenção do CO_2 a partir do gás de síntese e do gás de exaustão são similares. Trata-se de processos típicos de separação de misturas gasosas. As principais tecnologias para remoção do CO_2 são as técnicas de absorção física ou química usando um solvente líquido seletivo, ou ainda, a adsorção em materiais sólidos porosos. Para a captura de CO_2 de gases de exaustão (ponto 3), há diferentes tecnologias disponíveis comercialmente e em fase inicial de desenvolvimento.

Outra opção tecnológica de produção de hidrogênio a partir do gás natural é a reforma autotérmica de metano (ATR), que combina o processo de reforma a vapor com a oxidação parcial do metano. Nessa configuração, a liberação de calor da oxidação parcial (reação exotérmica) supre a reforma (endotérmica), o que exclui a necessidade de suprimento externo de calor. Na sequência, tal como nas plantas SMR, é realizada a reação de *shift* com o objetivo de maximizar a conversão do CO e a produção de H_2 e CO_2. Assim, todo o CO_2 do processo ATR é produzido na corrente principal, em condições favoráveis à captura – o que permite taxas de captura elevadas para o processo, limitadas apenas à eficiência do sistema de separação escolhido. A tendência é que prevaleça a tecnologia ATR sobre a SMR.

4.4.4. Biomassa

Biomassa é toda matéria orgânica, de origem vegetal ou animal, utilizada na produção de energia. A biomassa é utilizada diretamente como combustível ou por meio da produção de energia a partir de processos de pirólise, gaseificação e combustão de material orgânico presente em um ecossistema. Resíduos industriais e coprodutos, resíduos alimentares, resíduos agrícolas, culturas energéticas e madeira não tratada são aproveitadas em usinas como combustível para produzir bioenergia. Quando o CO_2 é extraído do gás de exaustão da usina e armazenado no subsolo, o processo é chamado de bioenergia com captura e armazenamento de carbono (BECCS, *bioenergy with carbon capture and storage*).

A biomassa é uma fonte renovável de energia, sendo uma alternativa viável para substituir os combustíveis fósseis. No entanto, requer o desmatamento e a substituição de áreas de vegetação nativa por monocultura, além de ser uma fonte de baixa eficiência energética. Já as vantagens das biomassas são:

- É um biocombustível de 1ª geração (de origem agrícola e/ou urbana).
- Reduz a degradação de materiais orgânicos em ambientes não adequados.
- É renovável e é uma fonte de energia limpa.

A cana-de-açúcar, por exemplo, depois de moída pode produzir o açúcar e o etanol, e da palha e do bagaço podem-se produzir o biogás, energia elétrica e o etanol de segunda geração. Este último, denominado E2G, também chamado de etanol celulósico, é um biocombustível feito a partir dos resíduos restantes do processo de fabricação do açúcar e do etanol de primeira geração, E1G. Ou seja, o E1G e o açúcar são produzidos a partir

da cana-de-açúcar, enquanto o E2G é feito da palha e do bagaço da cana-de-açúcar, que são resíduos da produção de E1G e do açúcar. Esse mesmo combustível (E2G), obtido por meio da fermentação controlada e da destilação de resíduos vegetais, pode vir da beterraba, trigo ou milho, por exemplo. A principal desvantagem na produção de E2G é que, por enquanto, não é economicamente viável.

a) Biorrefinarias

São unidades industriais que integram equipamentos e processos de conversão de biomassa na produção de combustíveis, eletricidade, calor e derivados refinados. O conceito de uma biorrefinaria é análogo às refinarias de petróleo, que produzem combustíveis e derivados de petróleo. Vários são os processos de uma biorrefinaria, entre eles estão:

- Físicos – densificação da biomassa, secagem e extração.
- Termoquímicos:

  Combustão – é realizada em caldeira que queima a biomassa gerando vapor. Esse vapor movimenta turbinas que convertem força motriz em energia elétrica. A energia térmica gerada pela combustão é convertida em energia mecânica, que por sua vez gera energia elétrica.

  Carbonização – é o processo mais antigo de conversão da biomassa sólida. É um tipo de pirólise (ou decomposição térmica) em que se rompe a estrutura molecular da biomassa quando exposta a altas temperaturas. Na carbonização a biomassa é aquecida e quando o oxigênio é reduzido ocorre a extração do material volátil, resultando em carvão que pode ser utilizado para queima. Infelizmente é um processo que emite muito GEEs, razão pela qual tem sido evitado.

  Gaseificação e liquefação – utiliza-se para tanto a biomassa líquida, que ao se decompor em ambiente controlado gera gases. Esses gases são queimados para movimentar turbinas de geração de energia elétrica ou destinados para a produção de biogás e biometano.

- Bioquímicos:

  Digestão anaeróbia de resíduos – é um processo de degradação da matéria orgânica, por microrganismos anaeróbios, que produz biogás, um gás calorífico composto por metano, gás carbônico, sulfeto de hidrogênio e vapor de água, dentre outros gases. Os resíduos são da agroindústria, de restaurantes, feiras, supermercados, resíduos domiciliares, lodo de esgoto, entre outros. O biogás gerado é utilizado para a geração de energia elétrica, energia térmica em caldeiras e fogão doméstico, ou refinado e transformado em biometano para abastecimento de veículos movidos a GNV.

  Fermentação – é um processo biológico executado pela ação de leveduras que convertem os açúcares presentes nas biomassas em álcool, como a cana-de-açúcar, o milho e a beterraba. O resultado da fermentação é a produção de etanol e metanol.

  Transesterificação – trata-se de uma reação química com álcoois de cadeia curta que leva a transformação de óleos ou gorduras de origem vegetal ou animal em biodiesel.

b) Biodiesel

O biodiesel é um combustível renovável obtido a partir da transesterificação. Por meio desse processo, os triglicerídeos presentes nos óleos e gordura animal reagem com um álcool primário, metanol ou etanol, gerando o biodiesel. As principais matérias-primas para a produção do biodiesel são: soja, milho, algodão, mamona, babaçu, palma (dendê) e macaúba, entre outras oleaginosas.

O uso do biodiesel está associado à substituição de combustíveis fósseis em motores do ciclo diesel, sem haver necessidade de nenhuma modificação do motor. Pode ser consumido puro (B100), em mistura com o diesel de petróleo (B20) ou em uma proporção mais baixa, como aditivo de 1% a 5% (B1 a B5).

Além de ser uma tecnologia limpa, o emprego do biodiesel no óleo diesel de petróleo polui menos o meio ambiente, podendo reduzir a dependência de importações de diesel e trazer vantagens econômicas, pois

sua produção e o cultivo das matérias-primas podem criar empregos, sobretudo na agricultura familiar das regiões mais pobres do Brasil.

4.5. Perspectivas

A IEA, em seu relatório anual (*World Energy Outlook*), exibe gráficos de tendências relacionadas à produção global de energia, seja de origem fóssil ou renovável, considerando três cenários:

- STEPS – Cenário de Políticas Declaradas (*Stated Policies Scenario*), baseado nas proposições políticas mais recentes, incluindo energia, clima e políticas industriais relacionadas.
- APS – Cenário de Promessas Anunciadas (*Announced Pledges Scenario*), por meio do qual se considera que todas as metas nacionais em matéria de energia e clima definidas pelos governos sejam cumpridas na íntegra.
- NZE – Cenário de Emissões Líquidas Zero até 2050 (*Net Zero Emissions*), cenário que limitaria o aquecimento global a 1,5 °C até o final do século.

O investimento e a implantação em energia limpa aumentaram rapidamente em resposta ao mercado e aos incentivos financeiros fornecidos pelos governos, a partir de produtos fabricados com tecnologias de energia fotovoltaica, turbinas eólicas e veículos elétricos. As vendas residenciais com bombas de calor e armazenamento de baterias estacionárias também estão aumentando rapidamente. Desde o Acordo de Paris, assinado em 2016, quase 1 terawatt (TW) de capacidade solar fotovoltaica foi adicionado ao sistema global – quase o equivalente à capacidade total de eletricidade instalada na União Europeia.

Os Estados Unidos, por meio da lei de redução adotada em 2022, abriram linhas de financiamento sem precedentes para apoiar a implantação e reduzir os custos de tecnologias de baixas emissões, sobretudo CCUS. E os sucessivos planos quinquenais da China aumentaram progressivamente as ambições para energia solar fotovoltaica, reduzindo os custos globais.

O número de pessoas sem acesso à eletricidade em todo o mundo diminuiu em mais de 45% desde 2010, impulsionado principalmente pelo progresso da Ásia. No entanto, mais de 760 milhões de pessoas ainda não têm acesso à eletricidade. A situação é mais crítica nos países da África Subsaariana, onde vivem cerca de 80% das pessoas sem acesso à eletricidade. Embora tenha havido algumas melhorias recentes na África Subsaariana, estas não acompanharam o crescimento populacional, resultando em um aumento de 2,5% no número de pessoas sem acesso à eletricidade desde 2010.

Quase 2,3 bilhões de pessoas utilizam hoje biomassa tradicional, carvão ou querosene para cozinhar, e a maioria mora em países da África Subsaariana. No cenário STEPS, o número de pessoas sem acesso às instalações de cocção limpa cairia para 15% até 2030. Se todas as metas nacionais para cocção limpa forem alcançadas até 2030, conforme assumido no cenário APS, o número de pessoas sem acesso cairia em dois terços, mas cerca de 735 milhões de pessoas permaneceriam sem acesso. No cenário NZE, o acesso universal à cocção limpa seria alcançado até 2030, tal como o acesso à eletricidade.

4.5.1. Carvão, óleo e gás

De acordo com a IEA, no cenário STEPS, a procura por combustíveis fósseis diminuirá em relação à década de 2020 em uma média de três exajoules (EJ) por ano até 2050. Os setores de energia, aço e cimento declararam políticas de modo que a procura global de carvão atinja o pico em meados da década de 2020, em torno de 5,8 Gtce (gigatoneladas de carvão equivalente).

Nas últimas duas décadas, a procura por petróleo aumentou 18 milhões de barris por dia. Muito desse aumento foi impulsionado pela demanda no transporte rodoviário. A frota global de automóveis se expandiu em mais de 600 milhões de carros nos últimos 20 anos, e a atividade de frete rodoviário aumentou quase 65%.

Sabe-se que a demanda por petróleo varia entre regiões. Nas economias avançadas, o pico se deu em 2005, e o declínio tornou-se mais evidente a partir da década de 2020. Na China, por exemplo, a taxa de crescimento da demanda está reduzindo, e deve diminuir ainda mais no longo prazo. Em mercados emergentes e economias em desenvolvimento (exceto a China), a procura de petróleo crescerá continuamente até 2050, decorrente do crescimento da população e da posse de automóveis. Embora a demanda por petróleo para produtos petroquímicos, aviação e transporte marítimo continue aumentando até 2050, as reduções na demanda do transporte rodoviário, setores de energia e residências serão maiores, e como resultado, a demanda por petróleo atingirá o pico antes de 2030 (≈ 105 MM bbl/dia). O declínio, no entanto, será lento até 2050.

A ‘’era de ouro do gás’’, termo cunhado pela IEA em 2011, está terminando. A demanda global de gás natural aumentou em média quase 2% desde 2011, mas o crescimento desacelera para menos de 0,4% ao ano até 2030 no cenário STEPS. Os setores de energia e residência, maiores consumidores de gás natural, representam 39% e 21%, respectivamente, do total da demanda.

É importante ressaltar que já ocorreram os picos nas adições de capacidade de gás natural para usinas de energia e caldeiras de aquecimento, e a demanda fraca nesses dois setores reduz o uso de gás natural o suficiente para atingir o pico em 2030 (≈ 4,3 trilhões de metros cúbicos por ano). Os Estados Unidos são os maiores produtores de gás natural do mundo, com 962 bilhões de m^3 anuais, seguidos da Rússia com 678 bilhões de m^3.

4.5.2. Energia solar fotovoltaica

A produção de energia solar hoje é altamente concentrada – apenas cinco países respondem por mais de 90% da capacidade global. A China é, de longe, o maior produtor, com capacidade para instalar módulos superiores a 500 GW por ano. Embora menos de 40 países tenham capacidade para produzir módulos solares, mais de 100 países concluíram, em 2022, projetos solares fotovoltaicos que dependiam, principalmente, de painéis solares importados. A China é o maior exportador, tendo a União Europeia e os EUA como maiores importadores.

A China, Índia e os EUA lideram os maiores parques solares do mundo (algo em torno de 70% do consumo mundial). Em 2021, por exemplo, a capacidade de geração de energia solar era de 1,040 TW, e em 2022 houve um crescimento de 24%, chegando a 1,289 TW. A energia solar responde por 1/3 da energia renovável global, e é a fonte que mais cresce (ver Figura 10).

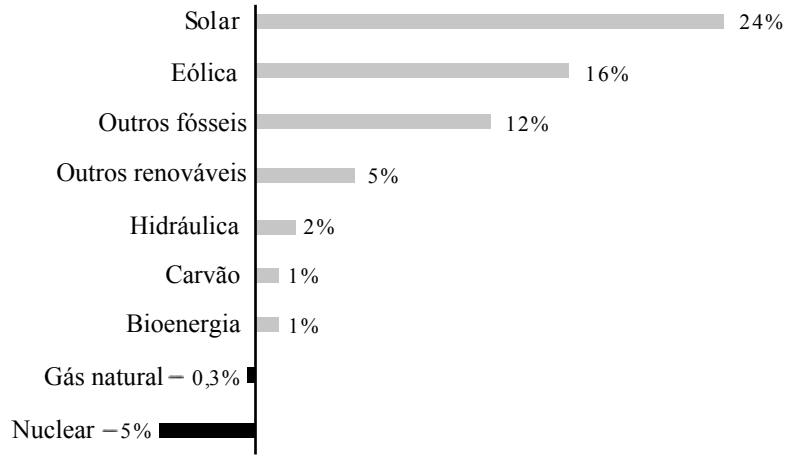


Figura 10 – Taxa de crescimento – 2021 a 2022 (*Global Market Outlook for Solar Power*).

4.5.3. Demais fontes de energia

As energias renováveis forneceram 30% da eletricidade gerada em todo o mundo em 2022, e esse número deverá aumentar para 50% até 2030 no cenário STEPS. Já a energia hidrelétrica pode variar amplamente. Os

altos custos iniciais de capital e as limitações de locais favoráveis restringem as perspectivas de crescimento. Outras energias renováveis – bioenergia, geotérmica, energia solar térmica e energia marítima – também têm um papel a desempenhar, mas a energia solar fotovoltaica e a eólica são as tecnologias principais para descarbonizar mais rapidamente o suprimento de energia elétrica no mundo. A capacidade de produção de renováveis expandirá 2,4 vezes no cenário STEPS até 2030; 2,7 vezes no APS e triplicará no cenário NZE, sendo que 95% desse crescimento virá da energia solar fotovoltaica e eólica. A geração total de energia eólica e solar fotovoltaica deverá aumentar substancialmente até 2030, dando maior flexibilidade ao sistema energético global.

A energia nuclear é, hoje, a segunda maior fonte de energia com baixas emissões em todo o mundo, atrás apenas da hidrelétrica, e é superior à energia eólica ou solar fotovoltaica. Nas economias avançadas, a energia nuclear é a maior fonte de eletricidade com baixa emissão. Depois de uma década após o acidente da Central Nuclear de Fukushima, no Japão, uma mudança no cenário político vem criando oportunidades para um regresso à produção de energia nuclear.

4.6. CAPEX e O&M de Projetos de Energia

No contexto da indústria do petróleo, por exemplo, um analista de projetos de produção deve investigar os custos dos projetos de energia renovável, uma vez que podem servir como referência para o custo de oportunidade dos projetos de energia fóssil, e vice-versa. Daí a necessidade de se conhecer o CAPEX e os custos de O&M dos projetos de energia, que divergem muito entre os países. A Tabela 10 a seguir indica o CAPEX, o fator de capacidade, O&M, LCOE e VALCOE para projetos de energia de algumas regiões no mundo. Mas antes, algumas observações são necessárias para melhor entendimento dos valores:

- Todos os custos são expressos em US$ do ano de 2022.
- O gás de turbina é de ciclo combinado, de forma que o calor dos gases de exaustão produzidos na queima do combustível da turbina a gás é aproveitado para gerar vapor em caldeiras. Esse vapor, por sua vez, movimenta turbinas a vapor (cogeração).
- Os principais componentes para o custo nivelado de eletricidade (LCOE, *levelised cost of electricity*) incluem: custo *overnight* de capital[101], fator de capacidade (produção média ao longo do ano em relação à capacidade nominal máxima), custos dos combustíveis e operação e manutenção (O&M). A vida econômica é de 25 anos para energia solar fotovoltaica e eólica (*onshore* e *offshore*).
- O custo nivelado de eletricidade com valor ajustado (VALCOE, *value-adjusted levelised cost of electricity*) incorpora informações sobre custos e variáveis informadas pelo sistema. O objetivo é fornecer uma métrica mais completa de competitividade para as tecnologias de geração de energia.
- Os custos de combustível, CO_2 e O&M, refletem a média dos dez anos seguintes ao da projeção. Variam, portanto, de acordo com o cenário de 2022. Os custos da energia solar fotovoltaica e eólica não incluem o custo das tecnologias de armazenamento de energia, como baterias. O custo de capital (CAPEX) para a energia nuclear representa o ‘’enésimo tipo’’ para um novo projeto de reator, com reduções substanciais de custos em relação aos projetos pioneiros.

De acordo com os dados, tanto a energia solar fotovoltaica como a eólica *onshore* se tornaram competitivas em relação ao carvão e energia nuclear para geração de eletricidade, perdendo apenas para o gás natural. Note também que a eólica *offshore* ainda exibe um CAPEX elevado em relação às demais soluções, exceto para a energia nuclear nos EUA e União Europeia. Na China e na Índia, o CAPEX para eólica *offshore* e nuclear são praticamente equivalentes. Já na União Europeia, o LCOE do gás natural é o dobro da China e mais que o tripo dos EUA.

[101] É o custo de uma usina (CAPEX) caso fosse construída durante uma noite, dividido pela potência máxima intantânea que ela pode fornecer.

A equação do LCOE segue a seguinte expressão:

$$\mathrm{LCOE} = \frac{\sum_{t=0}^{vida\ útil} \frac{(\mathrm{I}_t + \mathrm{O\&M}_t + \mathrm{F}_t)}{(1+\mathrm{TMA})^t}}{\sum_{t=0}^{vida\ útil} \frac{\mathrm{E}_t}{(1+\mathrm{TMA})^t}} \quad (6)$$

onde I é o custo *overnight* de capital (CAPEX), é o custo de manutenção e operação, F o dispêndio com combustível, E representa a soma da eletricidade gerada e TMA é a taxa mínima de atratividade do projeto.

Tabela 10 – CAPEX, fator de capacidade, insumos e O&M – projetos de energia de algumas regiões (cenário STEPS)

Região/País	CAPEX (*overnight*) (US$/kW)			Fator de Capacidade (%)			Comb., CO_2, O&M (US$/MWh)			LCOE (US$/MWh)			VALCOE (US$/MWh)		
	2022	2030	2050	2022	2030	2050	2022	2030	2050	2022	2030	2050	2022	2030	2050
EUA															
Nuclear	5000	4800	4500	90	90	90	30	30	30	105	105	100	105	105	100
Carvão	2100	2100	2100	35	15	n.a.	30	25	25	100	210	n.a.	100	205	n.a.
Gás	1000	1000	1000	55	40	15	45	40	40	65	70	120	65	65	75
Solar PV	1120	690	480	21	22	23	10	10	10	50	30	25	55	55	60
Eólica *onshore*	1220	1160	1110	42	43	44	10	10	10	30	30	30	35	40	40
Eólica *offshore*	4060	2520	1900	42	46	49	35	20	15	120	70	50	125	80	60
União Europeia															
Nuclear	6600	5100	4500	70	75	80	35	35	35	160	130	110	160	130	110
Carvão	2000	2000	2000	30	n.a.	n.a.	125	150	160	205	n.a.	n.a.	190	n.a.	n.a.
Gás	1000	1000	1000	20	10	n.a.	170	125	130	230	270	n.a.	205	190	n.a.
Solar PV	990	620	450	14	14	14	10	10	10	65	40	35	80	85	90
Eólica *onshore*	1750	1670	1610	29	30	30	20	15	15	60	55	55	65	65	60
Eólica *offshore*	3420	2280	1740	50	56	59	15	10	10	75	45	35	75	55	40
China															
Nuclear	2800	2800	2500	80	75	70	25	25	25	70	70	65	70	70	65
Carvão	800	800	800	50	30	20	50	60	70	65	90	115	65	70	65
Gás	560	560	560	30	20	15	95	95	100	120	130	140	105	100	90
Solar PV	720	430	300	13	13	14	10	10	10	50	30	25	65	60	70
Eólica *onshore*	1100	1040	1000	26	27	28	10	10	10	45	40	35	50	50	50
Eólica *offshore*	2820	1880	1420	32	39	43	25	15	10	100	60	40	105	65	40
Índia															
Nuclear	2800	2800	2800	80	85	90	30	30	30	70	70	65	70	70	65
Carvão	1200	1200	1200	65	70	70	40	35	30	60	55	50	60	50	40
Gás	700	700	700	25	40	45	95	70	60	125	90	80	120	70	50
Solar PV	640	390	270	20	21	22	5	5	5	40	25	15	45	40	55
Eólica *onshore*	1120	1060	1010	26	28	30	15	10	10	55	45	40	60	50	55
Eólica *offshore*	3060	2060	1500	33	37	39	25	20	15	135	85	60	135	90	65

▪▪▪▪▪▪

Exemplo 1 – Uma turbina eólica *offshore* nos EUA é construída a um custo *overnight* de capital de US$ 2,609 milhões. Os custos de O&M são de US$ 197 mil por ano. Não há custo de combustível, a vida útil da turbina é de 25 anos e estima-se que produza 5,629 milhões de kWh por ano. Considerando uma taxa mínima de atratividade de 18%, determine o LCOE (US$/MWh), a potência instalada, o CAPEX em US$/kWh e O&M em US$/MWh.

Solução

Tabela 11 – Fluxo de caixa do Exemplo 1

Fluxo de Caixa (US$ mil)	0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	...	Ano 25
Investimento inicial	2.609,00					
O&M		197,00	197,00	197,00		197,00
Valor Presente Líquido	2.609,00	166,85	141,31	119,68		3,10
Total VPL (US$ mil)	3.681,92					
Total de energia gerada (mil kWh)		5.629	5.629	5.629		5.629
Valor Presente Líquido (mil kWh)		4767	4037	3419		88
Total VPL (mil kWh)	30.654,88					
LCOE (US$/MWh)	120					

A potência instalada é de 643 kW, o CAPEX (*overnight*) é de US$ 4.061/kWh e o O&M fica em US$ 35/MWh (compare os valores com os da Tabela 10).

▪▪▪▪▪▪

5

ANEXO – FATORES DE CONVERSÃO

Para o bem ou para o mal, nas ideias, e não nos interesses, está o perigo.
J. M. Keynes

Tabela 1 – Fatores de conversão – Energia (Fonte EPE BEM 2022)

	EJ	Gcal	Mtoe	MBtu	bcme	GWh
EJ	1	$2{,}388\times10^{8}$	23,88	$9{,}478\times10^{8}$	27,78	$2{,}778\times10^{5}$
Gcal	$4{,}1868\times10^{-9}$	1	10^{-7}	3,968	$1{,}163\times10^{-7}$	$1{,}163\times10^{-3}$
Mtoe	$4{,}1868\times10^{-2}$	10^{7}	1	$3{,}968\times10^{7}$	1,163	11.630
MBtu	$1{,}0551\times10^{-9}$	0,252	$2{,}52\times10^{-8}$	1	$2{,}932\times10^{-8}$	$2{,}931\times10^{-4}$
bcme	0,036	$8{,}60\times10^{6}$	0,86	$3{,}41\times10^{-7}$	1	9.999
GWh	$3{,}6\times10^{-6}$	860	$8{,}60\times10^{-5}$	3.412	10^{-4}	1

1 EJ = 10^{18} J; Mtoe = milhão de tonelada de óleo equivalente (tonelada equivalente de petróleo); bcme = bilhão de m^3 de gás natural equivalente.

Tabela 2 – Coeficientes de equivalência calórica (Fonte EPE BEM 2022)

	Óleo combustível (m^3)	Gás natural seco (1000 m^3)	Carvão mineral 5200 (t)	GLP (m^3)	Lenha (t)	Carvão vegetal (t)
Óleo combustível (m^3)	1,00	1,09	1,94	1,56	3,06	1,48
Gás natural seco (1000 m^3)	0,92	1,00	1,78	1,43	2,80	1,36
Carvão mineral 5200 (t)	0,52	0,56	1,00	0,80	1,58	0,76
GLP (m^3)	0,64	0,70	1,25	1,00	1,97	0,95
Lenha (t)	0,33	0,36	0,63	0,51	1,00	0,49
Carvão vegetal (t)	0,67	0,73	1,31	1,05	2,06	1,00

Tabela 3 – Relações entre unidades

Exponenciais	Equivalências	Relações úteis
(k) kilo =10^3	1 m^3 = 6,28981 barris	1 tonelada métrica = 1000 kg
(M) mega = 10^6	1 barril = 0,158987 m^3	1 tonelada longa = 1016 kg
(G) giga = 10^9	1 J = 0,239 cal	1 tonelada curta = 907,2 kg
(T) tera = 10^{12}	1 Btu = 252 cal	1 libra = 0,454 kg
(P) peta = 10^{15}	1 m^3 de petróleo = 0,884 t	1 tep = 7,2 bep
(E) exa = 10^{18}	1 tep (toe) = 10000 Mcal	1 bep = 0,14 tep

Tabela 4 – Coeficientes de equivalência médios para os combustíveis líquidos (Fonte EPE BEM 2022)

m^3	Gcal	tep (10^4 kcal/kg)	bep (boe)	tec (tce) (7000 kcal/kg)	GJ	10^6 BTU	Mwh (860 kcal/kg)
Petróleo	8,90	0,890	6,26391	1,271	37,26	35,318	10,35
Óleo diesel	8,48	0,848	5,97	1,211	35,50	33,651	9,86
Óleo combustível	9,57	0,957	6,73	1,367	40,07	37,977	11,13
Gasolina automotiva	7,70	0,770	5,42	1,100	32,24	30,556	8,96
Gasolina de aviação	7,63	0,763	5,37	1,090	31,95	30,278	8,87
GLP	6,11	0,611	4,30	0,873	25,58	24,246	7,11
Nafta	7,65	0,765	5,38	1,093	32,03	30,367	8,90
Querosene iluminante	8,22	0,822	5,78	1,174	34,42	32,619	9,56
Querosene de aviação	8,22	0,822	5,78	1,174	34,42	32,619	9,56
Álcool etílico anidro	5,34	0,534	3,76	0,763	22,36	21,191	6,21
Álcool etílico hidratado	5,10	0,510	3,59	0,729	21,35	20,238	5,93

Tabela 5 – Coeficientes de equivalência médios para os combustíveis sólidos (Fonte EPE BEM 2022)

tonelada	Gcal	tep (10^4 kcal/kg)	bep (boe)	tec (tce) (7000 kcal/kg)	Gj	10^6 BTU	Mwh (860 kcal/kg)
Carvão mineral 5200	4,90	0,490	3,45	0,700	20,52	19,44	5,70
Carvão metal. nacional	6,42	0,642	4,52	0,917	26,68	25,48	7,47
Carvão metal. importado	7,40	0,740	5,21	1,057	30,98	29,37	8,61
Lenha	3,10	0,310	2,18	0,443	12,98	12,30	3,61
Bagaço de cana	2,13	0,213	1,50	0,304	8,92	8,45	2,48
Carvão vegetal	6,46	0,646	4,55	0,923	27,05	25,64	7,51

REFERÊNCIAS

Allais, M. (1956), Évaluation des perspectives économiques de la recherche minière sur de grands espaces – application au Sahara Algérien. Revue de l'Industrie Minérale, Paris, pp. 329–383.

Aquino, S.T. (2016), *Suma teológica*. 1a Pars – Volume 1, Ecclesiae; 1ª edição, 763 pp.

Aristóteles (2018), *Ética a Nicômaco*. Edipro; 4ª edição, 392 pp.

Aristóteles (2019), *A política*. Edipro; 1ª edição, 352 pp.

Arps, J.J., Arps, J.L. (1974), *Prudent risk taking*. Journal of Petroleum Technology, pp. 711–716.

Arrow, K.J. (1965), *Aspects of the theory of risk-bearing*. Cambridge University Press.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D. (1999), *Coherent measures of risk*. Mathematical Finance 9: pp. 203–228.

Barreiros, D.P. (2009), *The Brazilian delegation in the making of the Bretton Woods international agreements* (1942-1944). História, v.28, n.2, pp. 515-570.

Bellman, R.E. (1957), *Dynamic programming*. New Jersey: Princeton University Press.

Bentham, J. (1823), *An introduction to the principles of morals and legislation*. Oxford: Clarendon Press (original edition dated 1789).

Bernanke, B.S. (1983), *Nonmonetary effects of the financial crisis in propagations of the great depression*. American Economic Review, American Economic Association, vol. 73(3), pp. 257-276.

Bernoulli, D. (1738), *Specimen theoriae novae de mensura sortis*. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5, pp. 175–192.

Bernoulli, D. (1954), *Exposition of a new theory on the measurement of risk.* Econometrica vol. 22, n 1, pp. 23–36.

Black, F., Scholes, M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, vol. 81, pp. 637–659.

Black, F., Jensen, M., Scholes, M.S. (1972), *The capital asset pricing model: some empirical findings*. In: Jensen, M., Ed., Studies in the Theory of Capital Markets, Praeger Publishers, New York, pp. 79-124.

Blanchard, O. (2017), *Macroeconomia*. Editora Pearson, 7ª Edição, 602 pp.

Bobbio, N. (2003), *O filósofo e a política*. Antologia, organização e apresentação José Fernández Santillán, tradução César Benjamin e Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto.

Bobbio, N. (2004), *Estado, governo, sociedade: para uma teoria geral da política*. Tradução Marco Aurélio Nogueira, 11ª Edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Bontis, N., Fitz-Enz J. (2002), *Intellectual capital ROI: a causal map of human capital antecedents and consequents*. Journal of Intellectual Capital.

Boyle, P.P. (1986), *Option valuation using a three-jump process*. International Options Journal, 3, pp. 5-12.

Brealey, R.A., Myers, S.C. (2006), *Principles of corporate finance*. 8a ed. New York: McGraw-Hill Irwin.

Brennan, M.J. (1973), *An approach to the valuation of uncertain income stream*. Journal of Finance 28, pp. 661–673.

Brennan, M.J., Schwartz, E.S. (1985), *Evaluating natural resource investments*. The Journal of Business 58, pp. 135–157.

Cantillon, R. (2001), *Essay on the nature of commerce in general*. Routledge; 1ª edição, 218 pp.

Cobb, C.W., Douglas, P.H. (1928), *A theory of production*. American Economic Association, pp. 139–165.

Copeland, T., Antikarov, V. (2001), *Real options: a practitioner's guide*. Editora Texere, New York.

Cox, D.R., Miller, H.D. (1965), *The theory of stochastic processes*. Oxford: Oxford University Press, 408 pp.

Cox, J.C., Ross, S.A. (1976), *The valuation of options for alternative stochastic processes*. Journal of Financial Economics, vol 3, pp. 145-166.

Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979), *Option pricing – a simplified approach*. Journal of Financial Economics, vol. 7, pp. 229–264.

Cox, J.C., Ingersoll, J., Ross, S.A. (1985a), *An intertemporal general equilibrium model of asset prices*. Econometrica 53, pp. 363–384.

Cox, J.C., Ingersoll, J., Ross, S.A. (1985b), *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica 53, pp. 385–408.

Cozzolino, J.M. (1977b), *Management of oil and gas exploration risk*. Cozzolino Associates, West Berlim, NJ.

Cramer, G. (1728), *Letter from Cramer to Nicholas Bernoulli*. Translated by Louise Sommer in Bernoulli, D. (1954). Exposition of a new theory on the measurement of risk, Econometrica 22, pp. 23–36.

Cukierman, A. (1980), *The effects of uncertainty on investment under risk neutrality with endogenous information*. Journal of Political Economy, vol. 88, issue 3, pp. 462-75.

Curry, J.A. (2023), *Climate Uncertainty and Risk: Rethinking Our Response*. Editora Anthem Press, 340 pp.

Dias, M.A.G., Rocha, K.M.C. (1999), *Petroleum concessions with extendible options using mean reversion with jumps to model oil prices*. Wassenaar-Leiden (Holanda): Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options.

Dias, M.A.G. (2005), *Opções reais híbridas com aplicações em petróleo*. Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Tese de Doutorado, 509 pp.

Dickey, D.A., Fuller, W.A. (1979), *Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root*. Journal of the American Statistical Association. Vol. 74, pp. 427–431.

Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994), *Investment under uncertainty*. Princeton: Princeton University Press, 468 pp.

Dhrymes, P, Friend, I, Gultekin, B. (1984), *A critical reexamination of the empirical evidence on the pricing theory*. The Journal of Finance, V. 39, N. 2, pp. 323-346.

Emissions Gap Report 2023 – acesso em 26/11/2023, disponível em **https://www.unep.org**.

Empresa de Pesquisa Energética (EPE) – acesso em 26/11/2023, disponível em https://www.epe.gov.br/pt.

Estrada, J. (2002), *Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM*. Emerging Markets Review, n.3, pp. 365-379.

Fama, E.F., French, K.R. (1993), *Common risk factors in the returns on stocks and bonds*. Journal of Financial Economics, v. 33, n. 1, pp. 3-56.

Farhi, M. (1998), *O futuro no presente: um estudo dos mercados de derivativos financeiros*. 303f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Economia, Campinas, SP.

Fishburn, P.C. (1989), *Retrospective on the utility theory of von Neumann and Morgenstern*. Journal of Risk and Uncertainty, vol 2(2), pp. 127–157.

Fisher, I. (1907), *The rate of interest: its nature, determination, and relation to economic phenomena*. New York: Macmillan.

Fisher, I. (1930), *The theory of interest as determined by impatience to spend income and opportunity to invest it*. New York: Macmillan.

Friedman, M. (1970), *The social responsibility of business is to increase its profits*. The New York Times Magazine.

Friedman, M., Friedman, R.D. (1979), *Liberdade de escolher: o novo liberalismo econômico*. Editora Record, 317 pp.

Fundação Getúlio Vargas (2022), *Caderno de transição energética no setor de transportes*. Disponível em https://fgvenergia.fgv.br/.

Furtado C. (2000), *Introdução ao desenvolvimento – Enfoque histórico-cultural*. 3ª edição revista pelo autor. Rio de Janeiro, Paz e Terra.

Galli, A., Armstrong, M., Jehl, B. (1999), *Comparison of three methods for evaluating oil projects*. Journal of Petroleum Technology, October, pp. 44–49.

Gentry, D.W., O'Neil, T.J. (1984), *Mine investment analysis*. New York: American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers (AIME), 505 pp.

Gibson, R., Schwartz, E. (1990), *Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims*. Journal of Finance, vol. 45(3), pp. 959-976.

Giddens, A. (2001), *A terceira via: reflexões sobre o impasse político atual e o futuro da social-democracia*. Tradução de Maria Luiza de A. Borges. Rio de Janeiro: Record.

Gini, C. (1912), *Variabilità e mutabilità: contributo allo studio delle distribuzioni e delle relazioni statistiche*. Fascicolo 1. Tipografia Paolo Cuppini, 158 pp.

Global CCS Institute 2023 – acesso em 26/11/2023, disponível em https://www.globalccsinstitute.com.

Global Market Outlook for Solar Power 2023 – acesso em 26/11/2023, disponível em https://www.solarpowereurope.org.

Global Wind Report 2023 – acesso em 26/11/2023, disponível em https://gwec.net/globalwindreport2023.

Grayson, J.C. (1960), *Decisions under uncertainty: drilling decisions by oil and gas operators*. Boston: Harvard Business School, Division of Research. Graduate School of Business Administration, 402 pp.

Hadar, J., Russel, W.R. (1969), *Rules for ordering uncertain prospects*. The American Economic Review, 59, pp. 25-34.

Hamilton, J.D. (1994), *Time series analysis*. Princeton University Press Princeton, New Jersey, 799 pp.

Hayashi, S.H.D. (2006), *Valor da flexibilização e informação em desenvolvimento de campo por módulos*. Unicamp, Campinas, SP – Faculdade de Engenharia Mecânica, tese de doutorado 138 pp.

Hayashi, S.H.D., Ligero, E.L., Schiozer, D.J. (2010), *Risk mitigation in petroleum field development by modular implantation*. Journal of Petroleum Science and Engineering, 75, pp. 105–113.

Hogan, W.W., Warren, J.M. (1974), *Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 9, issue 1, pp. 1-11.

Howard, R.A (1966), *Decision analysis: applied decision theory*. In Proceedings of the Fourth International Conference on Operational Research, New York: John Wiley. Reprinted in Howard & Matheson (1983).

Hunt, E.K., Lautzenheiser, M. (2022), *História do pensamento econômico: uma perspectiva crítica*. 3ª. Edição. Rio de Janeiro: GEN – Grupo Editorial Nacional, tradução de André Arruda Villela, 484 pp.

Independent Project Analysis, acesso em 01/10/2023, disponível em https://www.ipaglobal.com/.

Ingersoll, J.E., Ross, S.A. (1992), *Waiting to invest: investment and uncertainty*. Journal of Business, vol.65(1), pp. 1–29.

Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), acesso em 26/11/2023, disponível em https://www.ipcc.ch/

Iório, U.J. (2017), *Dos protoaustríacos a Menger: uma breve história da escola austríaca de economia*. LVM Editora, 572 pp.

Itô, K. (1951), *On stochastic differential equations*. Memoirs, American Mathematical Society 4, pp. 1–51.

Jensen, M.C. (2001), *Value maximization, stakeholder theory, and the corporate objective function*. The Monitor Company, Harvard Business School, and Amos Tuck School at Dartmouth College.

Johnston, D. (1994), *International petroleum fiscal systems and production sharing contracts*. Pennwell Publishing Company, Tulsa, Oklahoma, USA.

Keating, C., Shadwick, W. (2002), *A Universal performance measure*. Journal of Performance Measurement, pp. 59–84.

Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976), *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*. Cambridge University Press.

Keynes, J.M. (1936), *General theory of employment, interest, and money*. London: Macmillan Press, New York: St. Martin's Press.

Knight, F. (1921), *Risk, uncertainty, and profit*. Boston: Hougohton Mifflin.

Kolmogorov, A.N. (1956), *Foundations of the theory of probability*. Providence (EUA): American Mathematical Society, Chelsea Publ., 2nd English ed – original em alemão: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, 1933, 84 pp.

Korn, R., Kreer, M., Lenssen, M. (1998), *Pricing of european options when the underlying stock price follows a linear birth–death process*. Communications in Statistics. Stochastic Models. 14 (3): pp. 647–662

Laffer, A.B., (1979), *Statement prepared for the joint economic committee*. In: Laffer, A.B., Seymour, J.P. (Ed.). *The economics of the tax revolt: a reader*. New York: Hardcourt Brace Jovanovich.

Leitão, M. (2011), *Saga Brasileira – A longa luta de um povo por sua moeda*. Editora Record, 11ª edição, 476 pp.

Lemme, C.F. (2001), *Revisão dos modelos de avaliação de empresas e suas aplicações nas práticas de mercado*. Revista de Administração da USP, v. 36, n. 2, pp. 117–124.

Lerche, I., Mackay, J.A. (1999), *Economic risk in hydrocarbon exploration*. Academic Press, San Diego – California USA 404 pp.

Lima, G.A. (2004), *Uma proposta de uso da teoria da preferência e das opções reais em projetos de exploração e produção de petróleo*. Instituto de Geociências, tese UNICAMP.

Lindzen, R.S. (2022), *An assessment of the conventional global warming narrative*. Technical paper 5, The Global Warming Policy Foundation.

Lintner, J. (1965), *The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets.* Review of Economics and Statistics, (47), pp. 13–37.

Lipsey, R.G. (1975), *An introduction to positive economics*. Fourth ed. Weidenfeld & Nicolson. pp. 683–702.

Llosa, M.V. (2018), *La llamada de la tribu*. Editora Alfaguara, 320 pp.

Lomborg, B (2013), *How Much Have Global Problems Cost the World? A Scorecard from 1900 to 2050*. Cambridge University Press – New edição, 401 pp.

Luce, R.D., Raiffa, H. (1957), *Games and decisions: introduction and critical survey*. New York: John Wiley and Sons Inc., 509 pp.

Maia, A.G. (2017), Econometria: conceitos e aplicações. Saint Paul Editora, 384 pp.

Mannarino, R. (1991), *Introdução à engenharia econômica*. Editora Campus.

Mankiw, N.G. (2020), *Introdução à economia*. Tradução da 8ª Edição Norte-americana – Cengage Learning 686 pp..

Margolis, J.D., Walsh, J.P. (2003), *Misery loves companies: rethinking social initiatives by business*. Administrative Science Quarterly (Cornell University).

Markowitz, H.M. (1952), *Portfolio selection*. Journal of Finance Oxford, v. 7, n. 1, pp. 77–91.

Marques, J.B., Suslick, S.B., Trevisan, O.V. (2007), *A dynamic maximization model for exploration and development efforts in a petroleum field*. Society of Petroleum Engineers. SPE.

Marschak, J. (1950), *Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility*. Econometrica 18, pp. 111–141.

Marshall, A. (1982), *Princípios de economia: tratado introdutório*. São Paulo: Abril Cultural, 2 v.

McDonald, R., Siegel, D. (1986), *The value of waiting to invest*. Quarterly Journal of Economics 101, pp. 707–728.

Megill, R.E. (1977), *An introduction to risk analysis*. The Petroleum Publ., Tulsa, 199 pp.

Merton, R.C. (1973), *Theory of rational option pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science, vol.4, spring, pp. 141–183.

Merton, R.C. (1976), *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous.* Journal of Financial Economics, vol.3, pp. 125-144.

Mill, J.S. (1848), *Principles of political economy with some of their applications to social philosophy*. Vol. 1 (1 ed.), London: John W. Parker, retrieved 7 December 2012.

Modigliani, F., Miller, M. (1958), *The cost of capital, corporation finance and the theory of investment*. American Economic Review 48 (3), pp. 261–297.

Mossin, J. (1966), *Equilibrium in a capital asset market*. Econometrica, Chicago, v. 34, pp. 768-783.

Myers, S.C. (1977), *Determinants of corporate borrowing*. Journal of Financial Economics, pp. 147–175.

Nepomuceno, F., Suslick, S.B. (2000), *Alocação de recursos financeiros em projetos de risco na exploração de petróleo*. Revista de Administração de Empresas: RAE-FGV, n° 1, 40: pp. 63-76.

Neumann, J.V., Morgenstern, O. (1944), *Theory of games and economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Neumann, J.V., Morgenstern, O. (1953), *Theory of Games and Economic Behavior*. 3rd Edition, Princeton University Press, Princeton.

Newendorp, P. (1976), *A method for treating dependencies between variables in simulation risk analysis models.* SPE 5581, SPE–AIME, October. Rose, P., 2001. Risk Analysis and Management of Petroleum Exploration Ventures. AAPG, Tulsa, Oklahoma, USA.

Nilssen, T., Nystad, N. (1986), *Optimum exploration and extraction in a petroleum basin*. Elsevier Science Publishers B. V, North, Holand.

Nóbrega, M. (2005), *O futuro chegou – instituições e desenvolvimento no Brasil*. Editora Globo, 1ª edição, 400 pp.

Ortobelli, S., Rachev, S., Huber, I., Biglova, A. (2004), *Optimal portfolio selection and risk management: a Comparison between the stable Paretian approach and the gaussian one*. Handbook of Computational and Numerical Methods in Finance.

Ornstein, L.S., Uhlenbeck, G.E. (1930), *On the theory of brownian motion*. Phys. Rev., 36, pp. 823-841.

Paddock, J.L., Siegel, D.R., Smith, J.L. (1988), *Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases*. Unpublished manuscript. Evanston, I11.: Northwestern University.

Paulani, L.M., Braga, M.B (2013), *A nova contabilidade social – uma introdução à macroeconomia*. 3ª. Edição Revista e Atualizada.

Pindyck, R.S. (1980), *Uncertainty and exhaustible resource markets*. Journal of Political Economy 88, pp. 1203–1225.

Pindyck, R.S. (1993), *Investments of uncertain cost*. Journal of Financial Economics, vol. 34, pp. 53–76.

Pindyck, R.S. (1999), *The long-run evolution of energy prices*. The Energy Journal. International Association for Energy Economics.

Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. (1991), *Econometric models and economic forecasts*. New York: McGraw-Hill, Inc., third edition, 596 pp.

Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. (2002), *Microeconomia*. Prentice Hall 5a. edição, pp 244-248. São Paulo.

Pitombo, N.E.S. (2007), *Responsabilidade social nas grandes empresas brasileiras: o discurso e os resultados.* Dissertação de grau de mestre em administração, Universidade Federal da Bahia.

Phillips, A.W. (1958), *The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom*, 1861-1957. Economic 25: pp. 283-99.

Plackett, R.L., Burman, J.P. (1946), *The design of optimum multifactorial experiments*. Biometrika 33 (4), pp. 305–25.

Platão (2017), *A República*. Editora Lafonte; 1ª edição, 344 pp.

Pratt J.W. (1964), *Risk Aversion in the Small and in the Large*. Econometrica, January, v.32, n.1.

Pratt, J.W., Raiffa, H., Schlaifer, R.O. (1965), *Introduction to statistical decision theory*. Distributed by McGraw-Hill in mimeographic form published in finished form by The MIT Press, New York, 1995.

Rachev, S.T., Stoyanov S.V., Fabozzi, F.J., (2008), *Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization: The ideal risk, uncertainty, and performance measures*. Wiley, Finance.

Raiffa, H., Keeney, R.L. (1993), *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs*. Editora Cambridge University Press, 592 pp.

Raiffa, H. (2002), *Decision analysis: a personal account of how it got started and evolved.* Operations Research: The Journal of the Operations Research Society of America, Linthicum, vol. 50, n 1, pp. 179–185.

Robbins, L. (1945), *An essay on the nature and significance of economic science*. Macmillan and Co., Limited, St. Martin's Street, London.

Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2000), *Optimization of conditional value-at-risk*. Journal of Risk, vol 2, n 3, Spring, pp. 21–41.

Ross, S.A. (1976), *The arbitrage theory of capital asset pricing.* Journal of Economic Theory, Volume 13, Issue 3, pp. 341-360.

Ross, S.A. (1978), *A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams*. The Journal of Business, vol. 51, n. 3, pp. 453–475.

Samuelson, P.A. (1965), *Rational theory of warrant price*. Industrial Management Review, Spring, pp. 13-39.

Samuelson, P.A. (1965), *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*. Industrial Management Review, Spring, pp. 41-49.

Samuelson, P.A. (1992), *Economics: an introductory analysis*.

Santos, J.A. (2002), *Matemática financeira, análise de investimentos e análise de risco*. Apostila revista e atualizada por Verotti, C., Petrobras S.A.

Savage, L.J. (1954), *The foundation of statistics*. New York: John Wiley.

Schumpeter, J. (1971), *Historia del analisis econômico*. Barcelona: Ed. Ariel.

Schwartz, E.S. (1997), *The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging*. The Journal of Finance 52, pp. 923–973.

Schwartz, E.S., Smith, J.E. (2000), *Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices*. Management Science, vol.46(7), July, pp. 893-899.

Scot J.D. (1979), *Seleção de Textos – Os Pensadores*. São Paulo: Abril Cultural.

Sharpe, W.F. (1964), *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*. Journal of Finance, (19), pp. 425–442.

Siegel, D.R., Smith, J.L., Paddock, J.L. (1987), *Valuing offshore oil properties with option pricing models*. Midland Corporate Finance Journal, vol.5, Spring, pp. 22-30.

Singer, P. (1988), *Aprender economia*. São Paulo: Brasiliense.

Smith, A. (1983), *A riqueza das nações: investigação sobre sua natureza e suas causas*. vol. I. São Paulo, Abril Cultural. Coleção Os Economistas.

Solow, R. (1956), *A contribution to the theory of economic growth*. Quarterly Journal of Economics 70, pp. 65–94.

Souza, N.J. (sem data), *Uma introdução à história do pensamento econômico*. Relatório pesquisa da área de história econômica realizada no NEP PUCRS.

Souza, N.J. (1999), *Desenvolvimento Econômico*. 4 ed., São Paulo: Atlas.

Sprenkle C. (1964), *Warrant prices as indicator of expectation*. Yale Economic. Essays, 1 pp. 412-74.

Stokey, N.L., Lucas, R., Prescott, E. (1989), *Recursive methods in economic dynamics*. Harvard University Press, 588 pp.

Stermole, F., Stermole, J.M. (1993), *Economic evaluation and investment decision methods*. Investment Evaluations Corp., 646 pp.

Strotz, R. H. (1953), *Cardinal utility.* American Economic Review 43, pp. 384–397.

Tourinho, O.A.F. (1979), *The valuation of reserves of natural resources: an option pricing approach*. Berkeley, Tese de Ph.D., University of California, Berkeley, 103 pp.

Treynor, J.L. (1962), *Toward a theory of market value of risky assets*. Unpublished Manuscript. Rough draft dated by Mr. Treynor to the fall of 1962. A final version was published in 1999, in Asset Pricing and Portfolio Performance. Robert A. Korajczyk (editor) London: Risk Books, pp. 15–22.

Trigeorgis, L. (1995), *Real options in capital investments: models, strategies, and aplications*. Westport (EUA): Praeger Publisher, 361 pp.

Uhlenbeck, G.E., Ornstein, L.S. (1930), *On the theory of brownian motion*. Physical Review, vol.36, Reimpresso em: N. Wax (Ed.), Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Pub., 1954, pp. 93–111.

Umbreit, M.H., Hunt, E.F., Kinter, C.V. (1948), *Fundamentals of economics*. McGraw-Hill Book Co. first edition.

Varian, H.R. (1987), *The arbitrage principle in financial economics.* Journal of Economic Perspectives, vol.1(2), Fall, pp. 55-72.

Villarreal R. (1984), *A contrarrevolução monetarista*. Instituto do Livro, SP, 569 pp.

Wald, A. (1947), *Sequential analysis*. New York: John Wiley.

Wald, A. (1950), *Statistical decision theory*. New York: McGraw-Hill.

Weldon, J.C. (1950), *A note on measures of utility*. Canadian Journal of Economics and Political Science 16, pp. 227–233.

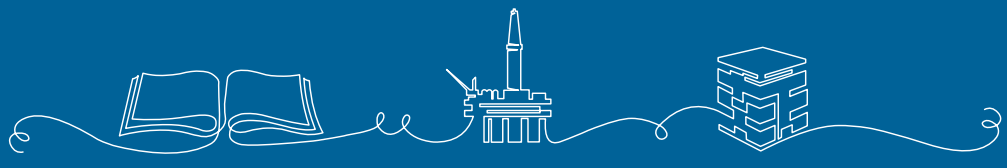
Werlang, S. (2005), *A avaliação econômica de projetos sociais*. Jornal Valor Econômico.

Wiener, N. (1930), *Generalized harmonic analysis*. Acta Math. 55 (1), pp. 117–258.

World Energy Outlook 2023, acesso em 26/11/2023, disponível em **https://www.iea.org**.

World Resources Institute – acesso em 26/11/2023, disponível em https://www.wri.org.

PROGRAMA DE EDITORAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS
UNIVERSIDADE PETROBRAS



ISBN: 978-65-88763-12-4
CDL
9 786588 763124